



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

VIBRACIONES NATURALES DE ENTRAMADOS ARBITRARIOS POR MEDIO DE SERIES DE POTENCIAS

Héctor D. Martín^{*1}, Carlos P. Filipich², María A. De Rosa³ y Mario J. Maurizi⁴

^{*1}GRUDIM - Facultad Regional Reconquista de la UTN. Calle 44 n° 1000, (3560) Reconquista, Santa Fe, Argentina.

correo-e: hmartin@frq.utn.edu.ar, hectordmartin@gmail.com

²Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. Centro de Investigación de Mecánica Teórica y Aplicada, Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional, 11 de abril 461, B8000LMI Bahía Blanca.

³Faculty of Engineering, Department of Structural Engineering, (DiSGG). Viale dell'Ateneo Lucano, 10, 85100, Potenza, Italy.

⁴Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Dto. de Ingeniería UNS, Bahía Blanca (8000), Argentina.

RESUMEN

En el presente trabajo se utilizan desarrollos de series de potencias enteras para el cálculo de sistemas cerrados apertados planos. Se propone, para las formas modales correspondientes a cada frecuencia natural, una serie de potencias enteras para los corrimientos transversales y axiales de las barras constitutivas del entramado. Se aborda el planteo de la ecuación característica, que proviene de las condiciones de continuidad en algunos nodos y vínculos, de donde surgen las frecuencias naturales buscadas o autovalores.

Las series de potencias corresponden a los desarrollos de las funciones trascendentes que el problema involucra; para el cálculo práctico se utilizan polinomios de orden finito. El aporte fundamental, que los autores desarrollaron exhaustivamente en pórticos abiertos, consiste en que el determinante que debe anularse es de orden mucho menor que el número de coeficientes de los polinomios aludidos. Esto se obtiene haciendo uso de las condiciones de continuidad geométricas y de equilibrio en los nudos en los cuales, en general, concurre cualquier número de barras. Mayor es la economía computacional respecto de los divulgados programas de elementos finitos, donde polinomios cúbicos y lineales para los corrimientos transversal y axial respectivamente se adjudican a una partición importante de cada barra lo que genera un aumento considerable del número de incógnitas. Se resuelven varios problemas y se comparan los resultados obtenidos con las metodologías de elementos finitos

Palabras Claves: Series de Potencias, Vibraciones Naturales, Entramados Planos.



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

1. INTRODUCCIÓN

Dentro de las ingenierías que utilizan los denominados entramados de barras, se utilizan desde hace varias décadas los programas de rigidez, que implican la adopción de incógnitas cinemáticas en la unión de barras que cambian su dirección, facilitando así la resolución del problema de varias barras concurriendo a un nodo.

En el presente trabajo se muestra un método que ayuda a calcular vibraciones naturales de sistemas cerrados aporticados planos utilizando series de potencias enteras. En el mismo se impone la automaticidad de las condiciones geométricas de continuidad y del equilibrio de esfuerzos característicos en los nodos, en los cuales acceden dos o más barras.

La metodología básica consiste en, conocidas las formas de los corrimientos axiales y flexionales, hallar la respuesta para cualquiera de los problemas previamente consignados, ya sea mediante la resolución de las ecuaciones diferenciales gobernantes o bien por una propuesta analítica en series de potencias enteras. Con este fin se plantean las condiciones esenciales o geométricas para todas las barras que concurren a un nodo, y el equilibrio del mismo.

El artificio que simplifica la metodología a desarrollar es que cada barra tiene una respuesta en función de constantes arbitrarias de integración que permite, evidentemente, determinarlas bajo condiciones arbitrarias de vinculación (denominadas comúnmente como elásticas) y que van surgiendo consecutivamente al movernos en alguna secuencia sobre los nodos que conforman el entramado que nos ocupa. Esto conduce a que solamente se tendrán incógnitas desconocidas en un número relativamente bajo, sea el problema homogéneo o no. Este número de incógnitas depende, por un lado de los grados de vinculación a tierra que nuestro pórtico bajo estudio contiene y por otro lado de la cantidad de barras que concurren a cada nodo, esto es, si son solo 2 barras concurrentes, la cantidad de incógnitas no aumenta, si son más de 2 se adicionan 3 incógnitas por cada barra que se agrega.

2. DESCRIPCIÓN

El problema de vibraciones naturales de pórticos es de tipo lineal y para resolverlo, habitualmente se divide cada tramo en elementos con aproximación algebraica. Con el fin de obtener mayor precisión, normalmente se aumenta el número de elementos y consecuentemente el número de incógnitas. El uso de series de potencias para simular la forma modal de cada tramo sin aproximaciones, es decir con precisión arbitraria, tiene la ventaja que sólo exige en nodos de tramos consecutivos la continuidad estática y geométrica [2].



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERIA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

Al aplicar las condiciones de transferencia, de alguna manera, se van resolviendo las distintas barras en un circuito seleccionado. Entonces se produce una economía de manipulación algebraica y correspondientemente una economía de tiempo computacional.

Para el estudio energético se considera en cada barra j un sistema de coordenadas local x_j en donde cada punto, al vibrar, tendrá un desplazamiento transversal $v_j(x_j)$ y un desplazamiento axial $u_j(x_j)$, como se muestra en la Figura 1

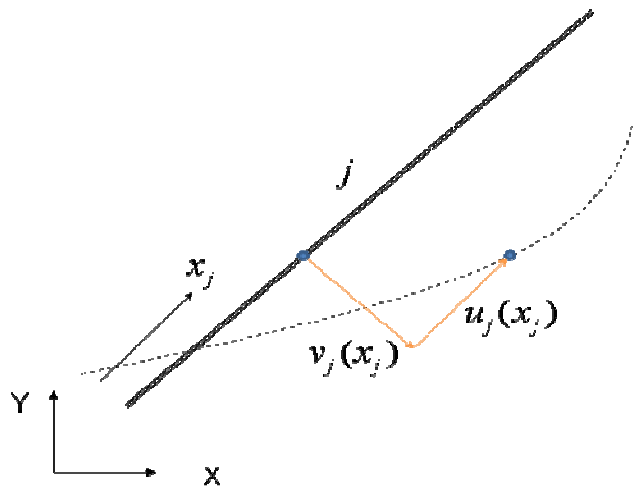


Figura 1: Desplazamientos y coordenadas locales de cada barra j

En cada barra del entramado se colocan coordenadas locales como se indica en la Figura 1. Las ecuaciones diferenciales gobernantes del problema dinámico son las siguientes:

$$v_j''''(\xi_j) - \Omega_j^2 v_j(\xi_j) = 0 \quad (1)$$

$$u_j''(\xi_j) + \left(\frac{\Omega_j}{\lambda_j}\right)^2 u_j(\xi_j) = 0 \quad (2)$$

Las ecuaciones 1 y 2 están expresadas en coordenadas adimensionales, donde se ha utilizado el siguiente cambio de variables:

$$0 \leq x_j \leq a_j \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{x_j}{a_j} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \xi_j = \frac{x_j}{a_j} \quad (3)$$



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

En las expresiones anteriores, a_j es la longitud de la barra j , además se cumplen las siguientes relaciones:

$$\Omega_j^2 = \frac{\rho_j F_j}{E_j J_j} \omega^2 a_j^4 \quad y \quad \lambda_j^2 = \frac{F_j a_j^2}{J_j} \quad (4a, b)$$

En donde:

E_j Módulo de Young de la barra j

ρ_j Densidad de la barra j

F_j Área de la barra j

J_j Momento de Inercia de la barra j

ω Frecuencia de vibración de todo el pórtico

3. DESARROLLO EN SERIES DE POTENCIAS

Se propone, para la solución de las ecuaciones diferenciales (1, 2), un desarrollo en series de potencias para las funciones desconocidas de los desplazamientos transversales y axiales de cada barra, con las siguientes expresiones:

$$v_j(\xi_j) = \sum_{i=0}^m A_{j,i} \xi_j^i \quad u_j(\xi_j) = \sum_{i=0}^m B_{j,i} \xi_j^i \quad (5a, b)$$

Con esto se logran las ecuaciones de recurrencia que se transcriben a continuación, ecuaciones 6 a y b, en las que se observa que los coeficientes de los desplazamientos transversales independientes son solo los 4 primeros, y los axiales son solo los 2 primeros.

$$A_{j,i+4} = \frac{\Omega_j^2 A_{j,i}}{\varphi_{4,i}} \quad B_{j,i+2} = - \left(\frac{\Omega_j}{\lambda_j} \right)^2 \frac{B_{j,i}}{\varphi_{2,i}} \quad (6a, b)$$

En las cuales:

$$\varphi_{k,i} = (i+k)!/k! \quad (7)$$

De esta manera, en cada barra hay solamente 6 incógnitas. Luego, en cada nodo donde concurren más de una barra se debe escribir las condiciones de continuidad geométrica y condiciones de equilibrio, que provee relaciones entre los coeficientes de barras desconocidas en función con los de barras conocidas. En situaciones donde se arriba a un nodo en donde hay más de una barra



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECÁNICA
DE LAS
INGENIERÍAS

FoDAMI

conocida es necesario plantear las Ecuaciones de Compatibilidad Geométricas y las Ecuaciones de Equilibrio con las barras que se conocen sus coeficientes en el desarrollo en series.

4. RESULTADOS OBTENIDOS

Se concreta un programa utilizando el software de Matemática Simbólica Mathematica [5], que automatiza la resolución de entramados generales, con cualquier número de barras, nodos y vínculos, incluso con vínculos a los cuales acceden más de una barra, con respuesta de frecuencias naturales. Los vínculos pueden ser también elásticos y colocados en forma inclinada. Se ha contemplado también la existencia de barras articuladas interiormente al entramado. Los resultados obtenidos se comparan con los reportados en la bibliografía o por programas comerciales de resolución por el Método de Elementos Finitos. En la resolución con MEF se utilizaron dos programas, uno de ellos elaborado por la Dra. Maria Anna De Rosa [7], el otro es el programa comercial Algor [6]. Se adoptan todas las barras de sección uniforme $F=0,12 \text{ m}^2$, Módulo de Elasticidad $E=2,1.1011 \text{ N/m}^2$, peso específico 7850 Kg/m^3 y momento de inercia para todas las barras $J= 0,0036 \text{ m}^4$. Las longitudes de las barras se toman en metros con las coordenadas indicadas en las figuras correspondientes a cada ejemplo presentado.

4.1. Análisis de un pórtico con 6 barras

Se trata de un pórtico de 6 barras vinculado en los nodos 1 y 6, como se indica en la Figura 2. El mismo se lo resuelve con dos situaciones de vínculo, doblemente articulado y doblemente empotrado. Los resultados obtenidos para los valores de las frecuencias naturales se muestran en las tablas 1 y 2. Las formas modales se pueden ver en las Figuras 3 y 4.



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERIA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

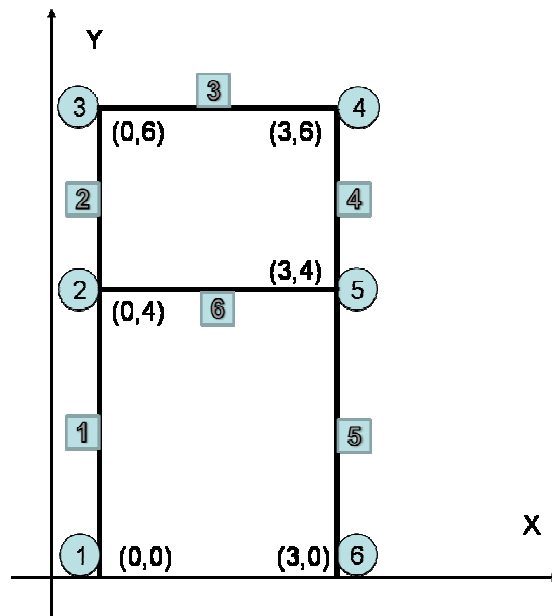


Figura 2: Pórtico analizado con 6 barras y 6 nodos. Los vínculos se encuentran ubicados en los nodos 1 y 6.

4.1.1 Pórtico de 6 barras biarticulado



Figura 3: Primeras 3 formas modales del pórtico biarticulado, obtenidas utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [6].



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECÁNICA
DE LAS
INGENIERÍAS

FoDAMI

Tabla 1: Resultados obtenidos al analizar el pórtico biarticulado con Series se Potencias de grados 10, 20 y 25, comparados con los obtenidos utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [6] y en el Programa de Elementos finitos desarrollado por Anna De Rosa [7].

Modo	Series de Potencias			Algor [6]	MEF A. De Rosa [7]
	10	20	25		
1	61.750	61.751	61.751	61.750	61.751
2	506.204	510.830	510.830	510.556	510.932
3	675.240	708.221	708.221	708.241	708.511
4	896.686	913.613	913.613	914.015	913.972
5	1041.070	1040.360	1040.360	1039.960	1041.220
6	1243.670	1240.330	1240.330	1239.920	1241.590

4.1.2 Pórtico de 6 barras bi-empotrado



Figura 4: Primeras 3 formas modales del pórtico empotrado -empotrado, obtenidas utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [6].

Tabla 2: Resultados obtenidos al analizar el pórtico Empotrado - Empotrado con Series se Potencias de grados 10, 15, 20 y 25, comparados con los obtenidos utilizando 10 elem. por barra en el Software Algor [6].

Modo	Series de Potencias				Algor [6]
	10	15	20	25	
1	124.015	124.030	124.03	124.03	124.002
2	592.200	603.611	603.609	603.609	603.581
3	879.876	906.325	906.305	906.305	906.620
4	920.177	1006.790	1006.7	1006.7	1006.810
5	1225.700	1234.400	1234.58	1234.58	1233.550
6	2377.430	1339.590	1340.72	1340.72	



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERIA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

4.2. Análisis de un pórtico con 11 barras

Se trata de un pórtico de 11 barras vinculado a tierra en los nodos 1 y 9, con articulaciones simples, como se indica en la Figura 5. Posee además barras interiores articuladas al entramado, como lo son la barra 11 (articulada al nodo 6) y la barra 10 (articulada al nodo 2). Los resultados obtenidos para los valores de las frecuencias naturales se muestran en la tabla 3. Las 3 primeras formas modales se visualizan en la figura 5.

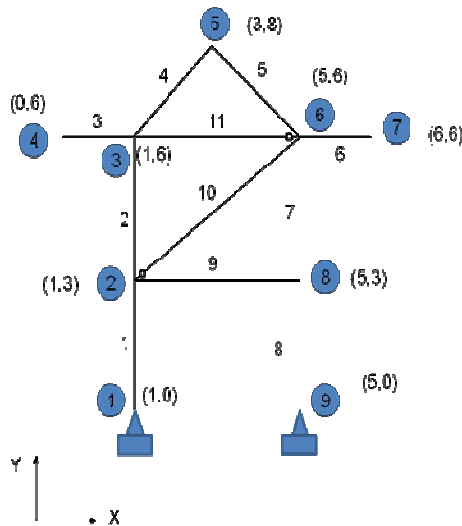


Figura 5: Entamado de 11 barras con dos articulaciones internas en la barra 10 en el nodo 2 y la barra 11 en el nodo 6. Con articulaciones a tierra en los nodos 1 y 9

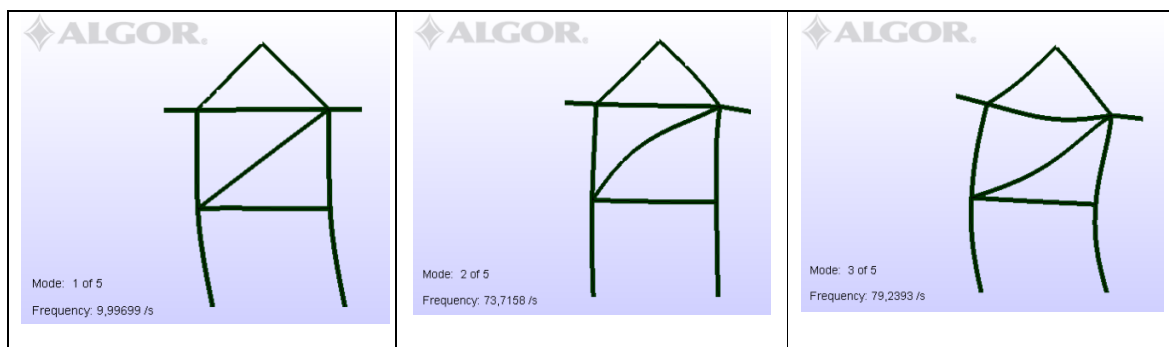


Figura 6: Formas modales correspondientes a las tres primeras frecuencias del pórtico doblemente articulado, con dos barras interiores articuladas al entramado, obtenidas utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [6].



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERIA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

Tabla 3: Resultados obtenidos al analizar el pórtico de la Figura 5, con articulaciones internas y potencias de orden 30; comparados con los obtenidos utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [6].

Modo	Series de Potencias	Algor [6]
	30	
1	62.8126	62.8129407
2	463.083	463.170031
3	498.215	497.875206
4	630.807	630.580477
5	766.089	765.851174

4.3. Análisis de un pórtico con 18 barras

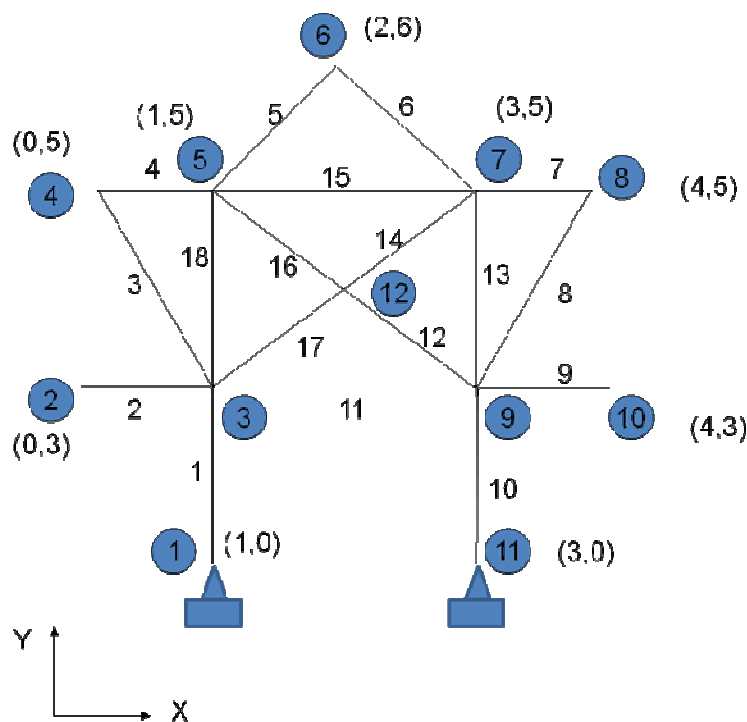


Figura 7: Pórtico analizado con 18 barras y 12 nodos. Los vínculos a tierra se encuentran ubicados en los nodos 1 y 11 (articulaciones), los extremos 2 y 10 son libres.



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERIA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

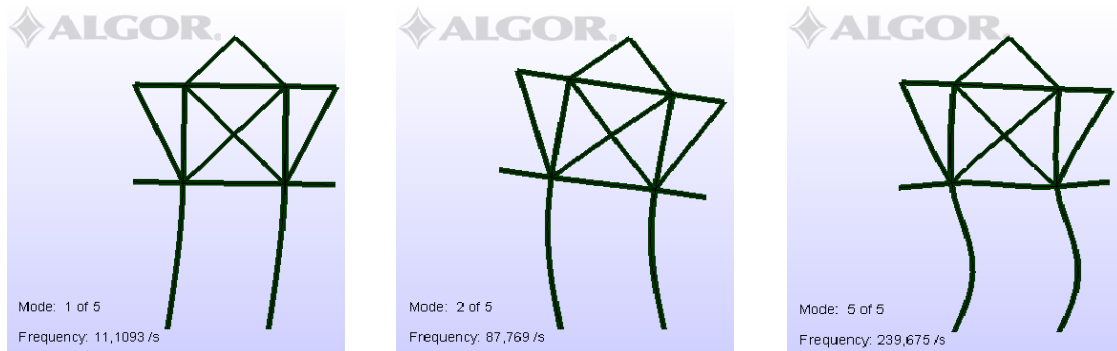


Figura 8: Formas modales correspondientes a la primera, segunda y quinta frecuencia del pórtico doblemente articulado, obtenidas utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [6].

Tabla 4: Resultados obtenidos al analizar el pórtico con doblemente articulado, con polinomios de grados 10, 30 y 50; comparados con los obtenidos utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [6].

Modo	Series de Potencias						Algor [6]
	10	Error(%)	30	Error(%)	50	Error(%)	
1	69.8030	+0.0017	69.8032	+0.002	69.8032	+0.002	69.8018
2	551.3607	-0.0190	551.9613	+0.089	551.9613	+0.089	551.4689
3	768.2176	-0.0068	768.3492	0.01028	768.3492	0.01028	768.2702
4	1259.4723	-3.7310	1308.5175	0.0173	1308.5175	0.0173	1308.2911
5	1478.6369	-1.811	1506.1472	0.0149	1506.1472	0.0149	1505.9224

5. CONCLUSIONES

El método propuesto mediante los desarrollos en series de potencias, además de conducir a una solución exacta, cuando se lleva el orden del polinomio a infinito, reduce considerablemente el número de incógnitas en la resolución. Para el caso presentado en el primer pórtico de 6 barras, por ejemplo, se lo resuelve utilizando solamente 9 incógnitas, siendo que al calcularlo utilizando el Método de los Elementos Finitos, con 10 elementos por barra, serán 3 incógnitas por nodo, lo que conduce a 180 incógnitas en total. En el segundo ejemplo, el pórtico de 11 barras, es posible resolverlo utilizando 24 incógnitas y en el último pórtico se utilizan solamente 33 incógnitas contra más de 500 incógnitas que utilizaría MEF para los valores comparados.



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

5. REFERENCIAS

- [1] Filipich C.P., Escalante M.R., Rosales M.B., Series de potencias: una ventajosa alternativa aplicada a vibraciones libres de pórticos. ENIEF 2003. Mecánica Computacional. Bahía Blanca. Nov. (2003).
- [2] Series de potencias y descomposición ortogonal propia aplicados a la dinámica de cadenas y cables poco tensos. Autor: Escalante Mario R. Tesis doctoral. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 2008.
- [3] Y.C. Fung. Foundation of Solid Mechanics. Edit. Prentice Hall of India. Private Ltd. N. Delhi. 1968.
- [4] F.B. Hildebrand. Methods of Applied Mathematics. Prentice Hall of India. Private Ltd. N. Delhi. 1968.
- [5] Wolfram Mathematica © 1988-2014, Wolfram Research inc. Versión n° 9.0.1.0.
- [6] Algor FEMPRO, Copyright © 2009 . Versión 23.1
- [7] Programa de Elementos Finitos de circulación interna realizado por De Rosa, M. Anna de la Faculty of Engineering, Department of Structural Engineering, (DiSGG). Potenza, Italy