IV CAIM 2014
Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina
FORO DOCENTE DEL AREA MECANICA DE LAS INGENIERIAS
FoDAMI

DESARROLLO DE SOFTWARE PARA LA RESOLUCIÓN DEL MÉTODO DE LA RIGIDEZ EN INGENIERÍA MECÁNICA

Sr. Jeremías Jalil[1*], Sr. Lucas Stratta[2], Tutor: Ing. Carlos Tais[3],

Departamento de Ingeniería Mecánica
Facultad Regional Villa María. Universidad Tecnológica Nacional
Avda. Universidad 450, (5900) Villa María, Córdoba
E-mail: mecanica@frvm.utn.edu.ar, web: www.frvm.utn.edu.ar
[1*] jjejalil@gmail.com
[2] lucasstratta89@gmail.com
[3] carlos.e.tais@gmail.com

RESUMEN

En este trabajo se presenta la metodología utilizada para el desarrollo e implementación de un software con características didácticas utilizado en la enseñanza del Método de la Rigidez. El programa es desarrollado en MATLAB y posee capacidad para la resolución de estructuras de barras (reticulados y pórticos). Además posee una interfaz gráfica amigable que facilita la carga de datos y evaluación de resultados, que permite la interacción con el usuario en las distintas etapas que implica este método. Los resultados del programa desarrollado en este trabajo fueron verificados con software comercial, mostrando buena precisión. Se concluye que este software educativo es una herramienta valiosa para el dictado de materias relacionadas con el análisis estructural en los cursos intermedios de la carrera de ingeniería mecánica..

Palabras claves: *Análisis matricial de estructuras, métodos numéricos, verificación estructural, método de la rigidez, software didáctico.*

1. INTRODUCCIÓN

El Método de la Rigidez, también llamado Método de los Desplazamientos, consiste en la determinación de corrimientos de los nudos y esfuerzos en las barras de una estructura de barras.
Se basa en un análisis matricial y puede usarse en estructuras estáticamente determinadas o indeterminadas tanto planas como tridimensionales.
La aplicación del Método de la Rigidez requiere subdividir la estructura en una serie de elementos (BARRAS) e identificar sus puntos extremos (NUDOS). Se determinan las propiedades de fuerza y desplazamiento de cada elemento. Luego, éstas se relacionan entre sí mediante las ecuaciones de equilibrio planteado a los nudos [1].
Estas relaciones se agrupan en la matriz de rigidez [K] de la estructura. Una vez establecidas, los corrimientos desconocidos de los nudos, pueden determinarse para cualquier estado de carga sobre la estructura. Cuando se conocen esos desplazamientos, los esfuerzos internos de cada barra pueden determinarse mediante las ecuaciones de fuerza movimiento para cada miembro.
Los grados de libertad no restringidos representan las incógnitas principales en el Método de la Rigidez, en el caso de reticulados planos a nudos rígidos, cada nudo posee tres grados de libertad o sea dos desplazamientos y un giro, es de destacar que para el caso de los reticulados a nudo articulado, todos los giros son nulos, por lo que quedan solo dos grados de libertad a considerar. En una estructura hay que distinguir que hay grados de libertad restringidos o conocidos, y grados de libertad no restringidos o incógnitas.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Matriz de rigidez global de una barra a nudos articulados

La matriz de rigidez global [k] de una barra de reticulado plano, con cualquier dirección, propiedades geométricas y materiales ya definidas responde a [2]:

$$[\mathrm{k}] = [\mathrm{T^T}][\mathrm{k'}][\mathrm{T}] \tag{1}$$

Donde [T] es la matriz de transformación, que transforma los desplazamientos globales de cada barra en desplazamientos locales. La matriz [k'] es la matriz de rigidez de la barra y es de la misma forma para cada una en la estructura. Los cuatro elementos que la conforman se denominan coeficientes de influencia de rigidez de la barra [k]ij. Físicamente, representan la fuerza en el nudo i cuando se impone un desplazamiento unitario solo en el nudo j. Desarrollando la (1):

$$[\mathrm{k}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

2.2. Matriz de rigidez de la estructura

Una vez que todas las matrices de rigidez de miembro se han expresado en coordenadas globales, resulta necesario ensamblarlas en el orden apropiado para poder encontrar la matriz de rigidez [K] de la estructura (2). La matriz de rigidez tendrá dimensiones igual al número de grados de libertad total para la estructura.

Para el ensamblado de la matriz de rigidez de la estructura, se le designan números, correspondiente a los nudos iniciales y finales de la barra, a las filas y columnas a la (2), desarrollándola matricialmente y numerándola queda de la siguiente manera:

$$[\mathrm{k}] = \frac{AE}{L} \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{Nix} & \boldsymbol{Niy} & \boldsymbol{Nfx} & \boldsymbol{Nfy} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \lambda_1{}^2 & \lambda_1\lambda_2 & -\lambda_2{}^2 & -\lambda_1\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_2 & \lambda_2{}^2 & -\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_2{}^2 \\ -\lambda_2{}^2 & -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1{}^2 & \lambda_1\lambda_2 \\ -\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_2{}^2 & \lambda_1\lambda_2 & \lambda_2{}^2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{Nix} \\ \boldsymbol{Niy} \\ \boldsymbol{Nfx} \\ \boldsymbol{Nfy} \end{array} \end{array} \tag{3}$$

Cuando se ensamblan las matrices [k], se coloca en su misma designación de fila y columna en la matriz [K]. Cuando dos o más barras comparten un mismo nudo, algunos elementos de cada una de las matrices [k] se le asignara la misma posición dentro de la matriz [K], cuando sucede esto, dichos elementos deben sumarse entre sí algebraicamente para obtener la rigidez global en cada nudo.

2.3. Método de resolución

Una vez que se ha formado la matriz de rigidez de la estructura, podemos usarla para determinar los desplazamientos de los nudos, las reacciones externas y las fuerzas internas en los miembros, utilizando la expresión:

$$\mathrm{Q} = \mathrm{KD} \tag{4}$$

Donde {Q}, es el vector de cargas y {D}, el vector de desplazamientos.

Armando la matriz (4), la determinación de los desplazamientos se lleva al cabo, haciendo el producto de la inversa de la matriz [K] por el vector de cargas {Q} quedando:

$$\begin{bmatrix} D_u \\ \cdots \\ D_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ \cdots & \cdots \\ K_{21} & K_{12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_k \\ \cdots \\ Q_u \end{bmatrix} \tag{5}$$

De esta ecuación podemos obtener una solución directa para todos los desplazamientos desconocidos de la estructura.

2.4. Matriz de rigidez global para reticulados a nudos rígidos y pórticos

De igual manera que para el caso de reticulados a nudo articulado, la matriz general responde a la expresión (1), dando como resultado:

$$
k = \begin{array}{cccccc}
Ni_x & Ni_y & Ni_z & Nf_x & Nf_y & Ni_z \\
\end{array}
$$

$$
k = \begin{bmatrix}
\left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2} \\
\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & -\frac{6EI}{L^2} & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x \\
-\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{2EI}{L} \\
-\left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \frac{6EI}{L^2} & \left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \frac{6EI}{L^2} \quad \lambda_y \\
-\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x \\
-\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{4EI}{L}
\end{bmatrix} \qquad (6)
$$

La matriz de 6 x 6 es simétrica. La posición de cada elemento está localizada por los números de código del nudo inicial y final que se muestran en la parte superior y lateral de la matriz.

2.5. Matriz de rigidez de la estructura

Una vez que se han encontrado todas las matrices de rigidez de los miembros, se procede al armado de la matriz de rigidez de la estructura completa. El orden de la matriz [K] es igual al número de nudos de la estructura y para el ensamblado, en cada posición de la matriz deben colocarse los elementos de la barra que tengan el mismo número de posición que la matriz general, y las barras que posean los mismos números de posición deben sumarse algebraicamente en la matriz general. Con la matriz general se procede de la misma forma que en el caso de reticulados a nudos articulados, teniendo en cuenta que cada nudo tiene tres grados de libertad (dos corrimientos y un giro) que representan las incógnitas del problema. Una vez encontrados estos se pueden determinar los esfuerzos característicos de cada barra.

3. DESARROLLO DEL SOFTWARE

3.1 Lenguaje de programación

El lenguaje de programación MATLAB [3] es útil para la programación del Método de la Rigidez, debido al hecho de que permite una gran agilidad de programación y posee una amplia biblioteca de funciones matemáticas y algebraicas predefinidas, lo que permite que la programación se centre en resolver el método, y no a desarrollar funciones de cálculo numérico [4]. Un simple programa de dos dimensiones para el cálculo de un reticulado solo necesita unos cuantos cientos de líneas de código en MATLAB, mientras que en otras interfaces como C++, Visual Basic, o Fortran, podrían requerir unas cuantas miles.

El programa desarrollado, denominado MRig, cuenta con tres bloques principales: el primero es el código que calcula los reticulados a nudo articulado. El segundo es el código que calcula reticulados a nudo rígido y pórticos, y por último el tercero es la interfaz grafica. Los dos primeros bloques consisten en líneas de pseudocódigo que respetan la siguiente estructura:

- Ingreso de datos.
- Calculo de rigidez.
- Armado de matriz de rigidez de cada barra.
- Armado de matriz de desplazamientos y fuerzas conocidos.
- Ensamblado de matriz general.
- Generación de la matriz condensada.
- Calculo de los corrimientos.
- Calculo de las reacciones en los vínculos.

- Calculo de las tenciones y esfuerzos en cada barra.
- Exposición de resultados.
- Graficación de la estructura, deformación (en el caso de los reticulados a nudo articulado), fuerzas, reacciones, y momentos (en caso de pórticos y reticulados de nudo rígido).

El tercer bloque, la interfaz grafica [5], solo tiene el objetivo de facilitar al usuario el ingreso de los datos, y una cómoda visualización de los resultados.

1. Ventana de inicio: mostrada en la Figura 1, donde se muestran las dos opciones de cálculo, la de reticulados a nudo articulado, de pórtico y reticulados a nudo rígido.

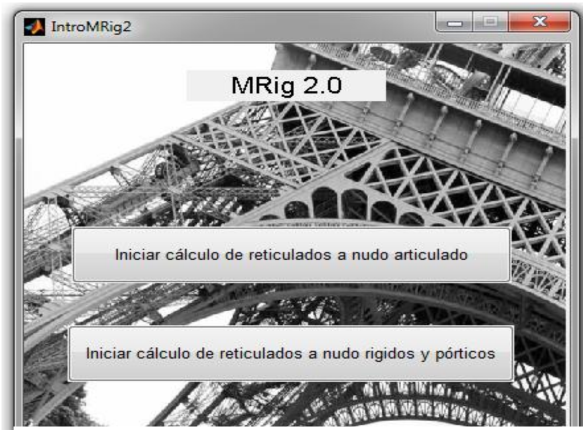


Figura 1. Ventana de inicio, programa MRig

2. Ventana de resultados: mostrada en la Figura 2 y 3, donde se muestran los resultados del cálculo, y el grafico que representa la estructura. Desde esta ventana se pueden acceder a las diferentes opciones de ingreso de datos y a la visualización de la matriz general de rigidez.

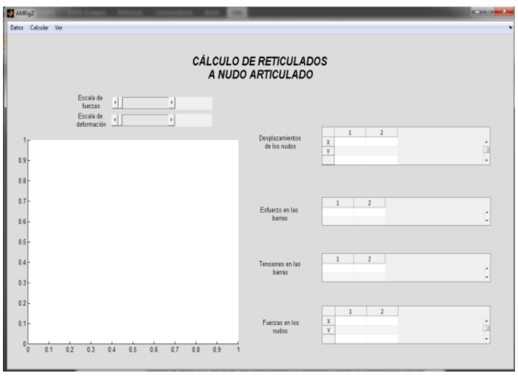


Figura 2. Ventana de resultados para el cálculo de reticulados a nudo articulado.

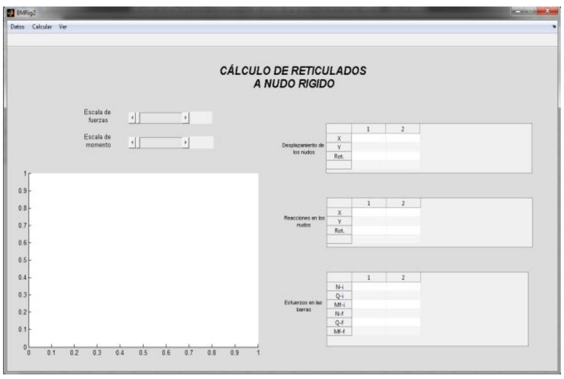


Figura 3. Ventana de resultados para el cálculo de pórticos, y reticulados a nudo rígido.

3. Ingreso de datos: representadas en la Figura 4 y 5. Esta sección se accede a través del menú Datos-Ingresar Nuevos, dentro de la ventana de resultados. Acá es donde se introducen las condiciones iniciales del cálculo. El ingreso de datos es a través de una tabla similar a la generada cuando se comienza un cálculo manual, logrando que el llenado de las tablas sea intuitivo. También es posible generar archivos en formato texto, en donde se graban los valores introducidos en las tablas. Esta posibilidad es importante si se quiere guardar el ejercicio para un posterior cálculo, o revisión.

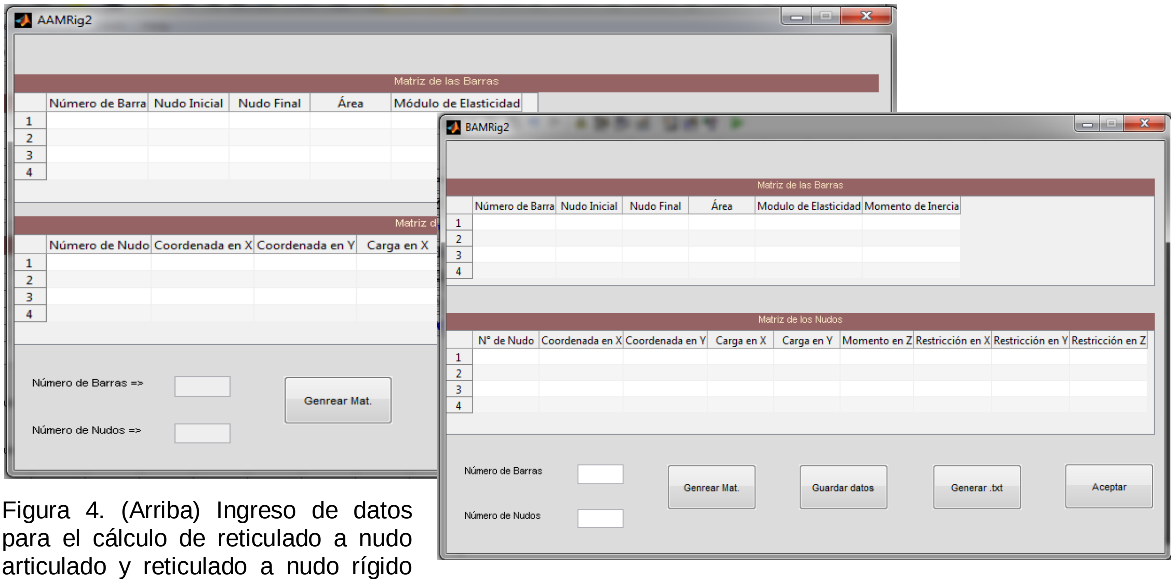
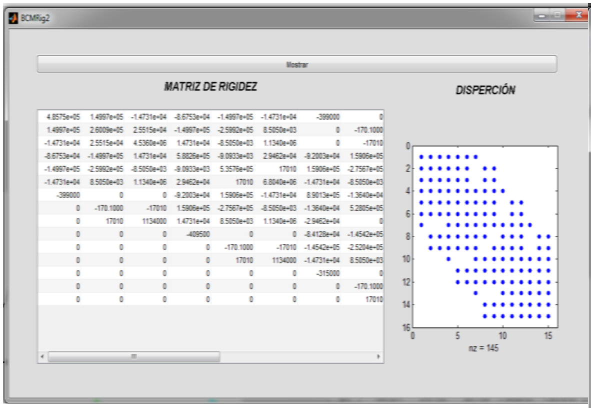


Figura 4. (Arriba) Ingreso de datos para el cálculo de reticulado a nudo articulado y reticulado a nudo rígido (Derecha)

4. Matriz de rigidez: esta ventana, mostrada en la Figura 5, muestra la matriz general de rigidez de la estructura, y la distribución de ésta.

5. Graficación de esfuerzos: En esta sección, solo disponible en el cálculo de reticulados a nudos rígidos y pórticos, se grafican los esfuerzos de flexión, normales y de corte actuante en la barra. Esta ventana se muestra en la Figura 5**.**



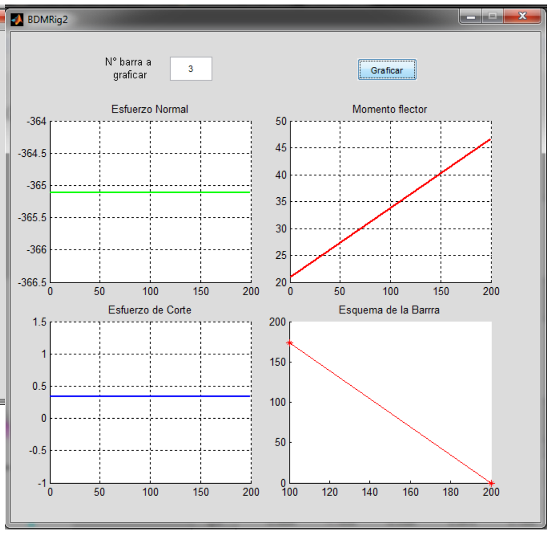


Figura 5. (Arriba) Ventana en donde se muestra la matriz de rigidez de la estructura. Ventana de graficación de esfuerzos. (Derecha)

4. RESULTADOS

Para verificar los resultados que presenta el programa desarrollado se compararon los resultados con otro software comercial.
La comparación consistió en la resolución con MRig de un problema de reticulado a nudo articulado y uno de reticulado a nudo rígido, comparando con los resultados obtenidos mediante el software Analysis for Windows [6] para los mismos problemas.
Se obtuvieron las siguientes discrepancias: Mrig difieren en un 5.58% para el cálculo del reticulado a nudos articulado y del 2.56% para el de nudos rígidos.

5. CONCLUSIONES

El empleo del enfoque matricial presenta dos ventajas en el cálculo de estructuras.
Desde el punto de vista teórico, permite utilizar métodos generales de cálculo en forma compacta, precisa que determina una base muy conveniente y ordenada para el desarrollo de programas de computación.
Con el avanzado desarrollo computacional en los últimos años, combinados con los resultados de las estudios del análisis matricial de estructuras, hoy se hace posible la realización de este trabajo en donde se expuso un software didáctico para el cálculo de estructuras plana mediante el uso del método de la rigidez que permite la complementación teórica del tema durante su exposición.

REFERENCIAS

[1] Hibbeler R. C., Structural Analysis 7Ed., Pearson Prentice Hall , (2009).
[2] Cervera Ruiz M., Blanco Diaz E., Mecánica de estructuras. Métodos de análisis., Ediciones UPC, vol 2. (2004).
[3] MathWorks Inc., MATLAB User Guide, MathWorks. (2010).
[4] Yang W. Y., Cao W., Chung T. S. y Morris J., Applied Numerical Methods Using MATLAB, John Wiley & Sons. (2005).
[5] MathWorks Inc., MATLAB GUIDE Graphical User Interface Development Environment, MathWorks. (2010).
[6] http://www.cuylaerts.net/., Analysis for Windows, (2011).