

## **Comparação entre Algoritmos de Separação de Vetores de Fluxo e de Diferenças de Fluxo de Primeira Ordem na Solução das Equações de Euler em Duas Dimensões – Resultados Finais**

Edisson Sávio de Góes Maciel

*Pesquisador*

*Rua Demócrito Cavalcanti, 152, Afogados, Recife, PE, Brasil, 50750-080*

*e-mail: edissonsavio@yahoo.com.br*

### **RESUMO**

O presente trabalho é a segunda parte do estudo que visa uma comparação entre os esquemas assimétricos (“upwind”) de Harten, de Frink, Parikh e Pirzadeh, de Liou e Steffen e de Radespiel e Kroll aplicados a problemas aeronáuticos e aeroespaciais. Todos os esquemas são de primeira ordem de precisão no espaço. As equações de Euler em forma conservativa, empregando uma formulação de volumes finitos e discretização espacial estruturada, em duas dimensões, são resolvidas. A integração temporal é realizada usando o método de separação temporal, de primeira ordem, ou de Runge-Kutta, de segunda ordem. Os problemas físicos de estado estacionário dos escoamentos transônicos ao longo de um bocal convergente-divergente e em torno de um aerofólio NACA 0012, e do escoamento hipersônico de “gás frio” em torno de uma configuração de dupla elipse são estudados. Um passo no tempo variável espacialmente é empregado a fim de acelerar o processo de convergência.

No problema do bocal, os esquemas de Frink, Parikh e Pirzadeh e de Liou e Steffen detectam ondas de choques mais severas na garganta do que os demais esquemas. No problema do aerofólio, o esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh detecta o valor do coeficiente de pressão,  $C_p$ , mais severo na onda de choque e também prevê o melhor valor para o coeficiente aerodinâmico de sustentação. No problema da dupla elipse, o esquema de Radespiel e Kroll apresenta o valor mais alto de  $C_p$  no nariz da configuração, evidenciando uma solução mais crítica. A pressão de estagnação a frente da configuração é mais bem prevista pelo esquema de Harten. Em todos os problemas, o algoritmo de Harten prevê o campo de pressão mais severo. Como conclusão, os esquemas de Harten e de Frink, Parikh e Pirzadeh apresentam as soluções mais críticas e mais precisas em relação aos outros esquemas testados.

**Palavras-Chaves:** Algoritmo de Harten, Algoritmo de Frink, Parikh e Pirzadeh, Algoritmo de Liou e Steffen, Algoritmo de Radespiel e Kroll, Equações de Euler.

## **1. INTRODUÇÃO**

Algoritmos simétricos têm sido extensivamente empregados para resolver uma ampla variedade de problemas (Kutler [1]). Algoritmos convencionais são de certa forma não confiáveis no sentido de que para cada problema físico diferente (e, algumas vezes, para todo caso diferente na mesma classe de problemas) termos de dissipação artificial necessitam ser especialmente ajustados e apropriadamente escolhidos para convergência. Também, problemas complexos com ondas de choque e gradientes de pressão elevados devido à expansão e à compressão podem impossibilitar a solução completamente.

Esquemas assimétricos (do inglês: “upwind”) são em geral mais robustos, porém são também mais envolvidos nas suas derivações e aplicações. Alguns esquemas assimétricos que têm sido aplicados para as equações de Euler são: Harten [2], Frink, Parikh e Pirzadeh [3], Liou e Steffen [4] e Radespiel e Kroll [5]. Comentários sobre estes métodos são descritos em Maciel [6], assim como a motivação da continuação deste trabalho iniciado em Maciel [7-8].

Neste trabalho, os algoritmos de Harten [2], de Frink, Parikh e Pirzadeh [3], de Liou e Steffen [4] e de Radespiel e Kroll [5] são implementados, em um contexto de volumes finitos e empregando uma discretização espacial estruturada e assimétrica, para resolver as equações de Euler no espaço bidimensional. Os esquemas implementados são de primeira ordem de precisão no espaço. Os problemas físicos de estado estacionário dos escoamentos transônicos ao longo de um bocal convergente-divergente e em torno de um aerofólio NACA 0012, e do escoamento hipersônico de “gás frio” em torno de uma configuração de dupla elipse são estudados. Os resultados demonstraram que os esquemas de Harten [2] e de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] apresentaram os resultados mais críticos e mais precisos em relação aos outros esquemas. Este trabalho é a segunda parte do estudo descrito inicialmente em Maciel [7-8], e apresenta os resultados finais obtidos pelos esquemas numéricos descritos acima na solução das equações de Euler em duas dimensões.

## **2. RESULTADOS**

Testes foram realizados em um microcomputador com processador CELERON – 1,2GHz e 128Mbytes de memória RAM. Resultados convergidos ocorreram para 4 ordens de redução no valor do resíduo máximo. O resíduo máximo é definido como o valor máximo obtido das equações de conservação discretizadas. O valor usado para  $\gamma$  foi 1,4. O ângulo de entrada (problema do bocal) e o ângulo de ataque (outros problemas) para os problemas estudados adotaram o valor  $0,0^\circ$ . Um procedimento de passo no tempo variável espacialmente foi empregado em todos os cálculos (detalhes em Maciel [6-8]).

### **2.1. Problema físico do bocal convergente-divergente**

Uma malha algébrica de 61x71 pontos foi gerada para este problema. Esta malha é equivalente, em um contexto de volumes finitos, a ser composta de 4.200 células retangulares e 4.331 nós. Foi utilizado um estiramento exponencial de 10% em ambas as direções  $\xi$  e  $\eta$ . Figuras 1 a 4 exibem os campos de pressão gerados pelos esquemas de Harten [2], de Frink, Parikh e Pirzadeh [3], de Liou e Steffen [4] e de Radespiel e Kroll [5]. O campo de pressão gerado pelo esquema de Harten [2] é o mais severo em relação aos outros esquemas.

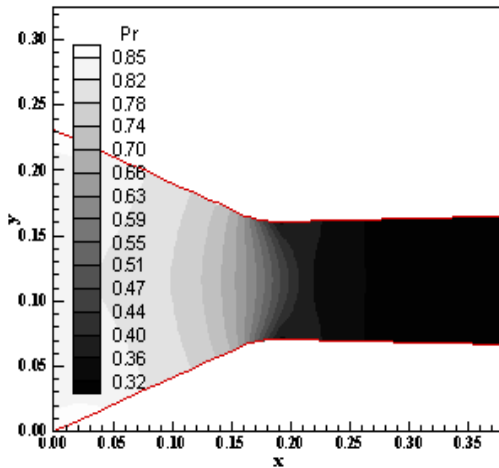


Figura 1 Campo de pressão (H).

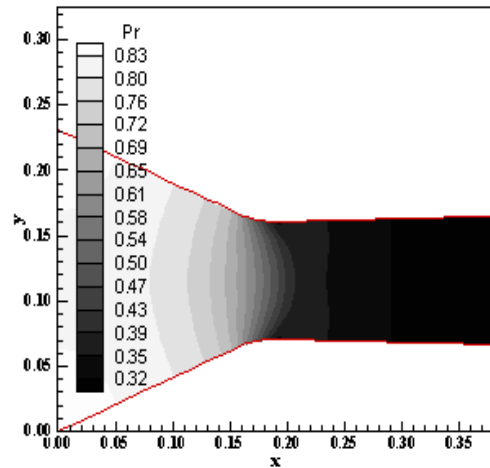


Figura 2 Campo de pressão (FPP).

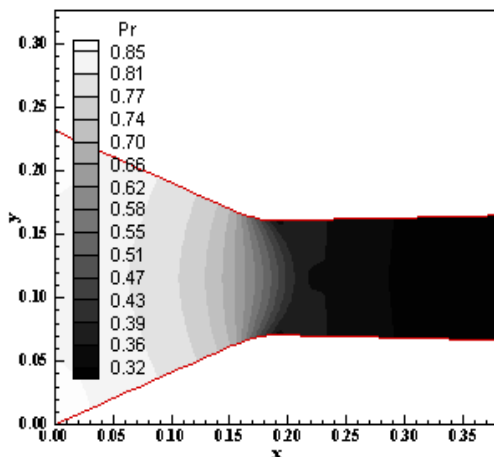


Figura 3 Campo de pressão (LS).

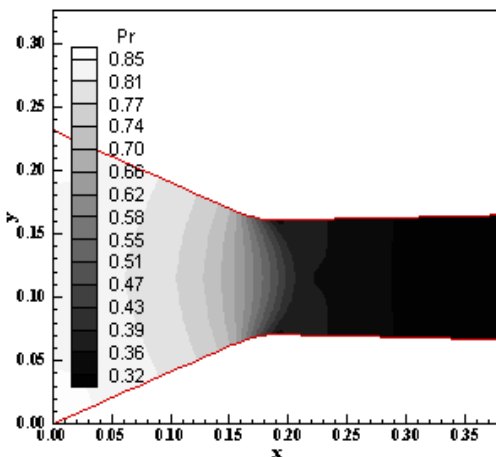


Figura 4 Campo de pressão (RK).

Figura 5 exhibe as distribuições de pressão ao longo da parede inferior do bocal obtidas pelos esquemas de Harten [2], de Frink, Parikh e Pirzadeh [3], de Liou e Steffen [4] e de Radespiel e Kroll [5]. Estas distribuições de pressão são comparadas com os resultados experimentais de Mason, Putnam e Re [9]. É possível notar que as soluções geradas pelos esquemas de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] e de Liou e Steffen [4] apresentam uma onda de choque mais severa na garganta do bocal do que a gerada pelos esquemas de Harten [2] e de Radespiel e Kroll [5]. A

razão de pressão do choque obtida pelos esquemas de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] e de Liou e Steffen [4] possuem um valor de 0,46, enquanto que a razão de pressão do choque obtida pelo esquema de Radespiel e Kroll [5] possui um valor de 0,45 e a obtida pelo esquema de Harten [2] possui um valor de 0,44, indicando que os esquemas de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] e de Liou e Steffen [4] apresentam soluções mais críticas. Como pode ser observado, as curvas de pressão geradas pelos esquemas de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] e de Liou e Steffen [4] são mais próximas dos resultados experimentais do que as curvas geradas pelos esquemas de Harten [2] e de Radespiel e Kroll [5].

Figura 6 exhibe as histórias de convergência obtidas pelos esquemas. O esquema de Harten [2] é o mais rápido em termos de razão de convergência em relação aos outros esquemas para este problema.

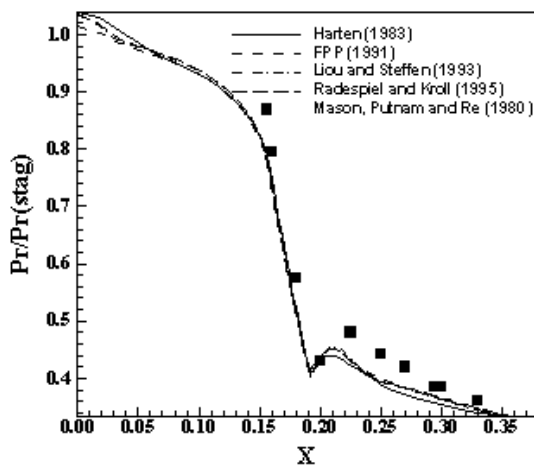


Figura 5 Distribuição de pressão na parede do bocal.

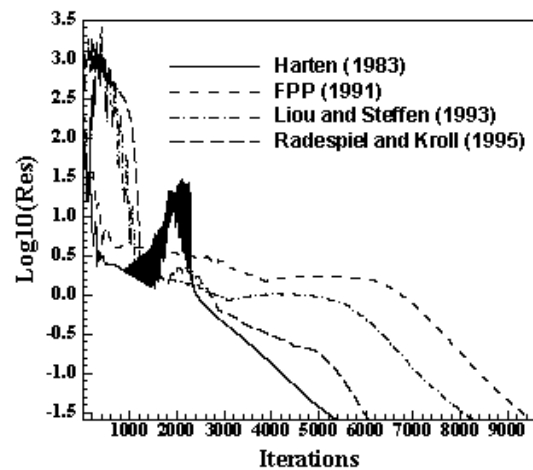


Figura 6 História de convergência.

## 2.2. Problema físico do aerofólio

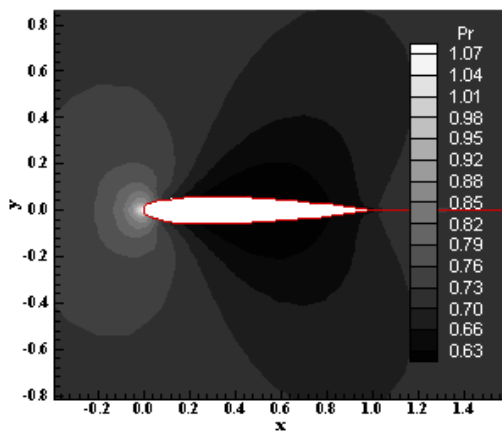


Figura 7 Campo de pressão (H).

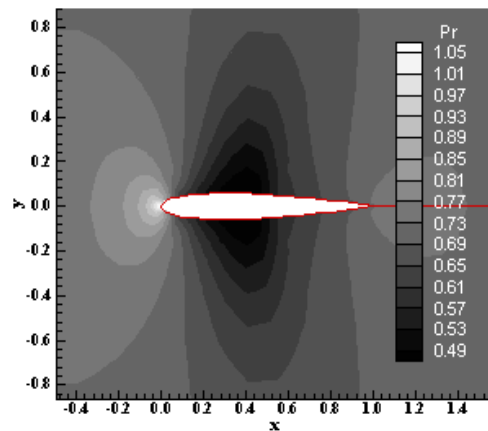


Figura 8 Campo de pressão (FPP).

Uma malha algébrica de 49x100 pontos foi gerada para este problema. Esta malha é equivalente, em um contexto de volumes finitos, a ser composta de 4.752 células retangulares e 4.900 nós. Um estiramento exponencial de 5% foi empregado na direção  $\eta$ . O contorno distante foi localizado em 10,0 vezes a corda do aerofólio em relação ao bordo de ataque do aerofólio. Um número de Mach de escoamento livre igual a 0,8 foi adotado como condição inicial para este problema, caracterizando um escoamento transônico.

Figuras 7 a 10 exibem os campos de pressão gerados pelo esquema de Harten [2], de Frink, Parikh e Pirzadeh [3], de Liou e Steffen [4] e de Radespiel e Kroll [5]. O campo de pressão gerado pelo esquema de Harten [2] é de novo o mais severo.

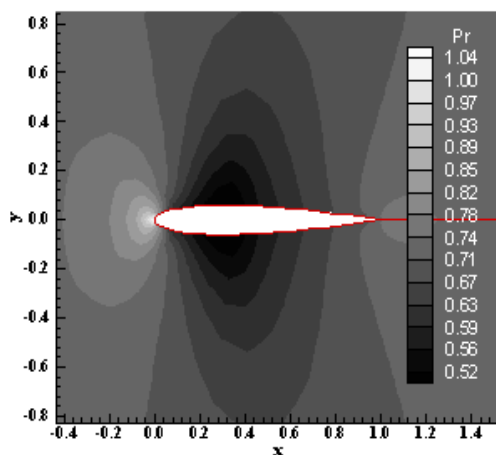


Figura 9 Campo de pressão (LS).

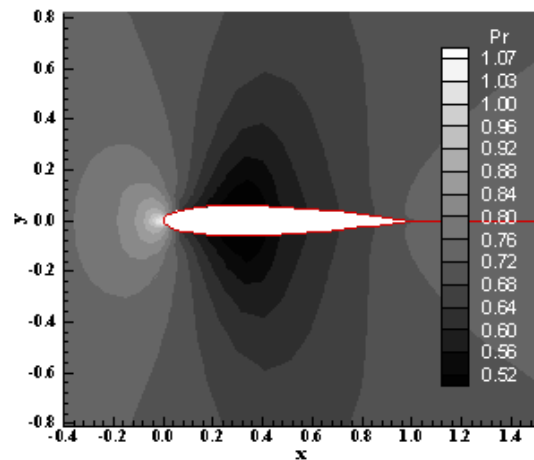


Figura 10 Campo de pressão (RK).

A Figura 11 exibe as distribuições de  $-C_p$  obtidas pelos esquemas de Harten [2], de Frink, Parikh e Pirzadeh [3], de Liou e Steffen [4] e de Radespiel e Kroll [5]. É possível notar que a solução gerada pelo esquema de Harten [2] apresenta o pior comportamento em relação aos outros esquemas.

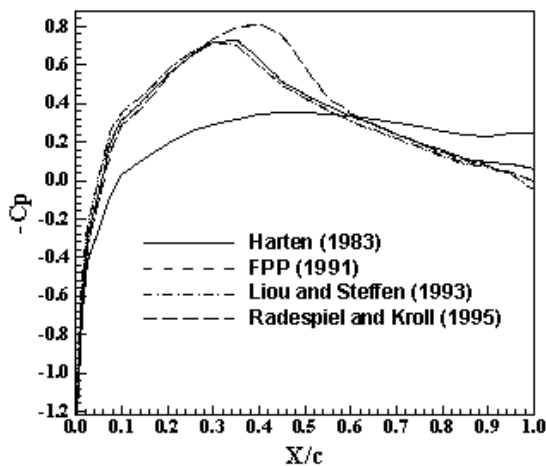


Figura 11 Distribuição de  $-C_p$ .

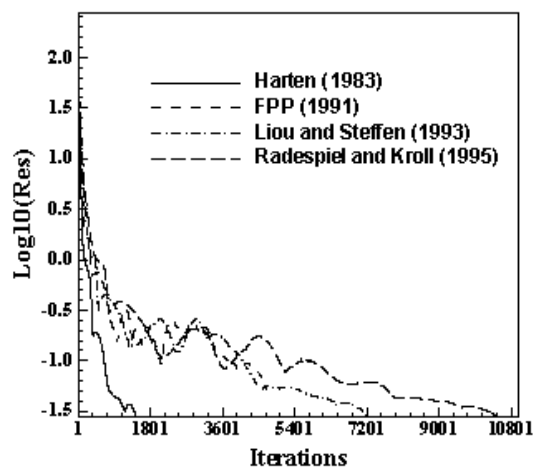


Figura 12 História de convergência.

Na solução gerada pelo esquema de Harten [2] o choque é posicionado em 50% da corda, na solução do esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] o choque é posicionado em 40% da corda, na solução do esquema de Liou e Steffen [4] o choque é posicionado em 32% da corda e na solução do esquema de Radespiel e Kroll [5] o choque é posicionado em 34% da corda. O valor de  $-C_p$  obtido pelo esquema de Harten [2] no choque é 0,34, o valor de  $-C_p$  no choque obtido pelo esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] é 0,8, o valor de  $-C_p$  no choque obtido pelo esquema de Liou e Steffen [4] é 0,72 e o esquema de Radespiel e Kroll [5] apresenta um valor de  $-C_p$  igual a 0,72. Assim, o esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] detectou o choque mais severo em relação aos outros esquemas.

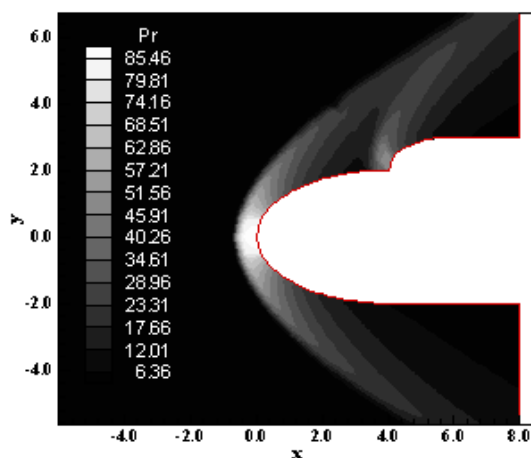
A Figura 12 apresenta as histórias de convergência geradas pelos algoritmos de Harten [2], de Frink, Parikh e Pirzadeh [3], de Liou e Steffen [4] e de Radespiel e Kroll [5]. O esquema de Harten [2] foi de novo o mais rápido entre os algoritmos testados.

A Tabela 1 exhibe os coeficientes aerodinâmicos de sustentação e de arrasto obtidos por cada esquema. É possível concluir que para a configuração simétrica do aerofólio e para um ângulo de ataque igual a zero, o valor zero é o esperado para  $c_s$ . Assim, o esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] apresentou o comportamento mais próximo da realidade para este problema físico (coeficiente mais próximo de zero).

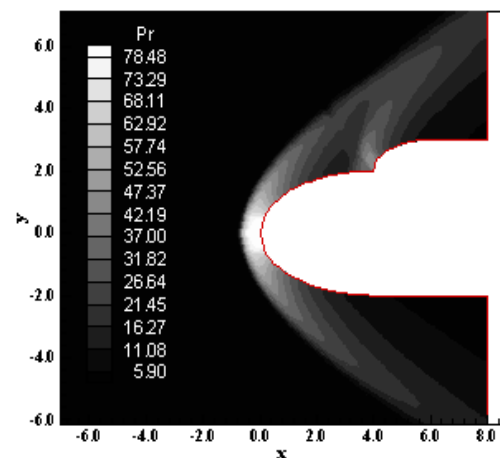
*Tabela 1 Coeficientes Aerodinâmicos Calculados por cada Esquema para o Problema do Aerofólio.*

Algoritmo:	$C_s$ :	$C_A$ :
Harten [2]	$2,820 \times 10^{-4}$	$3,960 \times 10^{-4}$
Frink, Parikh e Pirzadeh [3]	$8,460 \times 10^{-9}$	$2,654 \times 10^{-10}$
Liou e Steffen [4]	$-2,597 \times 10^{-8}$	$2,053 \times 10^{-9}$
Radespiel e Kroll [5]	$1,236 \times 10^{-8}$	$6,053 \times 10^{-10}$

### 2.3. Problema físico da dupla elipse



*Figura 13 Campo de pressão (H).*



*Figura 14 Campo de pressão (FPP).*

Uma malha algébrica de 125x100 pontos foi empregada para este problema. Esta malha é composta de 12.276 células retangulares e 12.500 nós, em um contexto de volumes finitos. Um número de Mach de escoamento livre igual a 10,0 foi adotado como condição inicial para este problema, caracterizando em escoamento hipersônico de “gás frio”.

Figuras 13 a 16 exibem os campos de pressão gerados pelos esquemas de Harten [2], de Frink, Parikh e Pirzadeh [3], de Liou e Steffen [4] e de Radespiel e Kroll [5]. O campo de pressão gerado pelo esquema de Harten [2] foi de novo o mais severo em relação aos outros esquemas, caracterizando-o como o esquema mais conservador.

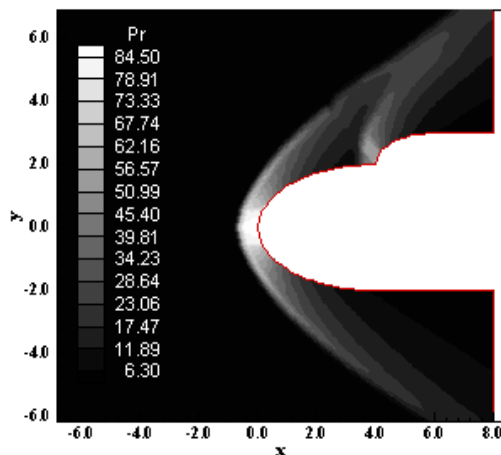


Figura 15 Campo de pressão (LS).

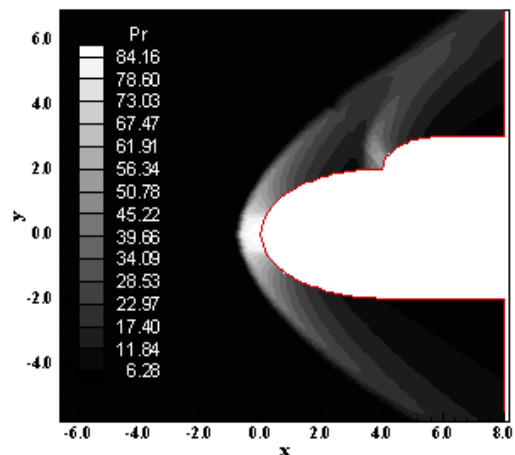


Figura 16 Campo de pressão (RK).

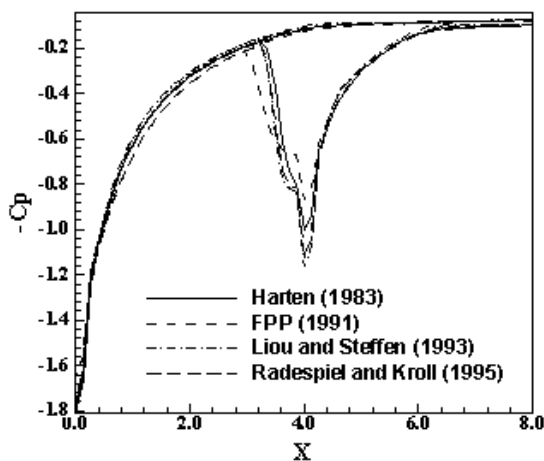


Figura 17 Distribuição de  $-C_p$ .

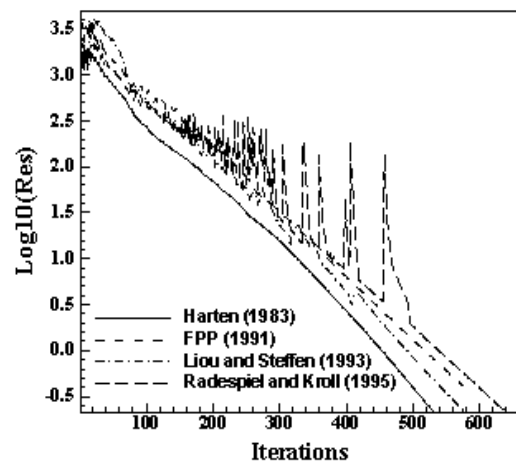


Figura 18 História de convergência.

A Figura 17 apresenta as distribuições de  $-C_p$  geradas pelos algoritmos de Harten [2], de Frink, Parikh e Pirzadeh [3], de Liou e Steffen [4] e de Radespiel e Kroll [5]. No nariz da configuração, o esquema de Harten [2] detecta um pico de  $C_p$  igual a 1,78, o esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] detecta um pico de  $C_p$  igual a 1,66, o esquema de Liou e Steffen

[4] detecta um pico de  $C_p$  igual a 1,78 e o esquema de Radespiel e Kroll [5] detecta um pico de  $C_p$  igual a 1,8. No segundo choque,  $x = 4,0m$ , o valor de  $C_p$  calculado pelo esquema de Harten [2] é 1,0, o valor de  $C_p$  calculado pelo esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] é 0,88, o valor de  $C_p$  calculado pelo esquema de Liou e Steffen [4] é 1,16 e o valor de  $C_p$  calculado pelo esquema de Radespiel e Kroll [5] é 1,12. Como o primeiro choque é mais severo, o esquema de Radespiel e Kroll [5] produz a solução mais severa em relação aos algoritmos testados.

A Figura 18 exhibe as histórias de convergência obtidas pelos algoritmos de Harten [2], de Frink, Parikh e Pirzadeh [3], de Liou e Steffen [4] e de Radespiel e Kroll [5]. As convergências de todos os esquemas são aproximadamente lineares, com o esquema de Radespiel e Kroll [5] apresentando algumas oscilações durante a convergência.

Uma possibilidade para comparação quantitativa de todos os esquemas é a determinação da pressão de estagnação a frente da configuração. Anderson [10] apresenta uma tabela de propriedades de onda de choque normal em seu apêndice B. Esta tabela permite a determinação de algumas propriedades de onda de choque como função do número de Mach de escoamento livre. Na frente da configuração da dupla elipse estudada neste trabalho, a onda de choque apresenta o comportamento de choque normal, o que permite a determinação da pressão de estagnação, atrás da onda de choque, a partir das tabelas encontradas em Anderson [10]. Assim, é possível determinar a razão  $p_{r_0}/p_{r_\infty}$  de Anderson [10], em que  $p_{r_0}$  é a pressão de estagnação na frente da configuração e  $p_{r_\infty}$  é a pressão de escoamento livre (igual a  $1/\gamma$  para a adimensionalização deste problema).

Assim, para este problema,  $M_\infty = 10,0$  corresponde à razão  $p_{r_0}/p_{r_\infty} = 129,2$  e lembrando que  $p_{r_\infty} = 0,714$ , é possível concluir que  $p_{r_0} = 92,25$ . Valores de pressão de estagnação e de respectivos erros percentuais são descritos na Tab. 2. Estes resultados indicam que o esquema de Harten [2] produz a solução mais precisa para a pressão de estagnação entre os algoritmos estudados neste trabalho.

Tabela 2 Pressão de Estagnação e Erros Percentuais Calculados pelos Esquemas.

Algoritmo:	$p_{r_0}$ :	Erro (%):
Harten [2]	85,45	7,4
Frink, Parikh e Pirzadeh [3]	78,48	14,9
Liou e Steffen [4]	84,50	8,4
Radespiel e Kroll [5]	84,16	8,8

É possível concluir que o esquema de Harten [2], um algoritmo de separação de diferenças de fluxo TVD, apresenta as soluções mais críticas, em todos os casos-exemplos estudados neste trabalho, em termos de campo de pressão, em relação aos outros esquemas. O esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh [3], um método de separação de diferenças de fluxo, foi o mais crítico em termos de razão de pressão no problema do bocal e em termos de  $C_p$  no choque no

problema do aerofólio, como também o mais preciso em termos de coeficiente de sustentação neste problema. O algoritmo de Harten [2] foi o mais preciso na determinação da pressão de estagnação no problema da dupla elipse. Em termos gerais, os esquemas de Harten [2] e de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] foram os mais críticos e mais precisos.

#### **2.4. Dados numéricos das simulações**

A Tabela 3 apresenta os dados numéricos das simulações estudadas neste trabalho. Como pode ser observado, o esquema de Liou e Steffen [4] foi o mais barato em relação aos outros esquemas.

*Tabela 3 Dados Numéricos das Simulações e Custos Computacionais dos Esquemas.*

Algoritmo:	CFL:	Iterações:	CFL:	Iterações:	CFL:	Iterações:	Cost <sup>(1)</sup> :
Harten [2]	0,9	5.363	0,4	1.445	0,9	531	0,0000301
FPP [3] <sup>(2)</sup>	0,7	10.997	0,5	4.697	0,8	576	0,0001612
Liou e Steffen [4]	0,8	11.567	0,3	7.236	0,9	578	0,0000034
Radespiel e Kroll [5]	0,8	7.249	0,2	10.495	0,8	639	0,0000258

<sup>(1)</sup> Medido em segundos/por célula/por iteração.

<sup>(2)</sup> FPP = Frink, Parikh e Pirzadeh.

### **3. CONCLUSÕES**

O presente trabalho é a segunda parte do estudo que visa uma comparação entre os esquemas assimétricos de Harten [2], de Frink, Parikh e Pirzadeh [3], de Liou e Steffen [4] e de Radespiel e Kroll [5], aplicados a problemas aeronáuticos e aeroespaciais. Os esquemas são de primeira ordem de precisão no espaço, sendo o esquema de Harten [2] do tipo separação de diferenças de fluxo TVD, o esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] do tipo separação de diferenças de fluxo e os esquemas de Liou e Steffen [4] e de Radespiel e Kroll [5] do tipo separação de vetores de fluxo. Todos os esquemas foram aplicados à solução dos problemas dos escoamentos transônicos ao longo de um bocal convergente-divergente e em torno de um aerofólio NACA 0012, e do escoamento hipersônico de “gás frio” em torno de uma dupla elipse. No problema do bocal, os esquemas de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] e de Liou e Steffen [4] detectaram o choque mais severo na garganta do bocal. Suas distribuições de razão de pressão são também as melhores em comparação com os resultados experimentais de Mason, Putnam e Re [9]. No problema do aerofólio, o esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] detectou o pico de  $C_p$  mais severo, como também o melhor valor para  $c_s$ . No problema da dupla elipse, o pico de  $C_p$  calculado pelo esquema de Radespiel e Kroll [5] no nariz da configuração apresentou o valor mais intenso e esta solução caracteriza a mais severa. O esquema de Harten [2] previu o melhor valor para a pressão de estagnação. Em termos de custo computacional, o esquema de Liou e Steffen [4] (o mais barato) é 4.640% mais barato do que o esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] (o mais caro).

Os resultados demonstraram que o esquema de Harten [2] apresentou as soluções mais críticas, em todos os casos-exemplos estudados neste trabalho, em termos de campo de pressão. O esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] foi o mais crítico em termos de razão de pressão no problema do bocal e em termos de  $C_p$  no choque no problema do aerofólio, como também o mais preciso em termos de coeficiente de sustentação neste último problema. O esquema de Harten [2] foi o mais preciso na determinação da pressão de estagnação no problema da dupla elipse. Em suma, os esquemas de Harten [2] e de Frink, Parikh e Pirzadeh [3] foram os mais críticos e os mais precisos.

#### **4. REFERÊNCIAS**

- [1] P. Kutler, Computation of Three-Dimensional, Inviscid Supersonic Flows, *Lecture Notes in Physics*, **Vol. 41**, pp. 287-374, 1975.
- [2] A. Harten, High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, *Journal of Computational Physics*, **Vol. 49**, pp. 357-393, 1983.
- [3] N. T. Frink, P. Parikh, S. Pirzadeh, Aerodynamic Analysis of Complex Configurations Using Unstructured Grids, *AIAA 91-3292-CP*, 1991.
- [4] M. Liou, C. J. Steffen Jr., A New Flux Splitting Scheme, *Journal of Computational Physics*, **Vol. 107**, pp. 23-39, 1993.
- [5] R. Radespiel, N. Kroll, Accurate Flux Vector Splitting for Shocks and Shear Layers, *Journal of Computational Physics*, **Vol. 121**, pp. 66-78, 1995.
- [6] E. S. G. Maciel, Comparação entre Algoritmos de Separação de Vetores de Fluxo e de Diferenças de Fluxo de Primeira Ordem na Solução das Equações de Euler em Duas Dimensões - Teoria, *Anais do Primer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica (I CAIM)*, Bahía Blanca, Argentina, 2008.
- [7] E. S. G. Maciel, Comparação entre os Algoritmos de Alta Resolução de Harten e de Radespiel e Kroll na Solução das Equações de Euler no Espaço Bidimensional – Parte I, *Anais do IV Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (IV CONEM)*, Recife, PE, Brasil, 2006.
- [8] E. S. G. Maciel, Comparação entre os Algoritmos de Alta Resolução de Frink, Parikh e Pirzadeh e de Liou e Steffen na Solução das Equações de Euler no Espaço Bidimensional – Parte I, *Anais do IV Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (IV CONEM)*, Recife, PE, Brasil, 2006.
- [9] M. L. Mason, L. E. Putnam, R. J. Re, The Effect of Throat Contouring on Two-Dimensional Converging-Diverging Nozzles at Sonic Condition, *NASA Technical Paper 1704*, 1980.
- [10] J. D. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*, McGraw-Hill, Inc., EUA, 563p., 1984.

#### **Agradecimentos**

O presente autor agradece ao CNPq pelo apoio financeiro concedido sob a forma de bolsa de pós-doutorado júnior processo PDJ 150143/2008-7.