

Comparação entre Algoritmos de Separação de Vetores de Fluxo e de Diferenças de Fluxo de Primeira Ordem na Solução das Equações de Euler em Duas Dimensões – Teoria

Edisson Sávio de Góes Maciel

Pesquisador

Rua Demócrito Cavalcanti, 152, Afogados, Recife, PE, Brasil, 50750-080

e-mail: edissonsavio@yahoo.com.br

RESUMO

O presente trabalho estuda esquemas assimétricos (“upwind”) aplicados à solução de problemas aeronáuticos e aeroespaciais. Os algoritmos de Harten, de Frink, Parikh e Pirzadeh, de Liou e Steffen e de Radespiel e Kroll, todos de primeira ordem de precisão espacial, são estudados. Os algoritmos de Harten e de Frink, Parikh e Pirzadeh são do tipo separação de diferenças de fluxo e soluções mais precisas são esperadas. Em contrapartida, os algoritmos de Liou e Steffen e de Radespiel e Kroll são do tipo separação de vetores de fluxo e esquemas mais robustos são esperados. As equações de Euler na forma conservativa, empregando uma formulação de volumes finitos e uma discretização espacial estruturada, no espaço bidimensional, são resolvidas. Um método de separação temporal ou um método de Runge-Kutta de cinco estágios é utilizado para realizar a marcha no tempo dos esquemas numéricos. Os problemas físicos de estado estacionário dos escoamentos transônicos ao longo de um bocal convergente-divergente e em torno de um aerofólio NACA 0012, e do escoamento hipersônico de “gás frio” em torno de uma configuração de dupla elipse são estudados. Um passo no tempo variável espacialmente é empregado a fim de acelerar o processo de convergência. Este trabalho apresenta a teoria envolvendo a implementação numérica dos algoritmos mencionados. A continuação deste artigo, “RESULTADOS FINAIS”, apresenta os resultados numéricos obtidos pelos esquemas na simulação dos problemas físicos supracitados. Como conclusão, os esquema de Harten e de Frink, Parikh e Pirzadeh apresentam as soluções mais críticas e mais precisas em relação aos outros esquemas testados.

Palavras-Chaves: Algoritmo de Harten, Algoritmo de Frink, Parikh e Pirzadeh, Algoritmo de Liou e Steffen, Algoritmo de Radespiel e Kroll, Equações de Euler.

1. INTRODUÇÃO

Algoritmos simétricos têm sido extensivamente empregados para resolver uma ampla variedade de problemas (Kutler [1]). Algoritmos convencionais são de certa forma não confiáveis no sentido de que para cada problema físico diferente (e, algumas vezes, para todo caso diferente na mesma classe de problemas) termos de dissipação artificial necessitam ser especialmente ajustados e apropriadamente escolhidos para convergência. Também, problemas complexos com ondas de choque e gradientes de pressão elevados devido à expansão e à compressão podem impossibilitar a solução completamente.

Esquemas assimétricos (do inglês: “upwind”) são em geral mais robustos, porém são também mais envolvidos nas suas derivações e aplicações. Alguns esquemas assimétricos que têm sido aplicados para as equações de Euler são: Harten [2], Frink, Parikh e Pirzadeh [3], Liou e Steffen [4] e Radespiel e Kroll [5]. Comentários sobre estes métodos são descritos abaixo:

Harten [2] desenvolveu uma classe de novos esquemas de diferenças finitas, explícitos e com segunda ordem de precisão no espaço, para o cálculo de soluções fracas das leis de conservação hiperbólicas. Estes esquemas altamente não lineares eram obtidos pela aplicação apropriada de uma função de fluxo modificada a um esquema não oscilatório de primeira ordem. Os esquemas de segunda ordem assim derivados alcançavam alta resolução, enquanto preservavam a propriedade de robustez do esquema de primeira ordem original.

Frink, Parikh e Pirzadeh [3] propuseram um novo esquema, não estruturado e assimétrico, para a solução das equações de Euler. Eles testaram a precisão e a utilidade deste esquema na análise de escoamentos não viscosos em torno de duas configurações de aeronaves: uma configuração de transporte, com turbinas, e outra configuração civil de alta velocidade. Bons resultados foram obtidos.

Liou e Steffen [4] propuseram um novo esquema de separação de vetores de fluxo. Eles afirmaram que seu esquema era simples e sua precisão era equivalente e, em alguns casos, melhor do que a precisão do esquema de Roe [6] na solução das equações de Euler e de Navier-Stokes. O esquema era robusto e soluções convergidas eram obtidas tão rapidamente quanto no esquema de Roe [6]. Os autores propuseram a definição aproximada de um número de Mach de advecção na face da célula, empregando valores de suas células vizinhas via velocidades características associadas. Este número de Mach de interface era assim usado para determinar a extrapolação assimétrica dos termos convectivos.

Radespiel e Kroll [5] enfatizaram que o esquema de Liou e Steffen [4] tinha seus méritos de baixa complexidade computacional e baixa difusão numérica quando comparado com outros métodos. Eles também mencionaram que o método original tinha várias deficiências: oscilações de pressão locais na proximidade de ondas de choque, problemas de malha adversa e com alinhamento do escoamento. No trabalho de Radespiel e Kroll [5], um esquema

de separação de vetores de fluxo híbrido, que alternava entre os esquemas de Liou e Steffen [4] e de Van Leer [7] em regiões de onda de choque, foi proposto, assegurando que a resolução de choques intensos era limpa e claramente definida.

Em Maciel [8], a primeira parte deste estudo, os algoritmos de Harten [2] e de Radespiel e Kroll [5] foram aplicados à solução de problemas aeronáuticos e aeroespaciais. As equações de Euler, empregando uma formulação de volumes finitos e uma discretização espacial estruturada, no espaço bidimensional, foram resolvidas. Os problemas físicos do escoamento supersônico ao longo de uma rampa e em torno de uma geometria de um corpo rombudo foram estudados. Os resultados demonstraram que o esquema de Radespiel e Kroll [5] provia os campos de pressão mais críticos, como também soluções mais precisas, em comparação com resultados teóricos, do que o esquema de Harten [2].

Em Maciel [9], também compreendendo a primeira parte deste estudo, os esquemas de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] e de Liou e Steffen [4] foram estudados. As equações de Euler foram de novo resolvidas, empregando uma formulação de volumes finitos e uma discretização espacial estruturada, em duas dimensões. Os problemas físicos do escoamento supersônico ao longo de uma rampa e em torno de uma geometria de um corpo rombudo foram estudados. Os resultados demonstraram que o esquema de Liou e Steffen [4] provia campos de pressão mais críticos e soluções mais precisas, em comparação com resultados teóricos.

Neste trabalho, os algoritmos de Harten [2], de Frink, Parikh e Pirzadeh [3], de Liou e Steffen [4] e de Radespiel e Kroll [5] são implementados, em um contexto de volumes finitos e utilizando uma discretização espacial estruturada e assimétrica, para resolver as equações de Euler em duas dimensões. Os esquemas de Harten [2] e de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] são do tipo separação de diferenças de fluxo, enquanto os esquemas de Liou e Steffen [4] e de Radespiel e Kroll [5] são do tipo separação de vetores de fluxo. Os problemas físicos de estado estacionário dos escoamentos transônicos ao longo de um bocal convergente-divergente e em torno de um aerofólio NACA 0012, e do escoamento hipersônico de “gás frio” em torno de uma configuração de dupla elipse são estudados. Os esquemas implementados são de primeira ordem de precisão espacial. Um procedimento de passo no tempo variável espacialmente é empregado para acelerar a convergência dos algoritmos para a solução de estado estacionário. Ganhos de convergência efetivos com este procedimento são demonstrados em Maciel [10]. Este trabalho é a segunda parte do estudo descrito em Maciel [8-9].

2. EQUAÇÕES DE EULER

O movimento do fluido é descrito pelas equações de Euler, que expressam a conservação de massa, de quantidade de movimento linear e de energia para um meio não viscoso, não condutor de calor e compressível, na ausência de forças externas. Na forma integral e conservativa, estas equações podem ser representadas por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V Q dV + \int_S [(E_e) n_x + (F_e) n_y] dS = 0 \quad (1)$$

com Q escrito para um sistema Cartesiano, V é o volume da célula, n_x e n_y são as componentes Cartesianas do vetor unitário normal à face de fluxo, S é a área de fluxo e E_e e F_e são as componentes do vetor de fluxo convectivo. Os vetores Q, E_e e F_e são dados por:

$$Q = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{Bmatrix}, \quad E_e = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{Bmatrix} \quad e \quad F_e = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

sendo ρ a densidade do fluido; u e v as componentes Cartesianas do vetor velocidade nas direções x e y, respectivamente; e a energia total do fluido; e p é a pressão estática do fluido.

As equações de Euler foram adimensionalizadas em relação à densidade de estagnação, ρ^* , e em relação à velocidade crítica do som, a^* , para o problema do bocal, e em relação à densidade de escoamento livre, ρ_∞ , e em relação à velocidade do som de escoamento livre, a_∞ , para os problemas do aerofólio e da dupla elipse. O sistema matricial das equações de Euler é fechado com a equação de estado de um gás perfeito $p = (\gamma - 1)[e - 0,5\rho(u^2 + v^2)]$ e γ é a razão entre calores específicos. A entalpia total é determinada por $H = (e + p)/\rho$.

3. ALGORITMO DE HARTEN [2]

O algoritmo de Harten [2], com precisão espacial de primeira ordem, é especificado pela determinação do vetor de fluxo numérico na interface (i+1/2,j). Sua extensão para a interface (i,j+1/2) é direta, sem complicações adicionais.

Os volumes das células à direita e à esquerda da interface de fluxo, como também o volume na interface, necessários para a mudança de coordenadas, segundo uma formulação de volumes finitos, que é equivalente a um sistema de coordenadas generalizadas, são definidos por:

$$V_D = V_{i+1,j}, \quad V_E = V_{i,j} \quad e \quad V_{int} = 0,5(V_D + V_E), \quad (3)$$

em que “D” e “E” representam estados à direita e à esquerda da interface de fluxo, respectivamente. O volume de uma célula é definido por:

$$V_{i,j} = 0,5[(x_{i,j} - x_{i+1,j})y_{i+1,j+1} + (x_{i+1,j} - x_{i+1,j+1})y_{i,j} + (x_{i+1,j+1} - x_{i,j})y_{i+1,j}] + \\ 0,5[(x_{i,j} - x_{i+1,j+1})y_{i,j+1} + (x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})y_{i,j} + (x_{i,j+1} - x_{i,j})y_{i+1,j+1}], \quad (4)$$

onde uma célula computacional e suas faces de fluxo são definidas na Fig. 1.

As componentes de área na interface de fluxo são definidas por: $S_{x_int} = s'_x S$ e $S_{y_int} = s'_y S$,

onde s'_x e s'_y são definidas como: $s'_x = s_x/S$ e $s'_y = s_y/S$, sendo $S = (s_x^2 + s_y^2)^{0,5}$.

Expressões para s_x e s_y , que representam as componentes S_x e S_y sempre adotadas no sentido positivo, são fornecidas na Tab. 1.

Os termos de métrica para este sistema de coordenadas generalizadas são definidos como:

$$h_x = S_{x_int}/V_{int}, h_y = S_{y_int}/V_{int} \quad \text{e} \quad h_n = S/V_{int}. \quad (5)$$

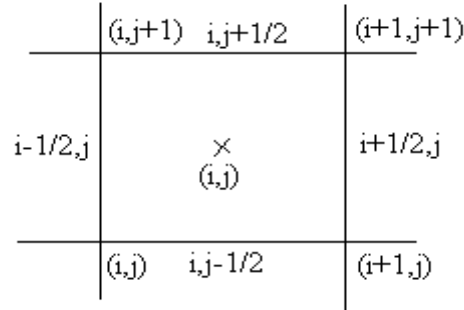


Figura 1 Célula computacional.

Tabela 1 Valores Normalizados de s_x e s_y .

Superfície	s_x	s_y
$i,j-1/2$	$-(y_{i+1,j} - y_{i,j})$	$(x_{i+1,j} - x_{i,j})$
$i+1/2,j$	$(y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})$	$(x_{i+1,j} - x_{i+1,j+1})$
$i,j+1/2$	$(y_{i,j+1} - y_{i+1,j+1})$	$(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})$
$i-1/2,j$	$(y_{i,j+1} - y_{i,j})$	$-(x_{i,j+1} - x_{i,j})$

As propriedades calculadas na interface de fluxo são obtidas ou por média aritmética ou pela média de Roe [6]. Neste trabalho, a média aritmética foi empregada:

$$\rho_{int} = 0,5(\rho_D + \rho_E), u_{int} = 0,5(u_D + u_E), v_{int} = 0,5(v_D + v_E) \quad \text{e} \quad H_{int} = 0,5(H_D + H_E). \quad (6)$$

$$a_{int} = \sqrt{(\gamma - 1) \left[H_{int} - 0,5(u_{int}^2 + v_{int}^2) \right]}, \quad (7)$$

em que a_{int} é a velocidade do som na interface de fluxo. Os autovalores das equações de Euler, na direção ξ , são definidos por:

$$U_{cont} = u_{int} h_x + v_{int} h_y, \quad \lambda_1 = U_{cont} - a_{int} h_n, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = U_{cont} \quad \text{e} \quad \lambda_4 = U_{cont} + a_{int} h_n. \quad (8)$$

Os saltos das variáveis conservadas, necessárias à construção da função de dissipação de Harten [2], são fornecidos por:

$$\Delta e = V_{int}(e_D - e_E), \quad \Delta \rho = V_{int}(\rho_D - \rho_E), \quad \Delta(\rho u) = V_{int}[(\rho u)_D - (\rho u)_E] \quad \text{e} \quad \Delta(\rho v) = V_{int}[(\rho v)_D - (\rho v)_E]. \quad (9)$$

Os vetores α na interface $(i+1/2,j)$ são calculados pelas seguintes expressões:

$$\alpha^1 = 0,5(aa - bb), \quad \alpha^2 = \Delta \rho - aa, \quad \alpha^3 = cc \quad \text{e} \quad \alpha^4 = 0,5(aa + bb). \quad (10)$$

com:

$$aa = (\gamma - 1)/a_{int}^2 \left[\Delta e + 0,5(u_{int}^2 + v_{int}^2) \Delta \rho - u_{int} \Delta(\rho u) - v_{int} \Delta(\rho v) \right]; \quad (11)$$

$$bb = 1/a_{int} \left[h'_x \Delta(\rho u) - (h'_x u_{int} + h'_y v_{int}) \Delta \rho + h'_y \Delta(\rho v) \right]; \quad (12)$$

$$cc = h'_x \Delta(\rho v) + (h'_y u_{int} - h'_x v_{int}) \Delta \rho - h'_y \Delta(\rho u); \quad (13)$$

$$h'_x = h_x / h_n \quad \text{and} \quad h'_y = h_y / h_n. \quad (14)$$

A função de dissipação de Harten [2] é construída empregando a matriz de autovetores à direita da matriz Jacobiana de fluxo normal à face:

$$R_{i+1/2,j} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ u_{int} - h'_x a_{int} & u_{int} & -h'_y & u_{int} + h'_x a_{int} \\ v_{int} - h'_y a_{int} & v_{int} & h'_x & v_{int} + h'_y a_{int} \\ H_{int} - h'_x u_{int} a_{int} - h'_y v_{int} a_{int} & 0,5(u_{int}^2 + v_{int}^2) & h'_x v_{int} - h'_y u_{int} & H_{int} + h'_x u_{int} a_{int} + h'_y v_{int} a_{int} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

A condição de entropia, determinada pela função ψ , é implementada da seguinte forma:

$$v_l = \Delta t_{i,j} \lambda_l = Z_l; \quad \psi_l = \begin{cases} |Z_l|, & \text{if } |Z_l| \geq \delta_f \\ 0,5(Z_l^2 + \delta_f^2) / \delta_f, & \text{if } |Z_l| < \delta_f \end{cases}, \quad (16)$$

com "l" variando de 1 a 4 (bidimensional) e δ_f assumindo valor 0,2 recomendado por Harten [2].

A função de dissipação de Harten [2] é construída pelo seguinte produto matriz-vetor:

$$\{D_{Harten}\}_{i+1/2,j} = [R]_{i+1/2,j} \{ \psi \alpha / \Delta t_{i,j} \}_{i+1/2,j}. \quad (17)$$

O vetor de fluxo numérico convectivo para a interface (i+1/2,j) é descrito por:

$$F_{i+1/2,j}^{(l)} = (E_{int}^{(l)} h_x + F_{int}^{(l)} h_y) v_{int} + 0,5 D_{Harten}^{(l)}, \quad \text{com: } E_{int}^{(l)} = 0,5(E_D^{(l)} + E_E^{(l)}) \text{ e } F_{int}^{(l)} = 0,5(F_D^{(l)} + F_E^{(l)}). \quad (18)$$

A integração temporal utiliza o método da separação no tempo, de primeira ordem de precisão, que divide a integração em dois passos, cada um associado com uma direção espacial:

$$\Delta Q_{i,j}^* = -\Delta t_{i,j} / V_{i,j} (F_{i+1/2,j}^n - F_{i-1/2,j}^n); \quad Q_{i,j}^* = Q_{i,j}^n + \Delta Q_{i,j}^*; \quad (19)$$

$$\Delta Q_{i,j}^{n+1} = -\Delta t_{i,j} / V_{i,j} (F_{i,j+1/2}^* - F_{i,j-1/2}^*); \quad Q_{i,j}^{n+1} = Q_{i,j}^* + \Delta Q_{i,j}^{n+1}. \quad (20)$$

4. ALGORITMO DE FRINK, PARIKH E PIRZADEH [3]

Neste esquema, de primeira ordem de precisão espacial, o vetor de fluxo numérico é calculado empregando o método de separação de diferenças de fluxo de Roe [6]. O fluxo que cruza cada face de célula (i+1/2,j) é calculado usando a fórmula de Roe [6]:

$$F_{i+1/2,j} = 1/2 [F(Q_E) + F(Q_D) - \tilde{A} |Q_D - Q_E|]_{i+1/2,j}. \quad (21)$$

A matriz \tilde{A} é determinada na avaliação de $A = \partial F / \partial Q$, com as propriedades do escoamento obtidas pela média de Roe [6]:

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_E \rho_D}, \quad \tilde{u} = (u_E + u_D \sqrt{\rho_D / \rho_E}) / (1 + \sqrt{\rho_D / \rho_E}) \quad \text{and} \quad \tilde{v} = (v_E + v_D \sqrt{\rho_D / \rho_E}) / (1 + \sqrt{\rho_D / \rho_E}); \quad (22)$$

$$\tilde{H} = (H_E + H_D \sqrt{\rho_D / \rho_E}) / (1 + \sqrt{\rho_D / \rho_E}) \quad \text{and} \quad \tilde{a}^2 = (\gamma - 1) [\tilde{H} - 0,5(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)] \quad (23)$$

de tal forma que $F(Q_D) - F(Q_E) = \tilde{A}(Q_D - Q_E)$ é satisfeita exatamente. Introduzindo as matrizes de diagonalização \tilde{R} e \tilde{R}^{-1} e a matriz diagonal de autovalores $\tilde{\Lambda}$, a matriz $|\tilde{A}|$ é

definida como $|\tilde{A}| = \tilde{R}|\tilde{\Lambda}|\tilde{R}^{-1}$. O termo

$$|\tilde{A}|(Q_D - Q_E) = \tilde{R}|\tilde{\Lambda}|\tilde{R}^{-1}\Delta Q \quad (24)$$

na fórmula do vetor de fluxo numérico de Roe [6], pode ser escrita em termos de três componentes de fluxo, cada uma associada com um autovalor distinto:

$$D_{FPP} = |\Delta\tilde{F}_1| + |\Delta\tilde{F}_3| + |\Delta\tilde{F}_4|, \quad (25)$$

em que:

$$|\Delta\tilde{F}_1| = |\tilde{U}| \left\{ \left(\Delta p - \frac{\Delta p}{\tilde{a}^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{2} \end{bmatrix} + \tilde{\rho} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta u - n_x \Delta U \\ \Delta v - n_y \Delta U \\ \tilde{u} \Delta u + \tilde{v} \Delta v - \tilde{U} \Delta U \end{bmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad |\Delta\tilde{F}_{3,4}| = |\tilde{U} \pm \tilde{a}| \left(\frac{\Delta p \pm \tilde{\rho} \Delta U}{2\tilde{a}^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} \pm n_x \tilde{a} \\ \tilde{v} \pm n_y \tilde{a} \\ \tilde{H} \pm \tilde{U} \tilde{a} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

com $\tilde{U} = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y$, $\Delta U = n_x \Delta u + n_y \Delta v$ e $\Delta(\cdot) = (\cdot)_{i+1/2,j} - (\cdot)_{i,j}$, para a interface $(i+1/2,j)$, por exemplo. O vetor de fluxo numérico na interface $(i+1/2,j)$ é definida como:

$$F_{i+1/2,j}^{(l)} = \left(E_{int}^{(l)} S_{x_int} + F_{int}^{(l)} S_{y_int} \right) - 0,5 D_{FPP}^{(l)} S_{i+1/2,j}, \quad (27)$$

onde “l” varia de 1 a 4; $E_{int}^{(l)}$ e $F_{int}^{(l)}$ são definidos de acordo com a Eq. (18) e as componentes de área de fluxo, como também a área de fluxo, são definidos conforme Tab. 1. A integração temporal emprega um método explícito de Runge-Kutta de cinco estágios com forma geral:

$$\begin{aligned} Q_{i,j}^{(0)} &= Q_{i,j}^{(n)} \\ Q_{i,j}^{(k)} &= Q_{i,j}^{(0)} - \alpha_k \Delta t / V_{i,j} \times C(Q_{i,j}^{(k-1)}), \\ Q_{i,j}^{(n+1)} &= Q_{i,j}^{(k)} \end{aligned} \quad (28)$$

com $k = 1, \dots, 5$; $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 1/6$, $\alpha_3 = 3/8$, $\alpha_4 = 1/2$ e $\alpha_5 = 1$; e C é a aproximação discreta da integral de fluxo que contém as contribuições dos vetores de fluxo em cada interface.

5. ALGORITMO DE LIOU E STEFFEN [4]

A aproximação da Equação integral (1) para um volume finito retangular produz um sistema de equações diferenciais ordinárias com respeito ao tempo:

$$V_{i,j} dQ_{i,j} / dt = -R_{i,j}, \quad (29)$$

com $R_{i,j}$ representando o fluxo líquido (resíduo) de conservação de massa, de quantidade de movimento linear e de energia no volume $V_{i,j}$. O resíduo é calculado como:

$$R_{i,j} = R_{i+1/2,j} - R_{i-1/2,j} + R_{i,j+1/2} - R_{i,j-1/2}, \quad (30)$$

com $R_{i+1/2,j} = R_{i+1/2,j}^c$, em que “c” está relacionado com a contribuição convectiva.

O fluxo convectivo discreto calculado pelo esquema AUSM (“Advection Upstream Splitting Method”) pode ser interpretado como uma soma da média aritmética das propriedades dos estados à esquerda (E) e à direita (D) da face de célula $(i+1/2,j)$, entre as células (i,j) e $(i+1,j)$,

ponderado pelo número de Mach da interface, e um termo escalar dissipativo, como mostrado em Liou e Steffen [4]. Assim,

$$R_{i+1/2,j} = |S|_{i+1/2,j} \left(\frac{1}{2} M_{i+1/2,j} \left(\begin{bmatrix} \rho a \\ \rho a u \\ \rho a v \\ \rho a H \end{bmatrix}_E + \begin{bmatrix} \rho a \\ \rho a u \\ \rho a v \\ \rho a H \end{bmatrix}_D \right) - \frac{1}{2} \phi_{i+1/2,j} \left(\begin{bmatrix} \rho a \\ \rho a u \\ \rho a v \\ \rho a H \end{bmatrix}_D - \begin{bmatrix} \rho a \\ \rho a u \\ \rho a v \\ \rho a H \end{bmatrix}_E \right) \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ S_x p \\ S_y p \\ 0 \end{bmatrix}_{i+1/2,j}, \quad (31)$$

A quantidade “a” representa a velocidade do som, definida como $a = \sqrt{\gamma p / \rho}$. $M_{i+1/2,j}$ define o número de Mach advectivo na face (i+1/2,j), que é calculado de acordo como Liou e Steffen [4]:

$$M_{i+1/2,j} = M_E^+ + M_D^-, \quad (32)$$

onde os números de Mach separados M^{\pm} são definidos por Van Leer [7]:

$$M^+ = \begin{cases} M, & \text{se } M \geq 1; \\ 0,25(M+1)^2, & \text{se } |M| < 1; \\ 0, & \text{se } M \leq -1; \end{cases} \quad \text{e} \quad M^- = \begin{cases} 0, & \text{se } M \geq 1; \\ -0,25(M-1)^2, & \text{se } |M| < 1; \\ M, & \text{se } M \leq -1. \end{cases} \quad (33)$$

M_E e M_D representam os números de Mach associados com os estados à esquerda e à direita, respectivamente. O número de Mach de advecção é definido por:

$$M = (S_x u + S_y v) / (a |S|). \quad (34)$$

A pressão na face (i+1/2,j) da célula (i,j) é calculada de forma similar:

$$p_{i+1/2,j} = p_E^+ + p_D^-, \quad (35)$$

com p^{\pm} denotando a separação de pressão definida de acordo com Van Leer [7]:

$$p^+ = \begin{cases} p, & \text{se } M \geq 1; \\ 0,25p(M+1)^2(2-M), & \text{se } |M| < 1; \\ 0, & \text{se } M \leq -1; \end{cases} \quad \text{and} \quad p^- = \begin{cases} 0, & \text{se } M \geq 1; \\ 0,25p(M-1)^2(2+M), & \text{se } |M| < 1; \\ p, & \text{se } M \leq -1. \end{cases} \quad (36)$$

A definição do termo dissipativo ϕ determina a formulação particular dos fluxos convectivos. A escolha abaixo fornece o esquema de Liou e Steffen [4], de acordo com Radespiel e Kroll [5]:

$$\phi_{i+1/2,j} = \phi_{i+1/2,j}^{LS} = |M_{i+1/2,j}|. \quad (37)$$

A integração no tempo é realizada pelo método de separação temporal (Eqs. (19) e (20)).

6. ALGORITMO DE RADESPIEL E KROLL [5]

O esquema de Radespiel e Kroll [5] é descrito pelas Eqs. (29) a (36). O próximo passo é a determinação do termo dissipativo ϕ . Um esquema híbrido é proposto por Radespiel e Kroll [5], que combina os esquemas de Van Leer [7] e de Liou e Steffen [4]. Assim,

$$\phi_{i+1/2,j} = (1-\omega)\phi_{i+1/2,j}^{VL} + \omega\phi_{i+1/2,j}^{LS}; \quad (38)$$

$$\phi_{i+1/2,j}^{VL} = \begin{cases} |M_{i+1/2,j}|, & \text{se } |M_{i+1/2,j}| \geq 1; \\ |M_{i+1/2,j}| + 0,5(M_D - 1)^2, & \text{se } 0 \leq M_{i+1/2,j} < 1; \\ |M_{i+1/2,j}| + 0,5(M_E + 1)^2, & \text{se } -1 < M_{i+1/2,j} \leq 0; \end{cases} \quad (39)$$

$$\phi_{i+1/2,j}^{LS} = \begin{cases} |M_{i+1/2,j}|, & \text{se } |M_{i+1/2,j}| \geq \tilde{\delta} \\ \frac{(M_{i+1/2,j})^2 + \tilde{\delta}^2}{2\tilde{\delta}}, & \text{se } |M_{i+1/2,j}| < \tilde{\delta} \end{cases}, \quad (40)$$

em que $\tilde{\delta}$ é um pequeno parâmetro, $0 < \tilde{\delta} \leq 0.5$, e ω é uma constante, $0 \leq \omega \leq 1$. Neste trabalho, os valores empregados para $\tilde{\delta}$ e ω foram: 0,2 e 0,5, respectivamente. A integração no tempo é realizada pelo método da separação temporal definido pelas Eqs. (19) e (20).

7. PASSO NO TEMPO VARIÁVEL ESPACIALMENTE, CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO

A idéia básica do passo no tempo variável espacialmente consiste em manter constante o número de CFL em todo o domínio de cálculo, permitindo, assim, o uso de passos no tempo apropriados para cada região da específica da malha durante o processo de convergência. Detalhes em Maciel [11-12].

Valores de estagnação foram empregados como condição inicial para o problema do bocal. Somente no contorno de saída foi imposta uma redução de 1/3 para a densidade e para a pressão a fim de iniciar o escoamento. Valores de escoamento livre são adotados para todas as propriedades, em todo o domínio de cálculo, como condição inicial para os problemas físicos do aerofólio e da dupla elipse. Detalhes em Maciel [11-12].

As condições de contorno são basicamente de quatro tipos: parede sólida, entrada, saída e continuidade. Estas condições são implementadas em células especiais denominadas células “fantasmas” e detalhes são disponíveis em Maciel [11-12].

9. CONCLUSÕES

O presente trabalho é a segunda parte do estudo que visa uma comparação entre os esquemas assimétricos de Harten [2], de Frink, Parikh e Pirzadeh [3], de Liou e Steffen [4] e de Radespiel e Kroll [5], aplicados a problemas aeronáuticos e aeroespaciais. Os esquemas são de primeira ordem de precisão no espaço, sendo o esquema de Harten [2] do tipo separação de diferenças de fluxo TVD, o esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] do tipo separação de diferenças de fluxo e os esquemas de Liou e Steffen [4] e de Radespiel e Kroll [5] do tipo separação de vetores de fluxo. Todos os esquemas são aplicados à solução dos problemas dos escoamentos transônicos ao longo de um bocal convergente-divergente e em torno de um aerofólio NACA 0012, e do escoamento hipersônico de “gás frio” em torno de uma dupla elipse. Este trabalho apresenta a teoria envolvida na implementação numérica dos quatro esquemas acima mencionados. Resultados são encontrados em Maciel [13], “RESULTADOS FINAIS”.

10. REFERÊNCIAS

- [1] P. Kutler, Computation of Three-Dimensional, Inviscid Supersonic Flows, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 41, pp. 287-374, 1975.

- [2] A. Harten, High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, *Journal of Computational Physics*, **Vol.** 49, pp. 357-393, 1983.
- [3] N. T. Frink, P. Parikh, S. Pirzadeh, Aerodynamic Analysis of Complex Configurations Using Unstructured Grids, *AIAA 91-3292-CP*, 1991.
- [4] M. Liou, C. J. Steffen Jr., A New Flux Splitting Scheme, *Journal of Computational Physics*, **Vol.** 107, pp. 23-39, 1993.
- [5] R. Radespiel, N. Kroll, Accurate Flux Vector Splitting for Shocks and Shear Layers, *Journal of Computational Physics*, **Vol.** 121, pp. 66-78, 1995.
- [6] P. L. Roe, Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes, *Journal of Computational Physics*, **Vol.** 43, pp. 357-372, 1981.
- [7] B. Van Leer, Flux-Vector Splitting for the Euler Equations, *Anais do 8th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, E. Krause, Editor, Lecture Notes in Physics, Vol. 70, pp. 507-512, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [8] E. S. G. Maciel, Comparação entre os Algoritmos de Alta Resolução de Harten e de Radespiel e Kroll na Solução das Equações de Euler no Espaço Bidimensional – Parte I, *Anais do IV Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (IV CONEM)*, Recife, PE, Brasil, 2006.
- [9] E. S. G. Maciel, Comparação entre os Algoritmos de Alta Resolução de Frink, Parikh e Pirzadeh e de Liou e Steffen na Solução das Equações de Euler no Espaço Bidimensional – Parte I, *Anais do IV Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (IV CONEM)*, Recife, PE, Brasil, 2006.
- [10] E. S. G. Maciel, Analysis of Convergence Acceleration Techniques Used in Unstructured Algorithms in the Solution of Aeronautical Problems – Part I, *Anais do XVIII International Congress of Mechanical Engineering (XVIII COBEM)*, Ouro Preto, MG, Brasil, 2005.
- [11] E. S. G. Maciel, Simulação Numérica de Escoamentos Supersônicos e Hipersônicos Utilizando Técnicas de Dinâmica dos Fluidos Computacional, *Tese de Doutorado, ITA, CTA*, São José dos Campos, SP, Brasil, 258p., 2002.
- [12] E. S. G. Maciel, Estudo de Esquemas Numéricos Simétrico e Assimétrico de Alta Resolução na Solução de Escoamentos Transônico e Supersônico – Parte I, *Anais do VIII Congresso Argentino de Mecânica Computacional (VIII MECOM)*, Buenos Aires, Argentina, 2005.
- [13] E. S. G. Maciel, Comparação entre Algoritmos de Separação de Vetores de Fluxo e de Diferenças de Fluxo de Primeira Ordem na Solução das Equações de Euler em Duas Dimensões – Resultados Finais, *Anais do Primer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica (I CAIM)*, Bahía Blanca, Argentina, 2008.

Agradecimentos

O presente autor agradece ao CNPq pelo apoio financeiro concedido sob a forma de bolsa de pós-doutorado júnior proceso PDJ 150143/2008-7.