



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL ÁREA  
MECÁNICA  
DE LAS  
INGENIERÍAS

FoDAMI

## MÉTODO ANALÍTICO DE DETECCIÓN DE FISURAS EN VIGAS VIBRANTES

Javier L. Raffo<sup>1</sup> - Marcos R. Carrizo<sup>\*2</sup>

<sup>\*1 \*2</sup> Facultad Regional Delta – Universidad Tecnológica Nacional  
San Martín Campana, Buenos Aires, Argentina  
correo-e: jraffo@frd.utn.edu.ar

### RESUMEN

El desarrollo de métodos de detección de fisura es de un gran interés en ingeniería. En particular, el estudio del problema inverso de detección de fisuras en vigas a partir de valores de frecuencias naturales de vibración obtenidas experimentalmente en análisis dinámicos.

En este trabajo se presenta un análisis de sensibilidad de un método analítico de detección de fisura en una viga Euler-Bernoulli a partir de valores de frecuencias naturales obtenidas previamente. También se realizan propuestas de mejoras del método de detección.

Por otra parte, se realizan análisis de detección de fisura en vigas a partir de valores de frecuencias naturales obtenidas previamente con: un método analítico, mediciones experimentales con acelerómetros y con el programa Abaqus de elementos finitos.

El modelo analítico propuesto se desarrolla obteniendo el problema de contorno y transición a partir de realizar el cálculo de variaciones al funcional energético de la viga en estudio para finalmente obtener la ecuación de frecuencias que es resuelta en forma exacta. Las mediciones experimentales se realizan con acelerómetros y equipamiento adecuado para obtener la respuesta en frecuencia de las vibraciones libres de la viga analizada con técnicas de análisis de vibraciones mecánicas. Por otra parte, se realizan modelos de elementos finitos con el programa Abaqus y se obtienen los valores numéricos de las frecuencias naturales.

Se presentan resultados de análisis de sensibilidad de la metodología analítica propuesta para detectar una fisura, a partir de valores previos de frecuencias naturales obtenidos con la solución exacta. Se presentan valores obtenidos con el método inverso a partir de valores de frecuencias naturales determinadas experimentalmente, con el programa Abaqus y obtenidos en forma exacta.

**Palabras Claves:** *Vibraciones de vigas, Detección de fisuras, Frecuencias naturales, Análisis de sensibilidad.*

### REFERENCIAS

[1] Javier L. Raffo - Marcos R. Carrizo, XX Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF 2013), "Vibraciones de vigas y pórticos ante la presencia de fisuras. Implementación del problema inverso", Mecánica Computacional Vol XXXII págs. 1715-1735, Mendoza, 2013.



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

## 1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de métodos de detección de fisura es de un gran interés en ingeniería. En particular, el estudio del problema inverso de detección de fisuras en vigas a partir de valores de frecuencias naturales de vibración. Especialmente para el área de mantenimiento predictivo, preventivo e integridad estructural.

Sin la intención de realizar un análisis exhaustivo, a continuación se presentan algunos de los trabajos de temática relacionada realizados al momento. En cuanto al estudio del problema inverso, Lele y Maiti (2002) [2] realizaron un estudio de ingeniería inversa, para vigas cortas, luego Lin et al. (2002) [3] extendió el estudio a múltiples fisuras y más adelante Khaji et al. (2009) [4] implementó un método para identificar fisuras analíticamente para algunos casos particulares de vigas Timoshenko, a partir de resultados previos obtenidos mediante análisis con el método de elementos finitos. En estos trabajos, la fisura es implementada mediante un modelo de rótula con una restricción elástica rotacional.

Por otra parte, la obtención rigurosa del problema de contorno y transición para el caso de restricciones generales en los extremos y en un punto intermedio para el caso de una viga Euler-Bernoulli fue obtenido por Grossi y Quintana (2008) [5].

El problema inverso para el caso de vigas Euler-Bernoulli con restricciones elásticas generales en los extremos y en puntos intermedios fue tratado por Raffo y Carrizo (2013) [1], donde se propuso un método de detección de fisuras a partir de valores de frecuencias naturales obtenidos en forma directa con la solución exacta, con valores medidos experimentalmente y con valores obtenidos con el programa Abaqus de elementos finitos.

En este trabajo, se propone extender el estudio realizado por Raffo y Carrizo (2013) [1] incluyendo un análisis de sensibilidad. Específicamente, se proponen diferentes procedimientos sistematizados para la implementación del problema inverso y se realiza una comparación de los resultados obtenidos con dichos procedimientos. Se realiza además, un estudio paramétrico para el caso en que la fisura se encuentra ubicada alrededor de puntos de inflexión o nodos de las diferentes formas modales de la viga con fisura.

Se presentan resultados de la posición y profundidad de fisura obtenidas con el problema inverso a partir de los valores de frecuencias naturales obtenidas con mediciones experimentales, con el programa Abaqus y con la solución exacta



## 2. Expresiones del Problema de Contorno y Transición de una Viga Euler-Bernoulli

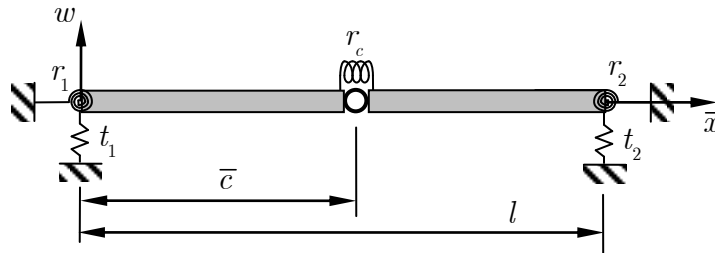


Figura 1: Viga de tres tramos analizada.

Sea una viga de longitud  $l$ , de dimensiones uniformes a lo largo de su eje, que tiene sus extremos restringidos elásticamente y tiene una rótula restringida elásticamente contra rotación ubicada en  $\bar{x} = \bar{c}$ , como se muestra en la Figura 1. La viga está compuesta por dos tramos, que corresponden a los intervalos  $[0, \bar{c}]$  y  $[\bar{c}, l]$  respectivamente. Se asume que los extremos y las rótulas intermedias están restringidos elásticamente contra rotación y traslación. Las restricciones rotacionales están definidas por los parámetros  $r_1, r_2$  y  $r_c$ , y las restricciones traslacionales por  $t_1, t_2$  y  $t_c$ . Adoptando valores adecuados de  $r_1, r_2$  y  $t_1, t_2$  se pueden generar todas las combinaciones posibles de restricciones de apoyo clásicas (empotrado, simplemente apoyado, libre). Utilizando valores adecuados de  $r_c$ , se puede considerar los efectos de una fisura en el punto intermedio  $\bar{x} = \bar{c}$ .

Para analizar el desplazamiento transversal de la viga en estudio, suponemos que la posición vertical de la viga en cualquier instante de tiempo  $t$  está descrita por la función  $w = w(\bar{x}, t)$ ,  $\bar{x} \in [0, l]$ .

Por lo tanto, la ecuación diferencial y el problema de contorno y transición de la viga analizada cuando se analiza el problema de vibraciones libres es ([5,6,1]):

$$\lambda w + \frac{d^4 w}{dx^4} = 0, \forall x \in G_i, i = 1, 2, t \geq 0. \quad (1)$$

$$R_1 \frac{dw}{dx} \Big|_0 = \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_0, \quad (2)$$



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

$$T_1 w_0 = -\frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_0, \quad (3)$$

$$w_{c^-} = w_{c^+}, \quad (4)$$

$$R_c \left( \frac{dw}{dx} \Big|_{c^+} - \frac{dw}{dx} \Big|_{c^-} \right) = \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{c^-}, \quad (5)$$

$$R_c \left( \frac{dw}{dx} \Big|_{c^+} - \frac{dw}{dx} \Big|_{c^-} \right) = \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{c^+}, \quad (6)$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{c^-} = \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{c^+}, \quad (7)$$

$$R_2 \frac{dw}{dx} \Big|_1 = -\frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_1, \quad (8)$$

$$T_2 w_1 = \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_1, \quad (9)$$

donde se introdujo el cambio de variables  $x = \bar{x}/l$ ,  $c = \bar{c}/l$ , con  $T_i = \frac{t_i l^3}{EI}$ ,

$R_i = \frac{r_i l}{EI}$ ,  $i = 1, 2$ , y  $R_c = \frac{r_c l}{EI}$ ,  $E$  es el módulo de Young del material de la viga,

$I = bh^3/12$  es el momento de inercia de la sección,  $b$  y  $h$  son la profundidad y la altura de la sección rectangular.

La (1) a (9) se obtiene luego de realizar el cálculo de variaciones y de implementar el método de separación de variables para realizar un análisis de autovalores.

Como el dominio del sistema con el cambio de variables considerado es  $(0, 1)$ , que es un intervalo abierto en  $\mathbb{R}$ , el borde está dado por dos puntos,  $(0, 1)$ . En consecuencia,  $c$  es un punto interior y (4) a (7) son las condiciones en las transiciones. Por lo tanto (2), (3), (8) y (9) corresponden a las



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

condiciones de contorno.

Para simular una fisura con una restricción rotacional interna, se adopta  $0 < r_c < \infty$ . Mas precisamente, para una fisura simple abierta como la de la Figura 2, se la puede modelar como una rótula elástica cuyo valor es (Ostachowicz y Krawczuk, 1991) [6]

$$r_c^{(s)} = \frac{Ebh^2}{72\pi\eta^2 f(\eta)}, \quad (10)$$

donde  $\eta = a / h$  es la relación entre la profundidad de la fisura  $a$  y la altura de la viga. La función  $f(\eta)$  para una fisura abierta a un solo lado de la viga es (ver Figura 2)

$$f(\eta) = 0.6384 - 1.035\eta + 3.7201\eta^2 - 5.1773\eta^3 + 7.553\eta^4 - 7.332\eta^5 + 2.4909\eta^6, \quad (11)$$

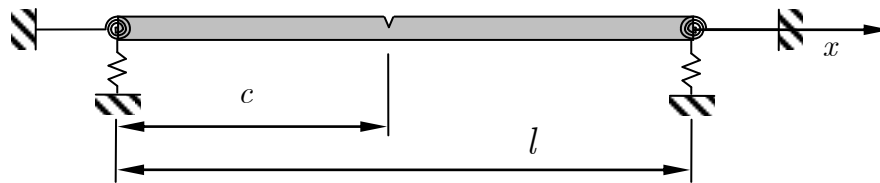


Figura 2: Viga con una fisura superficial a un solo lado.

La solución exacta del problema presentado por las expresiones (1) a (9) está dada por:

$$w_{1,n} \quad x = A_1 \cosh \lambda_n x + A_2 \sinh \lambda_n x + A_3 \cos \lambda_n x + A_4 \sin \lambda_n x, \quad \forall x \in [0, c], \quad (12)$$

$$w_{2,n} \quad x = A_5 \cosh \lambda_n x + A_6 \sinh \lambda_n x + A_7 \cos \lambda_n x + A_8 \sin \lambda_n x, \quad \forall x \in [c, l], \quad (13)$$

donde  $\lambda_n^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega_n^2 l^4$ , y  $\omega_n$  es el  $n$  -ésimo modo de vibrar de la viga analizada

Al reemplazar (12) y (13) en (2) a (9), y al buscar una solución no trivial, el determinante del sistema de los coeficientes  $A_i$  debe ser igual a cero, por lo tanto se obtiene la ecuación de frecuencias

$$G \quad T_1, R_1, T_2, R_2, R_c, c, \lambda_n = 0. \quad (14)$$



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

### 3. Método Analítico de Detección de Fisuras (MADF)

Se propone resolver el problema inverso de determinación de posición y profundidad de la fisura a partir de conocer los primeros valores del coeficiente de frecuencias  $\lambda_n$ .

El procedimiento del método inverso consiste en conocer los valores de las restricciones elásticas de los extremos de la viga  $T_1, R_1, T_2, R_2$ . Tener en forma directa dos o más valores de  $\lambda_n$ . Luego, se introducen los valores de  $T_1, R_1, T_2, R_2$  y  $\lambda_n$  antes descriptos en (14) y se obtiene

$$H R_c, c = 0. \quad (15)$$

Luego, de (15) se obtienen los valores de  $R_c$  en función de  $c \in [0,1]$ , que se presentan graficados en la Figura 3a, para los valores de  $\lambda_n$ , con  $n = 1, 2, \dots, 6$ .

Para ejemplificar el procedimiento, se analiza el caso de una viga articulada en ambos extremos con una fisura ubicada en  $c = 0.29$ , con  $\eta = 0.25$ , que se obtuvieron con la solución exacta los primeros seis valores de  $\lambda$ .

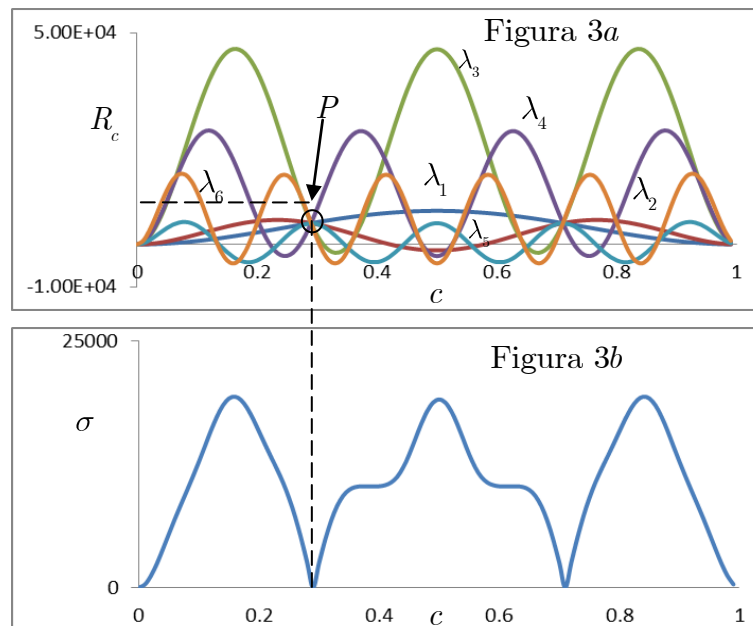


Figura 3: a) Gráfico de  $R_c$  en función  $c$ , con  $c \in [0,1]$  para los primeros seis valores de  $\lambda$  obtenidos con la expresión (15); b) Gráfico de  $\sigma$  en función de  $c$ , con  $c \in [0,1]$  obtenido con la expresión (16).

En la Figura 3a, se grafican los valores de  $R_c$  en función  $c$ , con  $c \in [0,1]$  para los primeros seis



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

valores de  $\lambda$  obtenidos con la expresión (15). Se observa que al realizar el procedimiento descrito, en el punto  $P$  coinciden las seis gráficas, por lo cual este punto es solución de (15), de donde se obtiene en forma directa la posición de la fisura  $c$  y con el valor de  $R_c$  y (10) se obtiene la profundidad de la fisura  $\eta$ .

Para asegurar la posición del punto  $P$ , en la Figura 3b se grafica el valor de la desviación estándar de la muestra  $\sigma$ , para los valores de  $R_c$  representados en la Figura 3a, siendo desvío estándar

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n R_c^i - \bar{R}_c^2}{n-1}. \quad (16)$$

donde  $R_c^i$  denota el valor de  $R_c$  para el  $i$ -ésimo modo,  $\bar{R}_c$  denota el valor medio de los  $R_c^i$  para  $n = 6$ .

En la Figura 3b se grafican los valores de  $\sigma$  en función de los valores supuestos de  $c$ , con  $c \in [0,1]$ . Se observa que  $\sigma$  tiene dos valores casi nulos en los extremos de la viga, en  $c = 0.29$  y en  $c = 0.71$  por ser una viga de condiciones de contorno simétrica. Por lo tanto, presuponiendo el lado en que se encuentra la fisura, se obtiene que  $c = 0.29$  y  $R_c = 5025.527$ .

Finalmente de (10) resulta  $\eta = 0.249$ .

### 3.1. Optimización propuesta del MADF

En los casos en que la fisura se encuentra en un punto de inflexión de las formas modales, de la solución propuesta (12) y (13) se observa que el momento correspondiente al punto mencionado es nulo, por lo tanto, la forma modal de la viga no se ve afectado por el valor de  $R_c$ . Por esto, cuando se predice el valor de  $c$  y  $R_c$ , el MADF no logra evidenciar con valores razonables a  $R_c$ , y se procede a descartar la forma modal en cuestión.

En función de lo mencionado, se proponen cuatro metodologías para optimizar el MADF: La primera es considerar los seis primeros modos en el MADF (6 modos), la segunda es considerar solamente los primeros tres modos impares (modos impares), la tercera es considerar los primeros



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL ÁREA  
MECÁNICA  
DE LAS  
INGENIERÍAS

FoDAMI

tres modos pares (modos pares) y la cuarta metodología propuesta de optimización consiste en descartar los modos que presentan valores de  $R_c$  evidentemente mayores respecto a los obtenidos con los otros modos (propuesto). Los valores de  $R_c$  que se descartan son del orden de 8 órdenes de magnitud mayor al resto de los modos.

## 4. Resultados

Para establecer las distintas condiciones de apoyo clásicas en los extremos de la viga, se adopta la notación donde E denota que el extremo está empotrado, A denota que el extremo está articulado y L denota que el extremo está libre. Como ejemplo, si se indica la condición de borde de una viga E-A, denota que el primer tramo, en  $x = 0$ , el extremo se encuentra empotrado, mientras que en el segundo tramo, en  $x = 1$ , el extremo se encuentra articulado.

Se presentan los valores del coeficiente de frecuencia  $\lambda$ , determinados con la solución exacta, por el método de elementos finitos o en forma experimental, donde:

$$\lambda^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 l^4. \quad (17)$$

Se presentan los valores de  $c$  y  $\eta$  obtenidos con el MADF,  $c_{MADF}$  y  $\eta_{MADF}$  respectivamente.

También, los valores del error relativo porcentual en la determinación de  $c$ , y de  $\eta$ , dados por

$$\varepsilon_c = \frac{|c_{MADF} - c|}{c} 100\% \text{ y } \varepsilon_\eta = \frac{|\eta_{MADF} - \eta|}{\eta} 100\%, \quad (18)$$

Para obtener los valores de  $\lambda$  con el programa de elementos finitos Abaqus, se utilizó un modelo de sólido homogéneo en 2D con elementos rectangulares planos de 8 nodos, bi-cuadráticos de tensiones planas identificado como CPS8. Se dibujó en el plano el perfil de la viga, con la fisura como una discontinuidad con un semicírculo en el extremo. En la Figura 4 se muestra la densidad de la malla en la zona afectada por la presencia de la fisura.



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

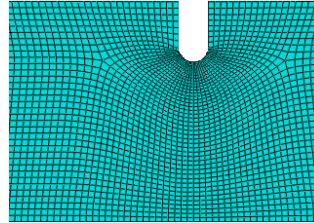


Figura 4: Detalle de la malla en la zona de la fisura.

Para obtener los valores de  $\lambda$  experimentalmente se utilizaron vigas con mecanizados que emulan fisuras abiertas superficiales soportadas con mordazas para representar diferentes condiciones de contorno clásicas. Se obtuvo la respuesta en frecuencia de las vibraciones libres de la viga analizada con técnicas de análisis de vibraciones mecánicas. El equipo empleado consta de un acelerómetro, marca Brüel & Kjær modelo 4374. Un preamplificador de carga Brüel & Kjær modelo NEXUS 2692-C de 4-canales. Una bornera National Instruments SCC-68 con una placa digitalizadora/adquisidora National Instruments PCI-6132 y el programa Signal Express de National Instruments para realizar el análisis de vibraciones mecánicas.

En la Tabla 1 se presentan los primeros seis valores de  $\lambda$  para una viga A-A obtenidos con la solución exacta para diferentes valores de  $c$  y  $\eta$ , y los correspondientes valores de  $c$ ,  $\eta$ ,  $\varepsilon_c$  y  $\varepsilon_\eta$  obtenidos con el MADF para los cuatro métodos de optimización descritos en el inciso 3.2.

Para la condición A-A, existe en  $x = 0.25$  un punto de inflexión en la forma modal para el cuarto modo de vibración, en torno a este se propone realizar un análisis en la sensibilidad del MADF. En la Tabla 2 se analizan los casos en que  $c = 0.22, 0.23, 0.25, 0.27$  y  $0.29$ , a su vez  $\eta = 0.01, 0.25, 0.5, 0.75, 0.99$ . Se presentan los primeros seis valores de  $\lambda$  y los valores de  $c$  y  $\eta$  determinados con el MADF propuesto.



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

Tabla 1: Primeros seis valores de  $\lambda$  obtenidos con la solución exacta para vigas A-A con diferentes valores de  $c$  y  $\eta$ , y los correspondientes valores de  $c$ ,  $\eta$ ,  $\varepsilon_c$  y  $\varepsilon_\eta$  obtenidos con el MADF para los cuatro métodos de optimización propuestos.

Caso	Método Directo								MADF				
	$c$	$\eta$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$		$c$	$\eta$	$\varepsilon_c$	$\varepsilon_\eta$
1	0.4	0.99	1.843	5.832	8.822	11.37	15.708	17.386	6 Modos	0.4	Ind.	<1	1.00E+02
									Modos Impares	0.4	Ind.	<1	1.00E+02
									Modos Pares	0.4	0.99	<1	2.39E-03
									Propuesto	0.4	0.99	<1	1.43E-03
2	0.43	0.99	1.826	6.021	8.439	11.77	15.336	17.532	6 Modos	0.43	0.99	<1	3.42E-06
									Modos Impares	0.43	0.99	<1	5.50E-06
									Modos Pares	0.43	0.99	<1	1.33E-06
									Propuesto	0.43	0.99	<1	3.42E-06
3	0.45	0.99	1.818	6.135	8.226	12.065	14.9	17.939	6 Modos	0.45	0.99	<1	9.70E-03
									Modos Impares	0.45	0.99	<1	3.36E-05
									Modos Pares	0.45	0.99	<1	1.94E-02
									Propuesto	0.45	0.99	<1	9.70E-03
4	0.48	0.99	1.811	6.257	8.015	12.459	14.346	18.621	6 Modos	0.48	0.99	<1	1.47E-06
									Modos Impares	0.48	0.99	<1	2.12E-06
									Modos Pares	0.48	0.99	<1	8.16E-07
									Propuesto	0.48	0.99	<1	1.47E-06
5	0.5	0.99	1.809	6.283	7.972	12.566	14.205	18.85	6 Modos	0.5	Ind.	<1	1.00E+02
									Modos Impares	0.5	0.99	<1	1.33E-04
									Modos Pares	0.5	Ind.	<1	1.00E+02
									Propuesto	0.5	0.99	<1	1.33E-04
6	0.4	0.75	2.075	5.863	8.857	11.41	15.708	17.426	6 Modos	0.4	Ind.	<1	1.00E+02
									Modos Impares	0.4	Ind.	<1	1.00E+02
									Modos Pares	0.4	0.75	<1	2.80E-07
									Propuesto	0.4	0.75	<1	1.50E-07
7	0.45	0.75	2.048	6.147	8.289	12.084	14.926	17.96	6 Modos	0.45	0.75	<1	8.67E-08
									Modos Impares	0.45	0.75	<1	9.74E-08
									Modos Pares	0.45	0.75	<1	2.71E-07
									Propuesto	0.45	0.75	<1	8.67E-08
8	0.5	0.75	2.039	6.283	8.049	12.566	14.253	18.85	6 Modos	0.5	Ind.	<1	1.00E+02
									Modos Impares	0.5	0.75	<1	5.47E-07
									Modos Pares	0.5	Ind.	<1	1.00E+02
									Propuesto	0.5	0.75	<1	5.47E-07



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

Tabla 2: Primeros seis valores de  $\lambda$  obtenidos con la solución exacta para vigas A-A con diferentes valores de  $c$  y  $\eta$ , y los correspondientes valores de  $c$ ,  $\eta$ ,  $\varepsilon_c$  y  $\varepsilon_\eta$  obtenidos con el MADF propuesto.

Caso	Método Directo								MADF			
	$c$	$\eta$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$c$	$\eta$	$\varepsilon_c$	$\varepsilon_\eta$
15	0.290	0.010	3.141	6.282	9.425	12.566	15.706	18.848	0.29	0.01	<1	1.31E-04
16		0.250	2.997	5.935	9.345	12.394	14.983	18.480	0.29	0.25	<1	3.20E-07
17		0.500	2.621	5.471	9.259	12.177	14.445	18.289	0.29	0.5	<1	6.00E-08
18		0.750	2.210	5.249	9.224	12.084	14.287	18.240	0.29	0.75	<1	1.20E-07
19		0.990	1.974	5.181	9.214	12.056	14.246	18.227	0.29	0.99	<1	5.91E-06
20	0.270	0.010	3.141	6.282	9.424	12.566	15.706	18.847	0.27	0.01	<1	2.30E-04
21		0.250	3.010	5.913	9.271	12.521	15.055	18.244	0.27	0.25	<1	6.40E-07
22		0.500	2.654	5.406	9.121	12.464	14.478	17.942	0.27	0.5	<1	6.00E-07
23		0.750	2.249	5.159	9.064	12.438	14.288	17.868	0.27	0.75	<1	1.73E-07
24		0.990	2.012	5.082	9.047	12.430	14.237	17.849	0.27	0.99	<1	1.82E-06
25	0.250	0.010	3.141	6.282	9.424	12.566	15.707	18.847	0.25	0.01	<1	1.63E-04
26		0.250	3.023	5.900	9.189	12.566	15.262	18.078	0.25	0.25	<1	5.20E-07
27		0.500	2.689	5.351	8.972	12.566	14.798	17.653	0.25	0.5	<1	1.40E-07
28		0.750	2.293	5.078	8.894	12.566	14.629	17.547	0.25	0.75	<1	9.07E-07
29		0.990	2.055	4.992	8.872	12.566	14.582	17.520	0.25	0.99	<1	1.86E-06
30	0.230	0.010	3.141	6.282	9.424	12.566	15.707	18.847	0.23	0.01	<1	3.71E-04
31		0.250	3.036	5.895	9.106	12.528	15.521	18.070	0.23	0.25	<1	2.12E-06
32		0.500	2.728	5.310	8.822	12.493	15.303	17.525	0.23	0.5	<1	1.80E-07
33		0.750	2.343	5.006	8.724	12.480	15.215	17.375	0.23	0.75	<1	9.20E-07
34		0.990	2.106	4.909	8.697	12.476	15.190	17.336	0.23	0.99	<1	4.33E-06
35	0.220	0.010	3.141	6.282	9.424	12.566	15.708	18.848	0.22	0.01	<1	2.18E-05
36		0.250	3.043	5.897	9.066	12.486	15.624	18.154	0.22	0.25	<1	4.40E-07
37		0.500	2.749	5.295	8.749	12.418	15.526	17.592	0.22	0.5	<1	8.60E-07
38		0.750	2.370	4.975	8.640	12.395	15.485	17.422	0.22	0.75	<1	2.27E-06
39		0.990	2.134	4.872	8.610	12.388	15.473	17.378	0.22	0.99	<1	3.46E-06

En la Tabla 3 se analiza la respuesta del MADF cuando se emplean como dato de entrada valores de  $\lambda$  con determinado grado de error. A tal fin se determinó con la solución exacta los primeros seis valores de  $\lambda$  para una viga con  $c = 0.25$  y  $\eta = 0.5$ . Los casos de análisis consisten en variar estos valores de  $\lambda$  en  $\varepsilon_\lambda = \pm 1\%, \pm 2\%, \pm 3\%, \pm 4\%, \pm 5\%, \pm 7\%, \pm 10\%$ , donde

$$\varepsilon_\lambda = \frac{\lambda_e - \lambda}{\lambda} 100\% \text{ y } \lambda_e \text{ son los valores de } \lambda \text{ con el error indicado.}$$

En la Tabla 4 y Tabla 5 se presentan los resultados obtenidos con el MADF a partir de valores de  $\lambda_n$  determinados por el método de elementos finitos y en forma experimental respectivamente.



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

Tabla 3: Análisis de sensibilidad del MADF con optimización cuando hay un error en la determinación de los primeros seis valores de  $\lambda$  para una viga con  $c = 0.25$  y  $\eta = 0.5$

Caso	$\varepsilon_\lambda$	$\lambda_{e1}$	$\lambda_{e2}$	$\lambda_{e3}$	$\lambda_{e4}$	$\lambda_{e5}$	$\lambda_{e6}$	$c$	$\eta$	$\varepsilon_c$	$\varepsilon_\eta$
50	-10%	2.42035717	4.81632684	8.07450067	11.30973355	13.31818337	15.88764068	0.2130	0.8362	14.80	67.25
51	-7%	2.50103575	4.97687106	8.34365069	11.68672467	13.76212282	16.41722871	0.2290	0.7035	8.40	40.71
52	-5%	2.55482146	5.08390055	8.52308404	11.93805208	14.05808245	16.77028739	0.2360	0.6361	5.60	27.22
53	-4%	2.58171432	5.13741529	8.61280071	12.06371579	14.20606227	16.94681673	0.2400	0.2976	4.00	40.49
54	-3%	2.60860718	5.19093003	8.70251739	12.18937950	14.35404208	17.12334607	0.2440	0.5753	2.40	15.06
55	-2%	2.63550003	5.24444478	8.79223406	12.31504320	14.50202190	17.29987541	0.2520	0.2976	0.80	40.49
56	-1%	2.66239289	5.29795952	8.88195073	12.44070691	14.65000171	17.47640475	0.2310	0.8072	7.60	61.44
57	0	2.68928575	5.35147426	8.97166741	12.56637061	14.79798153	17.65293409	0.2500	0.5000	0.00	0.00
58	1%	2.71617861	5.40498900	9.06138408	12.69203432	14.94596134	17.82946343	0.2530	0.5012	1.20	0.24
59	2%	2.74307146	5.45850375	9.15110076	12.81769803	15.09394116	18.00599278	0.2560	0.2976	2.40	40.49
60	3%	2.76996432	5.51201849	9.24081743	12.94336173	15.24192097	18.18252212	0.2610	0.3137	4.40	37.27
61	4%	2.79685718	5.56553323	9.33053411	13.06902544	15.38990079	18.35905146	0.3580	0.2976	43.20	40.49
62	5%	2.82375003	5.61904797	9.42025078	13.19468915	15.53788060	18.53558080	0.3450	0.3709	38.00	25.83
63	7%	2.87753575	5.72607746	9.59968413	13.44601656	15.83384023	18.88863948	0.1760	0.3800	29.60	23.99
64	10%	2.95821432	5.88662169	9.86883415	13.82300768	16.27777968	19.41822750	0.3620	0.2976	44.80	40.49

Tabla 4: Primeros seis valores de  $\lambda$  obtenidos con el Método Elementos Finitos para vigas E-E con diferentes valores de  $c$  y  $\eta$ , y los correspondientes valores de  $c$ ,  $\eta$ ,  $\varepsilon_c$  y  $\varepsilon_\eta$  obtenidos con el MADF propuesto.

Caso	Método Elementos Finitos								MADF			
	$c$	$\eta$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$c$	$\eta$	$\varepsilon_c$	$\varepsilon_\eta$
40	0.099	0.305	4.709	7.840	10.973	14.069	17.124	20.150	0.110	0.121	1.15E+01	6.01E+01
41	0.197	0.266	4.717	7.812	10.890	13.984	17.106	20.189	0.160	0.135	1.89E+01	4.92E+01
42	0.295	0.296	4.723	7.791	10.934	14.063	17.056	20.129	0.290	0.115	1.59E+00	6.12E+01
43	0.400	0.403	4.690	7.788	10.927	13.882	17.152	20.016	0.390	0.150	2.50E+00	6.27E+01
44	0.500	0.296	4.701	7.840	10.880	14.067	17.036	20.224	0.450	0.104	1.00E+01	6.48E+01

Tabla 5: Primeros seis valores de  $\lambda$  obtenidos experimentalmente para vigas E-E con diferentes valores de  $c$  y  $\eta$ , y los correspondientes valores de  $c$ ,  $\eta$ ,  $\varepsilon_c$  y  $\varepsilon_\eta$  obtenidos con el MADF propuesto.

Caso	Experimentalmente								MADF			
	$c$	$\eta$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$c$	$\eta$	$\varepsilon_c$	$\varepsilon_\eta$
45	0.099	0.305	4.735	7.787	10.881	13.886	16.816	20.051	0.090	0.348	8.74E+00	1.43E+01
46	0.197	0.266	4.708	7.726	10.770	13.758	16.748	20.142	0.160	0.231	1.89E+01	1.33E+01
47	0.295	0.296	4.742	7.738	10.876	13.894	16.950	20.103	0.290	0.190	1.59E+00	3.57E+01
48	0.400	0.403	4.646	7.637	10.704	13.542	16.628	19.735	0.140	0.363	6.50E+01	9.94E+00
49	0.500	0.296	4.627	7.660	10.635	13.691	16.509	19.854	0.140	0.354	7.20E+01	1.95E+01



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

# FoDAMI

En la Figura 5 se presentan los valores de  $\varepsilon_\eta$  presentados en la Tabla. 1

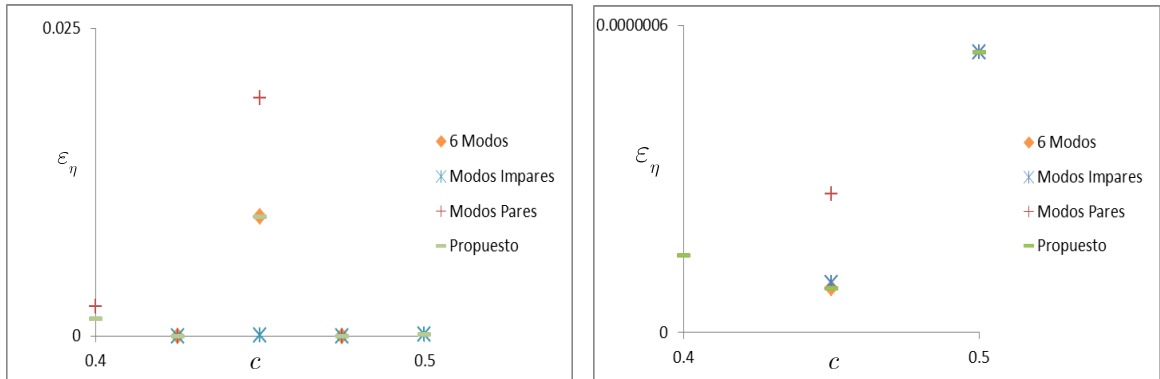


Figura 5: a) Izq:  $\varepsilon_\eta$  vs  $c$  para  $\eta = 0.99$  b) Der:  $\varepsilon_\eta$  vs  $c$  para  $\eta = 0.75$

En la Figura 6a se muestran los resultados presentados en la Tabla 2. En la Figura 6b y en la Figura 7a se presentan los valores de  $\bar{\varepsilon}_\eta$  que es el promedio el  $\varepsilon_\eta$  para los distintos casos de la Tabla 2 agrupados según tengan el mismo valor de  $c$  o de  $\eta$ .

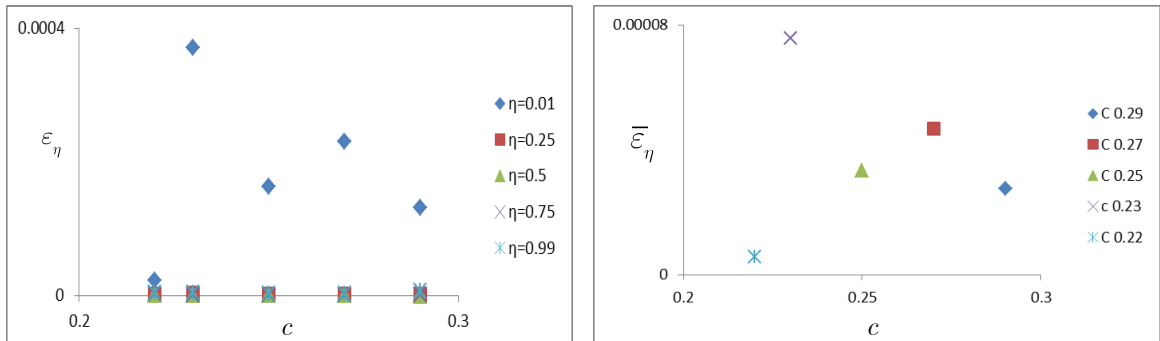


Figura 6: a) Izq:  $\varepsilon_\eta$  vs  $c$ . b) Der:  $\bar{\varepsilon}_\eta$  vs  $c$



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

En la gráfica de la Figura 7b se comparan el  $\varepsilon_c$  según el error en la determinación de  $\lambda$  para los datos presentados en la Tabla 3.

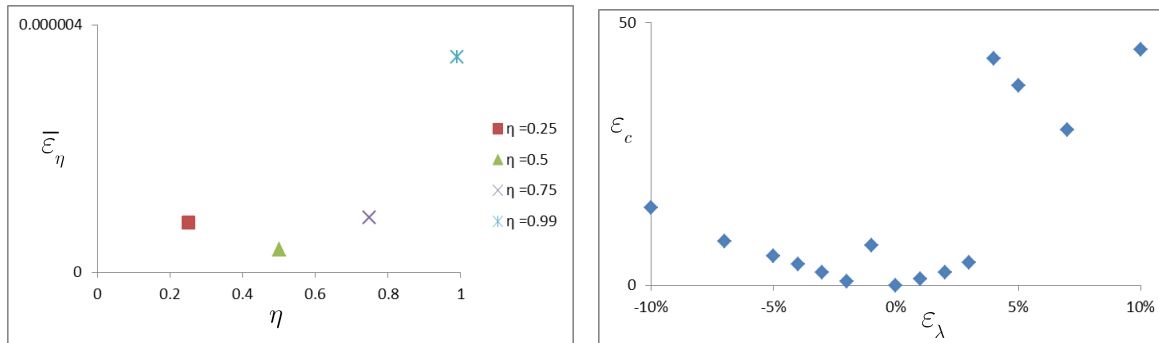


Figura 7: a) Izq:  $\bar{\varepsilon}_\eta$  vs  $c$  b) Der: promedio  $\varepsilon_c$  vs  $\varepsilon_\lambda$

Si bien algunos de los resultados crean dispersión se puede observar, como es de esperar, que a medida que crece el error en la determinación de  $\lambda$ , lo hace el error en la determinación de  $c$ .

## 4 CONCLUSIONES.

Se propuso un método analítico de detección de fisura (MADF) a partir de la ecuación de frecuencias obtenida del problema de contorno de una viga Euler-Bernoulli con restricciones elásticas generales en los extremos y en puntos intermedios. El MADF fue optimizado con herramientas estadísticas y analíticas y se verificó su funcionalidad en un estudio paramétrico para el caso en que la fisura se encuentra ubicada alrededor de puntos de inflexión o nodos de las diferentes formas modales de la viga con fisura. Además se realizó un análisis de sensibilidad que consiste en variar los valores exactos de las frecuencias naturales para observar la respuesta del MADF.

Se presentaron resultados de la posición y profundidad de fisura obtenidas con el MADF a partir de los valores de frecuencias naturales obtenidas con mediciones experimentales, con el programa Abaqus y con la solución exacta.



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

## 5. REFERENCIAS

- [1] Javier L. Raffo, Marcos R. Carrizo, XX Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF 2013), Vibraciones de vigas y pórticos ante la presencia de fisuras. Implementación del problema inverso, Mecánica Computacional Vol XXXII págs. 1715-1735, Mendoza, 2013.
- [2] S. P. Lele, S. K. Maiti, Journal of Sound and Vibration, modelling of transverse vibration of short beams for crack detection and measurement of crack extension, 2002.
- [3] H. P. Lin, S. C. Chang and J. D. Wu, Journal of Sound and Vibration, Beam vibrations with an arbitrary number of cracks, 2002.
- [4] N. Khaji, M. Shafiei, M. Jalalpour, International Journal of Mechanical Sciences, Closed-form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions, 2009.
- [5] Ricardo Oscar Grossi - María Virginia Quintana, Journal of Sound and Vibration, The transition conditions in the dynamics of elastically restrained beams, 2008.
- [6] Ostachowicz y Krawczuk, Journal of Sound and Vibration, Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam, 1991.