

## ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE COJINETES HIDRODINÁMICOS DE LONGITUD FINITA

Gustavo G. Vignolo <sup>(1,3)</sup>, Daniel O. Barilá <sup>(3)</sup> y Lidia M. Quinzani <sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> *Departamento de Ingeniería – Universidad Nacional del Sur  
Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Argentina - e-mail: gvignolo@plapiqui.edu.ar*

<sup>(2)</sup> *Planta Piloto de Ingeniería Química (PLAPIQUI) – Universidad Nacional del Sur – CONICET  
Camino La Carrindanga km. 7 – CC 717, (8000) Bahía Blanca, Argentina –  
e-mail: lquinzani@plapiqui.edu.ar*

<sup>(3)</sup> *Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco  
Ruta Prov. Nº 1, Km. 4, (9000) Comodoro Rivadavia, Argentina - e-mail: dbarila@unpata.edu.ar*

### RESUMEN

El estudio del comportamiento de los cojinetes hidrodinámicos requiere el análisis de la película de fluido que se interpone entre las superficies sólidas en movimiento relativo. La ecuación diferencial que gobierna el movimiento de dicho fluido, llamada ecuación de Reynolds, surge de la integración de las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento en el balance de masa. El proceso exige un riguroso análisis de orden de magnitud basado en las relaciones entre las dimensiones del cojinete, de donde surge que hay tres parámetros que rigen el comportamiento del sistema: el número de Sommerfeld (S), la relación longitud a diámetro al cuadrado  $(L/D)^2$  y la excentricidad relativa ( $\eta$ ).

La solución analítica de la ecuación de Reynolds sólo puede obtenerse para situaciones geométricas y de trabajo muy particulares, como lo son por ejemplo el uso de un fluido newtoniano de viscosidad y densidad constante (es decir, isotérmico) y valores de  $L/D \rightarrow 0$ , ó  $L/D \rightarrow \infty$ . Condiciones distintas a las mencionadas deben tratarse de forma numérica.

En la práctica, el diseño de este tipo de cojinetes suele efectuarse con la ayuda de gráficos con información experimental o numérica que relacionan las diversas variables y parámetros de funcionamiento adimensionales, pero no permiten la apreciación de la distribución de presión ni temperatura en el dominio. Además, al usar esta información debe prestarse especial atención a que las condiciones de borde empleadas para su obtención coincidan con las del diseño deseado.

El presente trabajo propone soluciones aproximadas para las distribuciones de presión y temperatura en el seno del fluido en cojinetes de longitud finita, realizando su verificación con otros métodos y mediciones experimentales y el análisis sobre el alcance de las hipótesis consideradas en su formulación.

**Palabras Claves:** Lubricación Hidrodinámica, Cojinete, Perturbación Regular.

## **1. INTRODUCCIÓN**

Todas las partes de máquinas que tengan movimiento están sujetas a fricción, desgaste y su consecuente disipación de energía útil. El estudio de la lubricación es fundamental para reducirlos. Por lo general, entre los principales elementos de una máquina se encuentran aquellos sometidos a rotación. Por ende, si se desea conocer la lubricación sobre los mismos se hace imprescindible el estudio del comportamiento de los cojinetes que los soportan. Si bien existe una gran variedad de cojinetes, los más utilizados son los rodamientos y los cojinetes hidrodinámicos [12,15]. En este trabajo se analizan los cojinetes hidrodinámicos ya que, en teoría, funcionan con desgaste nulo y así logran una vida útil infinita. Esto es posible gracias a la geometría del sistema eje-cojinete que interpone una fina película de lubricante entre las superficies sólidas en movimiento relativo sin necesidad de equipos o bombas auxiliares. Por otro lado, estos cojinetes presentan dos cualidades igualmente importantes, una es que la capacidad de soportar carga la logran con un bajo consumo de potencia y la otra es que tienen la capacidad de amortiguar cargas dinámicas en una amplia gama de condiciones [7,8].

La teoría de la lubricación hidrodinámica surge del estudio del flujo del lubricante dentro del cojinete. Para ello, es necesaria la solución de los balances de cantidad de movimiento, masa y energía del fluido. La complejidad del sistema de ecuaciones resultante hace que sólo se conozcan soluciones analíticas a situaciones idealizadas de geometría y lubricante [4]. Esto es, flujo isotérmico de un lubricante newtoniano (o ley de la potencia) y cojinete de longitud infinita ( $L/D \rightarrow \infty$ ) o cojinete de longitud nula ( $L/D \rightarrow 0$ ). Bajo otras consideraciones, se requiere el uso de métodos numéricos.

En este trabajo se presentan aproximaciones a situaciones más realistas que las consideradas con las hipótesis mencionadas. Así, para estudiar cojinetes de longitud finita, se desarrolla un método analítico basado en la perturbación regular de las ecuaciones gobernantes para flujo isotérmico. Para analizar la influencia de la variación de temperatura, se deduce un balance de energía basado en el aporte convectivo medio, aplicado a cojinetes cortos.

## **2. ECUACIONES DE CONSERVACIÓN**

Para conocer el comportamiento del sistema eje-cojinete (Figura 1a), es necesario estudiar el flujo de lubricante que los separa. La principal hipótesis simplificatoria que se considera en el análisis es que la capa de fluido es tan delgada, comparada con el radio del cojinete, que su curvatura puede despreciarse. Así, el tratamiento que en principio debería hacerse en coordenadas cilíndricas, se hace en coordenadas cartesianas (Figura 1b).

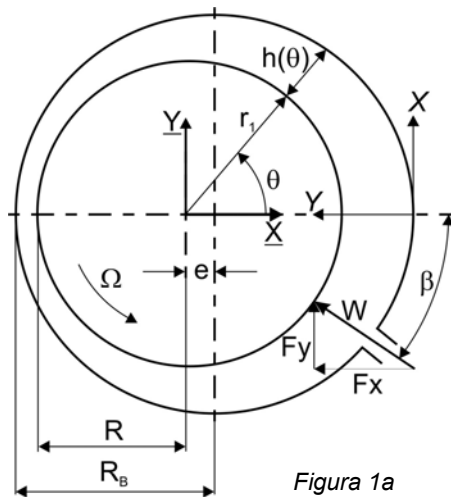


Figura 1a

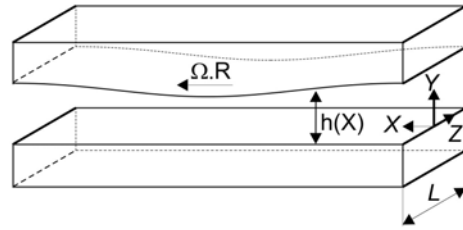


Figura 1b

Figura 1: Geometría de un cojinete hidrodinámico (a) y de la sección de flujo equivalente en coordenadas cartesianas (b). Al despreciarse la curvatura, la coordenada X puede considerarse como  $R\theta$ .

## 2.1. Análisis dimensional

Si se considera que el fluido es newtoniano, con densidad,  $\rho$ , y capacidad calorífica,  $C_v$ , constantes, y que el huelgo,  $c = R_b - R$ , entre el eje y el cojinete es varios órdenes de magnitud menor que el diámetro,  $D=2R$ , los términos dominantes de las ecuaciones de conservación adimensionales son:

$$\text{Balance de Masa: } 0 = \frac{1}{\pi} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1)$$

$$\text{Balance de Cantidad de Movimiento } (\Theta): 0 = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial p}{\partial \Theta} + f \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$\text{Balance de Cantidad de Movimiento } (z): 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + f \left( \frac{L}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3)$$

$$\text{Balance de Energía: } \left( \frac{u}{\pi} \frac{\partial t}{\partial \Theta} + v \frac{\partial t}{\partial y} + w \frac{\partial t}{\partial z} \right) = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + f \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{L}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (4)$$

donde  $\lambda = \frac{kR}{Uc^2 \rho C_v}$ ,  $k$  es la conductividad del fluido y  $U$  la velocidad tangencial del eje.

El Balance de Cantidad de Movimiento (y) es de orden de magnitud  $c/R$  menor que los balances en las otras direcciones, por lo que puede asumirse que la presión no depende de la coordenada  $y$ . En estas expresiones se ha supuesto, además, que la viscosidad en la película fluida tampoco depende de esta coordenada, quedando definida como  $\mu = \mu_0 f$ , donde la función  $f = f(\Theta, z)$  depende de la ley de variación de la viscosidad escogida y  $\mu_0$  es la viscosidad a la temperatura  $T_0$ . Las variables adimensionales se definen como:

$$p = \frac{P}{P_{\text{Ref}}} \text{ con } P_{\text{Ref}} = \frac{\mu_0 U}{R} \left( \frac{R}{c} \right)^2, \quad t = \frac{T - T_0}{T_{\text{Ref}}} \text{ con } T_{\text{Ref}} = \frac{\mu_0 U}{\rho C_v R} \left( \frac{R}{c} \right)^2, \quad (5)$$

$$\Theta = \frac{\theta}{\pi}, \quad y = \frac{Y}{c}, \quad z = \frac{Z}{L}, \quad u = \frac{V_{\Theta}}{U}, \quad v = \frac{V_y R}{U c}, \quad \text{y } w = \frac{V_z R}{U L}.$$

## 2.2. Ecuación de Reynolds

Si se integra el balance de masa en el espesor de la película, haciendo uso de los balances de cantidad de movimiento y las condiciones de borde para las componentes de la velocidad, se tiene:

$$\int_0^{\tilde{h}(\Theta)} \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^{\tilde{h}(\Theta)} \left( -\frac{1}{\pi} \frac{\partial u}{\partial \Theta} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy \quad (6)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{L}{R} \right)^2 \pi \frac{d\tilde{h}(\Theta)}{d\Theta} = \frac{1}{12} \left( \frac{L}{R} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \frac{\tilde{h}^3}{f} \frac{\partial p}{\partial \Theta} \right) + \frac{\pi^2}{12} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\tilde{h}^3}{f} \frac{\partial p}{\partial z} \right),$$

donde  $\tilde{h}(\Theta) = \frac{h(\Theta)}{c} = 1 + \eta \cos(\pi\Theta)$ .

Para flujo isotérmico ( $f = 1$ ), la ecuación diferencial anterior es conocida como ecuación de Reynolds. Puede verse que, dependiendo del valor que tome el parámetro  $(L/R)^2$ , hay términos de esta ecuación que se tornan más importantes que otros. Así, si el cojinete es muy largo ( $L/R \rightarrow \infty$ ), la ecuación (6) se reduce a:

$$\pi \frac{d\tilde{h}(\Theta)}{d\Theta} \approx \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \frac{\tilde{h}^3}{f} \frac{\partial p}{\partial \Theta} \right), \quad (7)$$

cuya solución es conocida como solución de Sommerfeld (1904). Por el contrario, si el cojinete es muy corto ( $L/R \rightarrow 0$ ), toma la forma:

$$\frac{d\tilde{h}(\Theta)}{d\Theta} \approx \frac{\pi}{6} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\tilde{h}^3}{f} \frac{\partial p}{\partial z} \right), \quad (8)$$

cuya solución es conocida como solución de Ocvirk (1953).

Cabe aclarar que para reducir la ecuación de Reynolds al caso de cojinete corto, el valor de

Presión de Referencia (5) debe ajustarse a  $P_{\text{Ref}_{\text{corto}}} = \frac{\mu_0 U}{R} \left( \frac{R}{c} \right)^2 \left( \frac{L}{R} \right)^2$ , a fin de conservar el

orden de magnitud de los términos [2]. Esto implica que para migrar el análisis de un cojinete corto hacia uno más largo, no sólo será necesario modificar el parámetro  $(L/R)^2$ , sino que además deberá ajustarse el valor de  $P_{\text{Ref}}$ .

## 2.3. Condiciones de borde

La presión calculada utilizando la ecuación de Reynolds presenta valores positivos para  $0 < \Theta < 1$  y negativos para  $1 < \Theta < 2$ , con magnitudes absolutas iguales en ambas zonas. En la realidad, el fluido no es capaz de soportar una presión negativa de importancia sin mostrar cambios físicos (vaporización del fluido y/o incorporación de aire desde el exterior por los laterales). Por ello la ecuación suele evaluarse sólo en  $0 \leq \Theta \leq 1$ , y se aproxima el valor de  $p$  en la otra mitad de la circunferencia como igual a la presión exterior. Esta condición de borde es conocida como

condición de Gumbel. Otra condición de borde que suele utilizarse es la denominada condición de Reynolds, que considera que la presión se hace nula en algún valor de  $\Theta$  entre 1 y 2, denominado  $\Theta^*$ , pero asumiendo que la derivada de la presión respecto  $\Theta$  en ese punto también es nula [18].

#### 2.4. El número de Sommerfeld

Uno de los principales objetivos del estudio de cojinetes hidrodinámicos es la determinación de su capacidad portante  $W$ . Para ello debe integrarse la presión de la película fluida en el área del eje. Una medida directa de  $W$  es la presión proyectada,  $P_C$ , que se determina como  $P_C=W/(2RL)$ , y que representa la presión media que debería existir sobre un área igual a la superficie proyectada del cojinete ( $2RL$ ) para soportar una carga  $W$ . Si se compara  $P_{Ref}$  con  $P_C$ , se tiene una medida adimensional de la presión de la película fluida, denominada número de Sommerfeld,  $S_S$ :

$$S_S = \frac{P_{Ref}}{P_C} = \frac{\mu_R U}{P_C R} \left( \frac{R}{c} \right)^2, \quad (9)$$

donde  $\mu_R$  es una viscosidad de referencia del fluido (puede ser el valor medio, el de suministro, etc). Para el caso del cojinete corto, el número adimensional que se obtiene se denomina número de Ocvirk,  $O_c$ :

$$O_c = S_S \left( \frac{L}{R} \right)^2 = \frac{P_{Ref_{corto}}}{P_C} = \frac{\mu_R U}{P_C R} \left( \frac{R}{c} \right)^2 \left( \frac{L}{R} \right)^2 \quad (10)$$

El número de Sommerfeld (o el de Ocvirk) es fundamental en el estudio de cojinetes hidrodinámicos ya que relaciona a todos los parámetros del flujo del lubricante, con la capacidad portante del sistema eje-cojinete. Es por ello que suelen presentarse los cálculos de las distintas variables de operación de un sistema eje-cojinete en función del número de Sommerfeld.

### 3. ANÁLISIS DE COJINETES ISOTÉRMICOS DE LONGITUD FINITA

Dado que, en la práctica, el valor de  $2R/L$  suele ubicarse entre  $\frac{1}{2}$  y 2, y la tendencia es hacia la fabricación de cojinetes cada vez más cortos ( $2R/L \approx 1$ ), el estudio de la solución de Ocvirk, válida para  $L/R \rightarrow 0$ , cobra importancia para la estimación de las propiedades de los cojinetes.

Para dejar de manifiesto las limitaciones de esta solución y poder extrapolarla hacia cojinetes más largos, se incorpora el número de Sommerfeld en la ecuación de Reynolds para cojinetes cortos isotérmicos. Se tiene así:

$$S_S \left( \frac{L}{R} \right)^2 \frac{d\tilde{h}(\Theta)}{d\Theta} \approx \frac{\pi}{6} \frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{h}^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (11)$$

Dado que en este caso  $L/R \rightarrow 0$ , para que se cumpla la igualdad, el orden de magnitud de  $S_S$  debe ser  $(R/L)^2$ . Esto limita la validez de la solución a valores de  $S_S$  elevados. En este trabajo

se analiza el caso del cojinete de longitud finita haciendo uso del método de perturbación regular tomando la relación  $(L/2R)^2$  como parámetro de perturbación ( $\varepsilon$ ) [1,3,5,11]. Dada la necesidad de modificar el valor de Presión de Referencia a medida que lo hace  $L/R$ , que ajusta el rango de  $S_s$  en el cual es válida la solución, se efectúa la expansión en serie no sólo de la presión,  $p$ , sino también del número de Sommerfeld,  $S_s$ . Por ello, al método propuesto se referirá como *Perturbación P y S*. La condición de borde utilizada para la presión es la de Gumbel.

Así, si  $\varepsilon=(L/2R)^2$ , las expansiones para  $p$  y  $S_s$  resultan:

$$\begin{aligned} S_s &= S_0 + \left(\frac{L}{2R}\right)^2 S_1 + \dots \rightarrow Ss = S_0 + \varepsilon S_1 + O(\varepsilon^2) \\ p &= p_0 + \left(\frac{L}{2R}\right)^2 p_1 + \dots \rightarrow p = p_0 + \varepsilon p_1 + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (12)$$

Reemplazando en la ecuación de Reynolds se tiene:

$$\frac{2}{\pi}(S_0 + \varepsilon S_1)\varepsilon \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{1}{3\pi^2}\varepsilon \frac{\partial}{\partial\Theta} \left[ \tilde{h}^3 \frac{\partial(p_0 + \varepsilon p_1)}{\partial\Theta} \right] + \frac{1}{12}\tilde{h}^3 \frac{\partial^2(p_0 + \varepsilon p_1)}{\partial z^2}, \quad (13)$$

donde la solución de orden cero es la de Ocvirk:

$$p_0 = 12S_0^* \left[ \frac{1}{4} - z^2 \right] \frac{\eta \sin(\pi\Theta)}{[1 + \eta \cos(\pi\Theta)]^3} \quad (14)$$

La solución de orden uno queda dada por:

$$p_1 = 2\eta \frac{[A \sin(\pi\Theta) + B \sin(2\pi\Theta) + C \sin(3\pi\Theta)]}{D \cos(\pi\Theta) + E \cos(2\pi\Theta) + F \cos(3\pi\Theta) + G \cos(4\pi\Theta) + H \cos(5\pi\Theta) + I}, \quad (15)$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= S_1^* (-24z^2\eta^2 - 96z^2 + 6\eta^2 + 24) + S_0^* (112\eta^2 z^4 - 168\eta^2 z^2 + 48z^2 - 32z^4 + 35\eta^2 - 10), \\ B &= 64S_0^* \eta z^4 - 96\eta S_1^* z^2 - 96S_0^* \eta z^2 + 20\eta S_0^* + 24\eta S_1^*, \\ C &= \eta^2 (-24z^2 S_1^* + 16S_0^* z^4 - 24S_0^* z^2 + 6S_1^* + 5S_0^*), \\ D &= 80\eta + 120\eta^3 + 10\eta^5, \\ E &= 80\eta^2 + 40\eta^4, \\ F &= 40\eta^3 + 5\eta^5, \\ G &= 10\eta^4, \\ H &= \eta^5, \\ I &= 16 + 80\eta^2 + 30\eta^4, \end{aligned} \quad (16)$$

y donde  $S_0^*$  y  $S_1^*$  están definidos como:

$$\begin{aligned} S_0^* &= S_0 \varepsilon, \\ S_1^* &= S_1 \varepsilon. \end{aligned} \quad (17)$$

En la Figura 2 se muestra la predicción de la excentricidad relativa,  $\eta$ , y de la fricción adimensional,  $fR/c$ , a  $S = \frac{S_s}{2\pi} = \frac{\mu_R N}{P_c} \left(\frac{R}{c}\right)^2$  constante, en función de la relación  $L/D$  obtenidas con el método propuesto y con la solución de Ocvirk. En esta figura también se incluye la solución numérica de la ecuación de Reynolds completa. Puede apreciarse que la solución de Ocvirk se aleja de la numérica a medida que el valor de  $S$  decrece ( $\eta$  aumenta y  $fR/c$  disminuye), mientras que la solución obtenida con el método propuesto se mantiene cercana a la numérica en todo el rango.

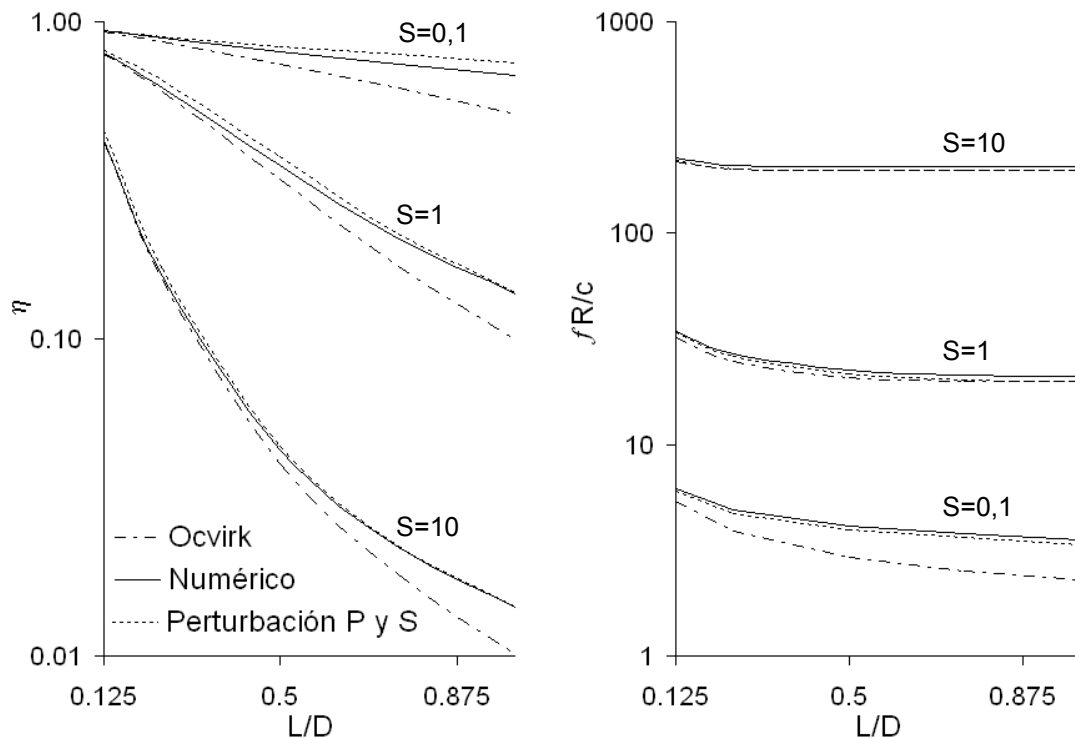


Figura 2: Excentricidad relativa y fricción adimensional en función de  $L/D$ , para  $S=0,1, 1$  y  $10$ . Puede verse que la solución de Ocvirk se aleja de la solución numérica a medida que  $S$  decrece, mientras que la Perturbación  $P$  y  $S$  no lo hace.

La comparación entre los resultados obtenidos mediante el método propuesto y las conocidas curvas de Raimondi y Boyd [15], pueden encontrarse en [18]. Cabe mencionar que los resultados de Raimondi y Boyd no coinciden con los numéricos presentados en este trabajo ya que los primeros fueron obtenidos con una condición de borde tipo Reynolds, mientras que los segundos con una tipo Gumbel (ver Sec. 2.2).

#### 4. ANÁLISIS TERMOHIDRODINÁMICO DE COJINETES CORTOS

La solución acoplada de todas las ecuaciones de conservación se hace sumamente difícil sin el uso de hipótesis simplificadoras dadas por el análisis dimensional y por el aporte de datos experimentales [6]. Aquí se presenta una aproximación que contempla la resolución del

sistema de ecuaciones considerando que el aporte convectivo en el balance de energía se debe a la media de las componentes de la velocidad. Esta suposición se desprende del Método de Inercia Promediada que se emplea para considerar los efectos inerciales en los balances de cantidad de movimiento [13]. Se puede entonces integrar el balance de energía en el espesor de la película fluida para obtener la temperatura media del fluido,  $Tm$ , independiente de la coordenada  $y$ . Asimismo, se asume que la superficie del cojinete es adiabática, mientras que la del eje es isotérmica, con una temperatura igual a la media de  $Tm$  en todo el fluido,  $TM$ . La temperatura sobre la superficie del cojinete,  $Tc$ , es considerada proporcional a  $Tm$ , mientras que la temperatura de suministro,  $T0$ , se supone conocida [10]. Las temperaturas adimensionales, resultan:

$$tm = \frac{Tm - T0}{T_{Ref}}, \quad tM = \frac{TM - T0}{T_{Ref}} \quad \text{y} \quad tc = \frac{Tc - T0}{T_{Ref}}. \quad (18)$$

Integrando el Balance de energía en el espesor del fluido, y definiendo:

$$u_{med} = \frac{\int_0^{\tilde{h}(\Theta)} u \, dy}{\int_0^{\tilde{h}(\Theta)} dy}, \quad v_{med} = \frac{\int_0^{\tilde{h}(\Theta)} v \, dy}{\int_0^{\tilde{h}(\Theta)} dy}, \quad w_{med} = \frac{\int_0^{\tilde{h}(\Theta)} w \, dy}{\int_0^{\tilde{h}(\Theta)} dy}, \quad tm = \frac{\int_0^{\tilde{h}(\Theta)} t \, dy}{\int_0^{\tilde{h}(\Theta)} dy} \quad \text{y} \quad tM = \frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^2 tm \, d\Theta \, dz}{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^2 d\Theta \, dz}, \quad (19)$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tilde{h}(\Theta)} \left( \frac{u}{\pi} \frac{\partial t}{\partial \Theta} + v \frac{\partial t}{\partial y} + w \frac{\partial t}{\partial z} \right) dy &= \int_0^{\tilde{h}(\Theta)} \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dy + \int_0^{\tilde{h}(\Theta)} f \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{L}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \\ \Rightarrow \frac{u_{med}}{\pi} \left[ \tilde{h}(\Theta) \frac{\partial tm}{\partial \Theta} + (tm - tM) \frac{\partial \tilde{h}(\Theta)}{\partial \Theta} \right] &+ v_{med} (tM - tc) + w_{med} \tilde{h}(\Theta) \frac{\partial tm}{\partial z} \approx \\ &\approx \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_0^{\tilde{h}(\Theta)} + \int_0^{\tilde{h}(\Theta)} f \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{L}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \end{aligned} \quad (20)$$

Si además, se reemplaza el término conductivo de la ecuación utilizando la condición de borde convectiva, se tiene que

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_0^{\tilde{h}(\Theta)} = \left( \frac{\lambda}{k} \right) k \left( \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{\tilde{h}(\Theta)} - 0 \right) = - \left( \frac{\lambda}{k} \right) \alpha (tM - tm), \quad (21)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente convectivo de transmisión de calor.

La función de variación de viscosidad con la temperatura utilizada está dada por la Ley de Vogel, en donde  $\mu = \mu_0 e^{-\beta_0(T-T_0)}$ , siendo  $\beta_0$  una constante que depende del lubricante.

Si el estudio se efectúa para cojinetes infinitamente cortos ( $L/R \rightarrow 0$ ), las ecuaciones de conservación se simplifican, y además puede asumirse que las variaciones de temperatura en la dirección axial son despreciables frente a las variaciones en la dirección tangencial [9,16].

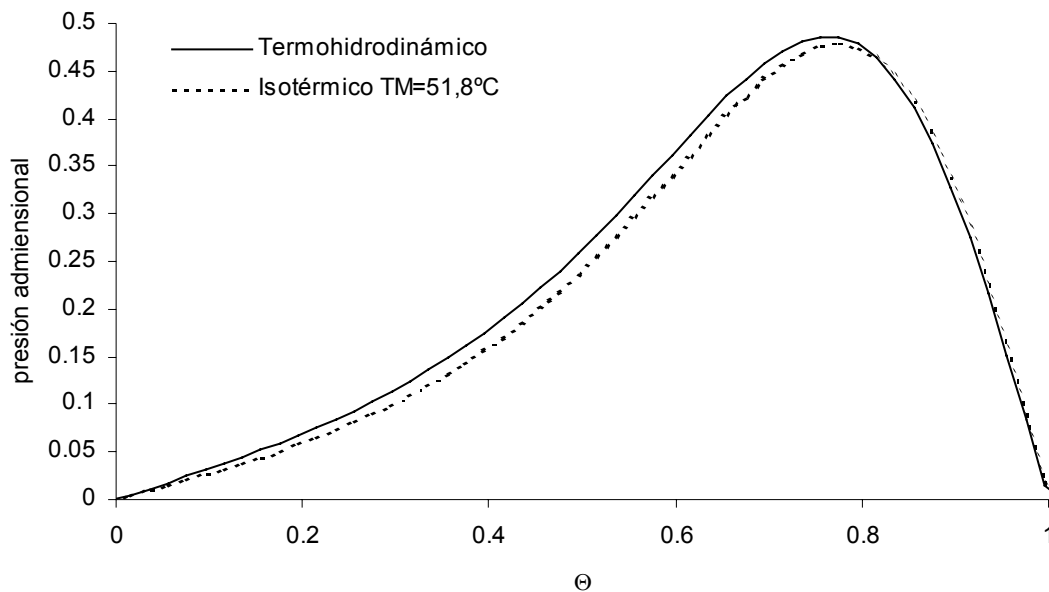
Ello se debe a la alta conductividad térmica del eje y cojinete. Estas hipótesis dan resultados válidos aún para cojinetes de  $L/D \approx 1$ .

A continuación se presentan los resultados obtenidos sobre un cojinete que opera bajo las condiciones especificadas en la Tabla 1.

*Tabla 1: Características del cojinete estudiado*

L/D	0,7	T0	44 °C
R/C	636,94	$\eta$	0,41
L	0,7m	$\mu_0$	0,0192 Pa.s
$\beta$	62°	$\alpha$	50 W/m <sup>2</sup> K
$\beta_0$	0,029/K	$\rho$	859 Kg/m <sup>3</sup>
N	2250 RPM	$C_v$	1970 J/Kg K

La Figura 3 muestra la comparación de los perfiles de presión obtenidos considerando la variación de la temperatura y considerando la solución isotérmica de Ocvirk, a  $TM$ . Puede verse que no existe gran diferencia entre ellos dado que el cojinete representado no está muy cargado.



*Figura 3: Perfil de presión adimensional obtenido para un cojinete como el indicado en la Tabla 1, mediante el análisis termohidrodinámico presentado y mediante el análisis isotérmico a  $TM$ .*

La Figura 4 muestra los perfiles adimensionales de temperatura en el fluido,  $tm$ , y sobre la superficie del cojinete,  $tc$ . Dado que el eje se considera isotérmico y que se espera que la temperatura media máxima se encuentre cerca del punto de  $h_{\min}$ , se asume que  $tc = \phi \tilde{h}(\theta) tm$ , donde  $\phi$  es una constante de proporcionalidad (aquí se considera  $\phi = 0,7$ ). Para la presión se utiliza una condición de borde tipo Gumbel, mientras que en el balance de energía se asume que en la zona divergente del flujo la densidad varía a fin de que se cumpla el balance de

masa. Esto se logra suponiendo que una fracción del líquido se vaporiza. Como consecuencia, la capacidad calorífica del fluido también se ve alterada dado que su valor cambia al cambiar de fase. No obstante, no es tenido en cuenta el calor involucrado en la vaporización. Los valores obtenidos se comparan con datos experimentales de mediciones sobre la superficie del cojinete [10] y con la predicción de la temperatura media del fluido en el mismo cojinete [16]. Se observa que la predicción de temperatura media es similar a la reportada en [16], mientras que la predicción de la posición del máximo de  $t_c$  se ve desplazada hacia un ángulo mayor que el dato experimental. Esta tendencia es típica de un cojinete que opera a un número de Reynolds más alto [14,17], y puede ser el fruto del empleo de velocidades medias en los términos inerciales y/o de la relación escogida entre  $t_c$  y  $t_m$ .

No obstante, considerando la sencillez del sistema resuelto, el resultado puede considerarse de suma utilidad.

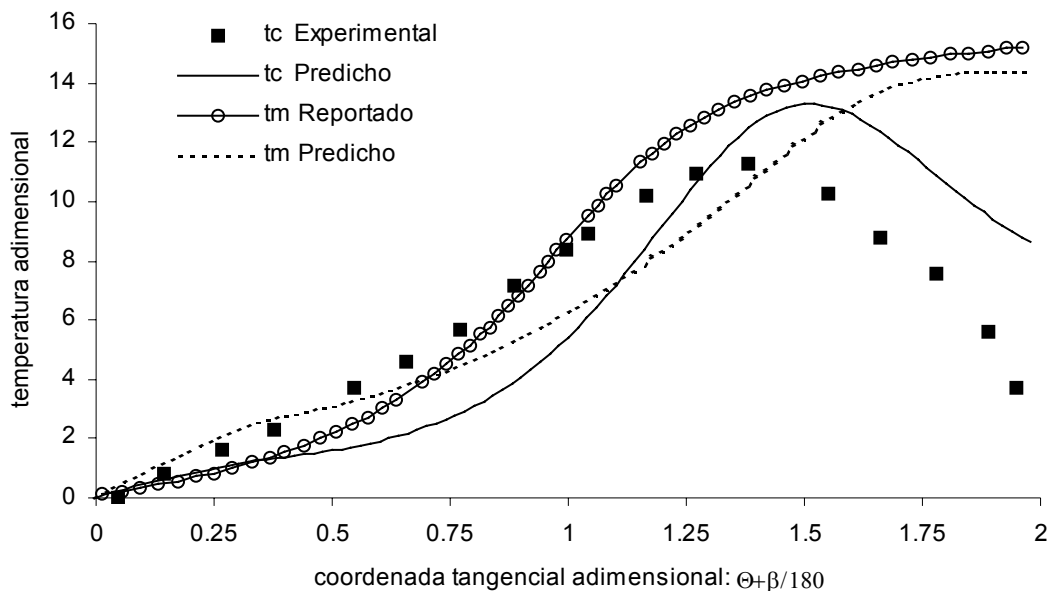


Figura 4: Perfil de temperatura adimensional obtenido para un cojinete con las características indicadas en la Tabla 1.

## 5. CONCLUSIONES

El estudio de cojinetes hidrodinámicos presenta un desafío importante si se desean simular condiciones reales de uso. El método abordado en este trabajo es el de incorporar estas condiciones, de a una, sobre un cojinete ideal. Así, se presentan dos aproximaciones a casos diferentes: el de un cojinete isotérmico de longitud finita y el de un cojinete corto no isotérmico.

En el primer caso se obtienen muy buenas predicciones de los parámetros operativos del cojinete a través de un método analítico, lo que permite además representar los perfiles de presión, tensiones de corte, etc. Este método es una extensión y un complemento de la solución de Ocvirk para cojinetes infinitamente cortos.

En el segundo caso se obtienen los perfiles de presión y temperatura para cojinetes infinitamente cortos, considerando que el término convectivo del balance de energía está gobernado por velocidades medias. Los resultados obtenidos presentan buena concordancia con datos experimentales, aunque muestran el comportamiento de un flujo a un número de Reynolds mayor al de trabajo. En la actualidad se están efectuando trabajos tendientes a extender este análisis termohidrodinámico a longitudes mayores.

## 6. REFERENCIAS

- [1] C.M. Bender y S.A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw Hill, (1978).
- [2] R.H. Buckholz y B.Hwang. The Accuracy of Short Bearing Theory for Newtonian Lubricants, *Journal of Tribology*, 108, 73-79 (1986).
- [3] G. Capriz y G. Cimatti. On Some Singular Perturbation Problems in the Theory of Lubrication, *Applied Mathematics and Optimization*, 4, 285-297 (1978).
- [4] S.M Chun. Thermohydrodynamic lubrication analysis of high-speed journal bearing considering variable density and variable specific heat, *Tribology International*, 37, 405-413 (2004).
- [5] W.M. Deen, *Analysis of Transport Phenomena*, Oxford University Press, (1998).
- [6] M. Fillon y J. Bouyer. Thermohydrodynamic analysis of a worn plain journal bearing, *Tribology International*, 37, 129-136 (2004).
- [7] J. Frêne, D. Nicolas, B. Degueurce, D. Berthe y M. Godet, *Hydrodynamic Lubrication (Tribology and Interface Engineering Series)*, Elsevier Science, (1997).
- [8] B.J. Hamrock, S.R Schmid y B.O. Jacobson, *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, Second Edition, Marcel Dekker, Inc., (2004).
- [9] M. G. Ionescu, V-C. M Ionescu, An Approximate Analytical Model of Thermohydrodynamic Estimation of Finite Length Journal Bearings, *Proceedings of WTC2005*, (2005).
- [10] J. Mitsui, A Study of Thermohydrodynamic Lubrication in a Circular Journal Bearing, *Tribology International*, 20, 331-341 (1987).
- [11] A. Nayfeh, *Perturbation Methods*, John Wiley & Sons, (1973).
- [12] R.L. Norton, *Diseño de Máquinas*, Pearson, (1999).
- [13] O. Pinkus, *Theory of Hydrodynamic Lubrication*, McGraw Hill, (1961).
- [14] Z. Safar y A.Z. Szeri. Thermohydrodynamic Lubrication in Laminar and Turbulent Regimes, *Journal of Lubrication Technology*, 48-57, 1974.
- [15] J.E. Shigley y Ch.R. Mischke, *Diseño en Ingeniería Mecánica*, McGraw Hill, (1999).
- [16] S. Singhal, A Simplified Thermohydrodynamic Stability Analysis of the Plain Cylindrical Hydrodynamic Journal Bearings, *Msc Thesis* (Department of Mechanical Engineering, Louisiana State University), (2004).
- [17] T. Suganami y A.Z. Szeri. A Thermohydrodynamic Analysis of Journal Bearings, *Journal of Lubrication Technology*, 101, 21-27, 1979.
- [18] G.G. Vignolo, D.O. Barilá y L.M. Quinzani. Análisis del Comportamiento del Cojinete de Longitud Finita Usando el Método de Perturbación Regular, *Mecánica Computacional*, XXVI, pp.592-604, 2007.