



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

AVALIAÇÃO DO MÉTODO DA QUADRATURA DIFERENCIAL COM FUNÇÕES DE BASE RADIAL NO PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR

Vilela, Márcia Suely Corrêa ^{*1}, Oliveira, Waldir ²

^{*1} PUC Minas – *campus* Poços de Caldas

Av. Padre Francis Cletus Cox, 1661, CEP 37701-355, Poços de Caldas, Minas Gerais, Brasil.
marcia@pucpcaldas.br.

² Universidade Federal de Itajubá. waldir@unifei.edu.br.

RESUMO

Os métodos numéricos tradicionais utilizados nas soluções de equações diferenciais parciais (EDPs), tais como diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos, dependem da geração de malhas, o que, em problemas multidimensionais e de geometrias complexas, é um desafio. Métodos numéricos que não dependem da geração de malhas (*meshfree* ou *meshless*) têm sido desenvolvidos e amplamente utilizados por apresentarem flexibilidade e modelos mais simples. Uma das abordagens possíveis para tais métodos é a utilização de funções de base radial (FBR), que podem ser aplicadas de forma global (em todo o domínio) ou aplicadas de forma local. Em problemas com grandes números de pontos (nós) no domínio, a abordagem global gera instabilidades numéricas devido à baixa esparcidade e mal condicionamento dos sistemas algébricos [1]. A abordagem local tem então sido aplicada para superar tais problemas. Dentre as possibilidades de abordagem local, o Método da Quadratura Diferencial Local utilizando FBR (MQDL-FBR) tem sido estudado e utilizado há alguns anos. A sua essência consiste em aproximar as derivadas parciais das variáveis independentes por uma soma ponderada de valores funcionais em todos os pontos discretos do seu suporte [2]. Dentre as FBR apresentadas na literatura, a função multiquádrica tem sido a mais utilizada por apresentar resultados mais precisos [3].

Este trabalho, a partir da solução analítica para um problema clássico de condução de calor bidimensional, avalia a influência de parâmetros envolvidos na solução de EDPs pelo método MQDL-FBR. A partir da solução da equação de Laplace num domínio quadrado unitário, com condições de contorno de Dirichlet, o erro numérico referente à precisão do método é avaliado. São verificadas as influências do parâmetro de forma da FBR multiquádrica, da distribuição de pontos no domínio e da estrutura do suporte (*stencil*). Para a realização dos testes numéricos foi desenvolvido um programa utilizando o *software* MATLABTM.

Palavras Chaves: Método da Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial, Função Multiquádrica, Equação de Laplace.



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL ÁREA
MECÁNICA
DE LAS
INGENIERÍAS

FoDAMI

1. INTRODUÇÃO

As equações diferenciais elípticas, amplamente utilizadas na engenharia, podem ser solucionadas utilizando diversos métodos analíticos e numéricos. Os métodos numéricos tradicionais tais como diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos dependem da geração de malhas e, para geometrias complexas, tal tarefa não é trivial e gera um elevado custo computacional. Estudos para o desenvolvimento de métodos numéricos que não necessitam da geração de malhas (*meshless*) foram intensificados nas últimas décadas, possibilitando modelos e análises mais simples. Tais métodos possibilitam a interpolação ou a construção de relações funcionais a partir apenas das informações de dados dispersos, entre os quais não existem relações de conectividade.

Uma das abordagens possíveis para os métodos sem malhas é feita a partir da utilização das funções de base radial (FBR), que foram utilizadas inicialmente por Hardy [4] para a interpolação de dados dispersos. Kansa [5,6] foi o primeiro a utilizar as FBR para solucionar equações diferenciais parciais (EDPs), apresentando um método de colocação global, conhecido como Método de Kansa e, em 1997, Fasshauer [7] propôs um método alternativo baseado na interpolação de Hermite.

Nesses métodos as FBRs são aplicadas de forma global, ou seja, os suportes dos nós compreendem todo o domínio, gerando, com o aumento de nós, sistemas de equações lineares mal condicionados. Para problemas complexos que necessitam da colocação de um grande número de nós, o problema de mal condicionamento é praticamente inevitável.

Em 2003, Shu *et al.* [8] apresentaram o Método da Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial (MQDL-FBR) que utiliza as FBRs como funções interpoladoras no processo de quadratura diferencial local. O método é de simples implementação, semelhante ao método tradicional das diferenças finitas e preserva a característica *meshless* dos métodos que utilizam FBRs.

O trabalho aqui apresentado utiliza o MQDL-FBR na solução de um problema clássico de condução de calor bidimensional, permanente, sem geração interna. Na seção 2 deste artigo são apresentadas considerações sobre as funções de base radial, sobre o método da quadratura diferencial local e, de forma sucinta, a formulação do MQDL-FBR. A seção 3 apresenta os resultados obtidos utilizando um programa desenvolvido com o *software* MATLAB™. Foram considerados nos testes numéricos diferentes valores do parâmetro de forma da FBR multiquádrica



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL ÁREA
MECÁNICA
DE LAS
INGENIERÍAS

FoDAMI

utilizada, diversas densidades de pontos no domínio e três estruturas diferentes do suporte local (*stencil*). A partir da solução analítica e exata da equação de Laplace num domínio quadrado unitário, com condições de contorno de Dirichlet, o erro numérico relativo referente à precisão do método é avaliado. As conclusões finais são apresentadas na seção 4.

2. MÉTODO DA QUADRATURA DIFERENCIAL LOCAL COM FUNÇÕES DE BASE RADIAL

2.1. Funções de Base Radial

Para pontos dispersos num domínio, a aproximação de uma função num ponto de interesse x_p pode ser obtida a partir de uma combinação linear conforme a Equação (1):

$$f(x_p) \cong \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi(\|x - x_i\|) \quad (1)$$

Onde $f(x_p)$ é o valor aproximado da função no ponto de interesse, $\phi(\|x - x_i\|)$ é a FBR escolhida, λ_i são as incógnitas do sistema de equações algébricas lineares e x_i são os centros.

Diversas FBRs estão relacionadas na literatura, sendo que as mais utilizadas, segundo Shu *et al.* [8], são as apresentadas na Tabela 1, sendo $r = \|x - x_i\|$ e c um parâmetro de forma da função, de forte influência na precisão dos resultados.

Tabela 1 - FBRs mais utilizadas, [8].

FBR	$\Phi(r)$
Multiquádrica (MQ)	$\phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$, $c > 0$
<i>Thin-plate splines</i>	$\phi(r) = r^2 \log(r)$
Gaussiana	$\phi(r) = e^{-cr^2}$, $c > 0$
Multiquádrica Inversa	$\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$, $c > 0$

2.2. Método da Quadratura Diferencial Local

O Método da Quadratura Diferencial (MQD) foi inicialmente proposto por Bellman *et al.* [9] seguindo a ideia da quadratura integral. A essência do método é a aproximação das derivadas



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

parciais de uma função desconhecida através de somas ponderadas de valores da função nos pontos discretos do domínio.

No Método da Quadratura Diferencial Local (MQDL), a aproximação é aplicada localmente. Para cada ponto do domínio (nó de referência), define-se uma região de suporte (*stencil*), conforme ilustrado na Figura 1.

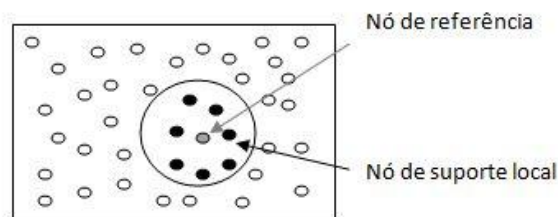


Figura 1 - Suporte local (*stencil*) em torno de um nó de referência

Seja $f(x)$ uma função suficientemente suave. Então a derivada de m -ésima ordem com relação à x , no ponto x_i , pode ser aproximada utilizando MQDL conforme a Equação (2):

$$\frac{\partial^m f(x_i)}{\partial x^m} = \sum_{j=1}^{N_S} w_{ij}^{(m)} f(x_j), i=1,2,\dots,N \quad (2)$$

Onde x_j , $j=1,\dots,N_S$ são os pontos do suporte, $f(x_j)$ e $w_{ij}^{(m)}$ são, respectivamente, os valores da função nestes pontos e os coeficientes de ponderação relacionados. O índice i relaciona o ponto numa discretização global de N nós e o índice j numa discretização local (suporte). O procedimento pode ser utilizado para qualquer dimensão do domínio e para a determinação dos coeficientes de ponderação, que é um ponto crucial do método, é necessário um conjunto de funções de base.

2.3. Método da Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial (MQDL-FBR)

No MQDL-FBR, uma função de base radial é utilizada para a determinação dos coeficientes de ponderação da quadratura diferencial. Este trabalho utiliza a função multiquádrica, conforme apresentada na Equação (3):

$$\phi_k(x) = \sqrt{(\|x - x_k\| + c)^2}, k=1,2,\dots,N_S \quad (3)$$

Substituindo o conjunto de FBR na Equação (2), obtém-se um sistema de equações lineares para a determinação dos coeficientes de ponderação [1], conforme a Equação (4) a seguir:



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL ÁREA
MECÁNICA
DE LAS
INGENIERÍAS

FoDAMI

$$\frac{\partial^m \phi_k(x_i)}{\partial x^m} = \sum_{j=1}^{N_S} w_{ij}^{(m)} \phi_k(x_j), \quad k = 1, 2, \dots, N_S \quad (4)$$

Para um dado ponto de referência i , o sistema de equações obtido na Equação (4) tem N_S incógnitas com N_S equações. A solução deste sistema fornece então, os coeficientes de ponderação $w_{ij}^{(m)}$, que são utilizados para a aproximação das derivadas da função desconhecida.

Na forma matricial, a Equação (4) pode ser escrita como:

$$\left\{ \frac{\partial^m \phi_k(x_i)}{\partial x^m} \right\} = [A] \{w_i\} \quad (5)$$

A matriz $[A]$, obtida da FBR, é simétrica e, caso ela seja singular, o sistema não tem solução. Para a FBR multiquádrica, Hon e Shaback [10] mostraram que os casos de singularidade são raros, podendo ser desconsiderados.

Uma característica favorável do método é que os coeficientes de ponderação estão relacionados somente com a FBR utilizada e a posição dos nós de suporte. É naturalmente um método *meshfree*, uma vez que a única informação necessária dos pontos do domínio é a localização dos mesmos [8].

3. MQDL-FBR APLICADO AO PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR

3.1. Descrição do Problema e Aplicação do MQDL-FBR

O problema clássico de condução de calor bidimensional, permanente, sem geração interna de calor e condutividade térmica constante, tem como equação do problema, a equação de Laplace. Neste trabalho foi considerado um domínio quadrado unitário, ou seja, $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.

Seja a seguinte equação diferencial parcial de Laplace com condições de contorno de Dirichlet:

$$\nabla^2 T(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \Omega = [0,1] \times [0,1] \quad (6)$$

$$T(x, y) = \sin(\pi x) + T_1 \quad (x, y) \in \Gamma_1, T_1 = 0, \text{ constante} \quad (7)$$

$$T(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_2 \quad (8)$$



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

Onde $\Gamma_1 = [(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = 1]$ e $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$. Para este problema, sabe-se que a solução analítica e exata é dada pela Equação (9).

$$T(x, y) = \frac{\sinh(\pi y)}{\sinh \pi} \sin(\pi x) + T_1 \quad (9)$$

A Equação (6) discretizada para um nó do domínio i assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 T(x_i, y_i)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x_i, y_i)}{\partial y^2} = 0 \quad (10)$$

Pelo MQDL-FBR, sabe-se que:

$$\frac{\partial^2 T(x_i, y_i)}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^{NS} w_{ij}^{2x} T(x_j, y_j) \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 T(x_i, y_i)}{\partial y^2} = \sum_{j=1}^{NS} w_{ij}^{2y} T(x_j, y_j) \quad (12)$$

Substituindo as Equações (11) e (12) na Equação (10), tem-se a equação discretizada pelo MQDL-FBR:

$$\sum_{j=1}^{NS} (w_{ij}^{2x} + w_{ij}^{2y}) T_j = 0 \quad (13)$$

Onde w_{ij}^{2x} e w_{ij}^{2y} são os coeficientes de ponderação associados às derivadas de segunda ordem com relação à x e à y , respectivamente, para o nó de referência i .

3.2. Testes Numéricos Realizados e Resultados Obtidos

Os testes numéricos foram realizados buscando avaliar a influência da densidade de pontos distribuídos no domínio, do parâmetro de forma da FBR multiquádrica e da estrutura do suporte local (*stencil*) no erro relativo referente à precisão do método. Tal erro, calculado para os N_{int} nós internos, foi definido conforme a Equação (14) a seguir.



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

$$\|\varepsilon\| = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_{int}} [T(x, y)_{num} - T(x, y)_{exata}]^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_{int}} [T(x, y)_{exata}]^2}} \quad (14)$$

Os pontos no domínio foram distribuídos uniformemente nas direções x e y , sendo testadas seis diferentes distribuições $N \times N$ pontos, a saber: 21×21 , 41×41 , 61×61 , 81×81 , 101×101 e 121×121 pontos. Os *stencils* testados foram os ilustrados na Figura 2 a seguir, onde N_S é o número de nós de suporte, sendo o nó de referência também considerado um nó do suporte.

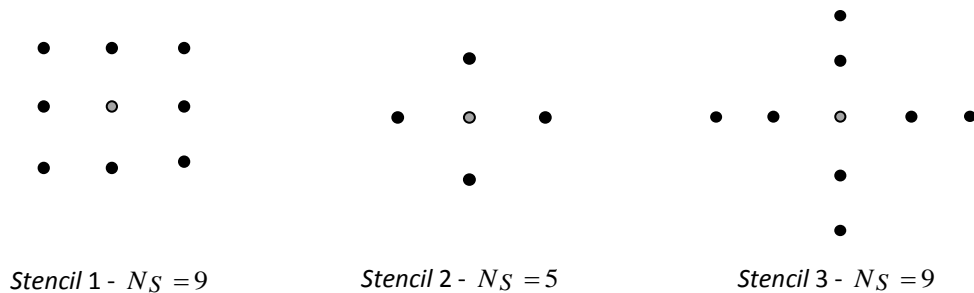


Figura 2 – Estruturas de suporte local (*stencils*) testadas

Os *stencils* 1 e 2 são estruturas de primeira camada e não utilizam pontos fora do domínio. O *stencil* 3 é uma estrutura de segunda camada e, quando o ponto de referência for vizinho aos limites do domínio, pontos localizados fora do mesmo farão parte do suporte. Para os *stencils* 1 e 2, variou-se o parâmetro de forma da FBR multiquádrica de 0,1 a 1,1, com incremento de 0,1. Para o *stencil* 3, foi testada uma maior faixa de variação deste parâmetro, que foi de 0,1 a 2,7, com incremento de 0,2.

3.2.1 Variação do erro relativo com o parâmetro de forma para diferentes densidades de pontos distribuídos no domínio

Avalia-se aqui o comportamento do erro relativo ($\|\varepsilon\|$) com a densidade de pontos distribuídos no domínio, para diferentes valores do parâmetro de forma (c) da FBR multiquádrica. As Figuras 3, 4 e 5 ilustram, a partir dos testes numéricos realizados, este comportamento para cada um dos *stencils* considerados.

Para os *stencils* 1 e 2 (estruturas de primeira camada), pode-se observar que a tendência de variação do erro relativo independe da densidade de pontos distribuídos no domínio. Pode-se notar



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

também mudança na inclinação da curva quando o valor de c está em torno de 0,4 para o *stencil* 1 e de 0,5 para o *stencil* 2, sugerindo tais valores como ótimos para estas estruturas. Para o *stencil* 1, que povoa totalmente a primeira camada, observa-se que para uma maior densidade de pontos distribuídos no domínio, $N = 121$, instabilidades numéricas começam a acontecer para um c em torno de 0,9.

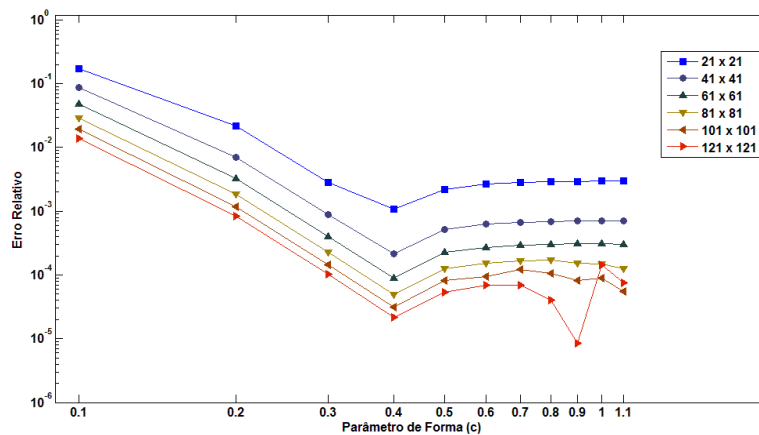


Figura 3 – Erro relativo obtido com a variação do parâmetro de forma considerando o *stencil* 1

Pode-se notar também que, para as estruturas de suporte de primeira camada (Figura 3 e Figura 4), a influência do parâmetro de forma nos erros relativos é mais acentuada para menores valores deste parâmetro, ou seja, na parte inicial das curvas, até que se atinja um valor ótimo de c .

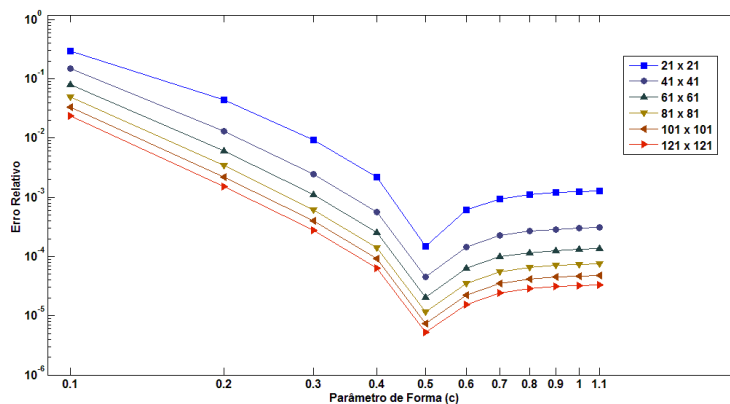


Figura 4 – Erro relativo obtido com a variação do parâmetro de forma considerando o *stencil* 2

O *stencil* 3 (estrutura de segunda camada) apresenta erros relativos superiores às estruturas de primeira camada testadas (*stencils* 1 e 2). Observa-se que, para valores do parâmetro de forma



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

acima de 0,3 não há variação significativa do erro relativo e que as instabilidades numéricas aumentam significativamente com o aumento da densidade de pontos distribuídos no domínio.

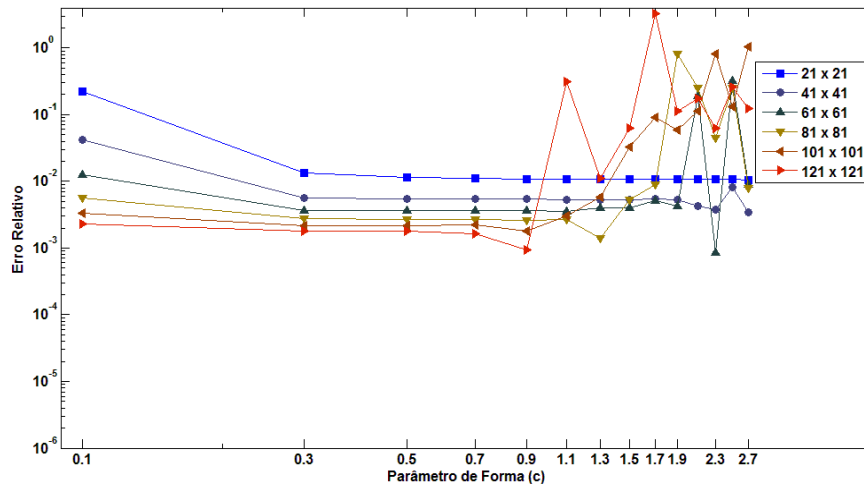


Figura 5 – Erro relativo obtido com a variação do parâmetro de forma considerando o *stencil* 3

3.2.2 Variação do erro relativo com o parâmetro de forma para estruturas do suporte de primeira camada

A Figura 6 ilustra a variação do erro relativo com o parâmetro de forma para as estruturas de primeira camada que foram, dentre as estruturas de suporte avaliadas, as que apresentaram melhores resultados. Foi fixada a densidade de pontos distribuídos no domínio correspondente à $N \times N = 61 \times 61$, que foi a maior densidade que não apresentou nenhuma instabilidade numérica.

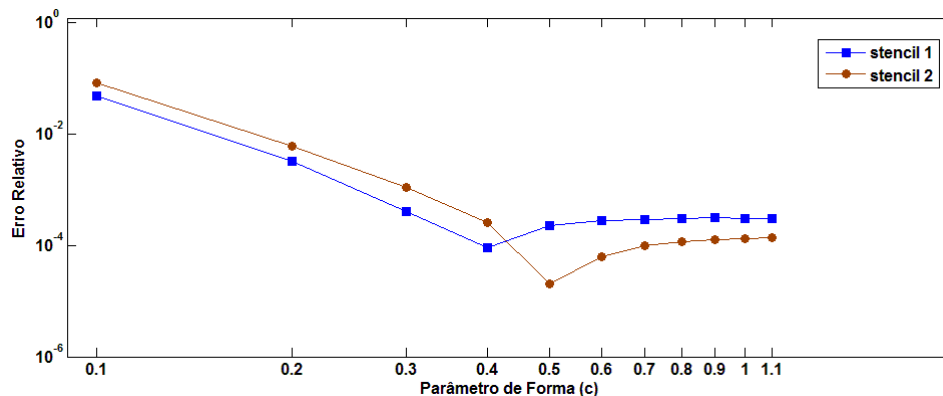


Figura 6 – Erro relativo obtido com a variação do parâmetro de forma para as estruturas de 1ª camada (*stencils* 1 e 2)



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

Observa-se que para c compreendido entre 0,4 e 0,5 ocorre uma alternância nas curvas, com relação aos melhores resultados obtidos. O menor erro para o problema foi obtido com a utilização do *stencil 2* com um valor do parâmetro de forma de 0,5.

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho é apresentada a aplicação do MQDL-FBR na solução de um problema clássico de condução de calor bidimensional. O método é versátil e preserva a característica *meshless* dos métodos que utilizam FBRs.

Foram avaliadas diversas densidades de pontos distribuídos uniformemente no domínio, diferentes valores do parâmetro de forma da FBR multiquádrica e três estruturas de suporte local (*stencil*). Os melhores resultados foram obtidos com a utilização de *stencils* de primeira camada, com valores do parâmetro de forma em torno de 0,4 a 0,5. Os resultados obtidos corroboram pesquisas recentes que relatam que o valor ótimo não depende da densidade de pontos no domínio, mas, dependem do número de nós no suporte.

O *stencil 3*, de segunda camada, apresentou os piores resultados. O fato de utilizar pontos fora do domínio quando o nó de referência é vizinho ao contorno pode contribuir para que haja contaminação da solução numérica com informações alheias à física do problema interno, uma vez que para estes pontos são admitidos os valores da função iguais aos da fronteira, dados pelas condições de contorno.

Outras estruturas de suporte local que não façam uso de nós fora das fronteiras podem ser testadas. Caso se utilize *stencils* mais extensos, tratamentos alternativos para os nós de referência próximos às fronteiras devem ser investigados.

5. REFERÊNCIAS

- [1] Santos, L. G. C., Método da quadratura diferencial com funções de base radial em problemas de dinâmica dos fluidos e transferência de calor, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, Brasil, 2012.
- [2] Yongyuan, S., Further development of local MQ-DQ method and its application in CFD. Tese de Doutorado, National University of Singapore, Singapore, 2010.
- [3] Tota, P. V., Wang, Z. J., Meshfree Euler solver using local radial basis functions for inviscid compressible flows, 18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Miami, FL, 2007.



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

- [4] Hardy, L., Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, *Journal of Geophysical Research*, 76(8):1905-1915, 1971.
- [5] Kansa, E. J., Multiquadrics – a scattered data approximations and scheme with applications to computational fluid dynamics I: surface approximations and partial derivative estimates, *Computers and Mathematics with Applications*, 19(8): 127-145, 1990.
- [6] Kansa, E. J., Multiquadrics – a scattered data approximations and scheme with applications to computational fluid dynamics II: solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 19(8): 147-161, 1990.
- [7] Fasshauer, G. E., Solving partial differential equations by collocation with radial basis function, Le Méhauté A., Rabut C. and Schumaker L. L. (eds.), *Surface Fitting and Multiresolutions Methods*, Vanderbilt University Press, Nashville, 1997.
- [8] Shu, C., Ding, H., Yeo, K. S., Local radial basis function-based differential quadrature method and its application to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(7-8): 941-954, 2003.
- [9] Bellman, R. E., Kashef, B. G., Casti, J. Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations, *Journal of Computational Physics*, 10(1):40-52, 1972.
- [10] Hon, Y., Shaback, R., On unsymmetric collocation by radial basis functions, *Applied Mathematics and Computation*, 119(2-3):177-186, 2001.

Agradecimientos

Os autores deste trabalho agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais – FAPEMIG e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, pelo apoio financeiro recebido.