

## **FRECUENCIAS NATURALES DE VIBRACIÓN DE VIGAS TIMOSHENKO ROTANTES DE SECCIÓN VARIABLE POR EL MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL**

Daniel H. Felix<sup>(1)</sup>, Diana V. Bambill<sup>(1,2)</sup>, Raúl E. Rossi<sup>(1)</sup>, Samanta J. Escanes<sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup>*Instituto de Mecánica Aplicada, Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur  
Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Argentina - e-mail: dbambill@criba.edu.ar*

<sup>(2)</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

### **RESUMEN**

Son múltiples las aplicaciones ingenieriles y tecnológicas que presentan sistemas o subsistemas, que pueden ser representados satisfactoriamente, o en una primera aproximación, por medio de vigas que rotan con velocidad angular en torno a un eje. Dentro de esta temática el análisis de vibraciones de vigas rotantes es un tópico de estudio en la ingeniería mecánica. Existen numerosos ejemplos que pueden ser modelados como vigas rotantes, tales como aspas de helicópteros, álabes de turbinas, generadores eólicos, manipuladores robóticos entre otros.

El problema de la determinación de frecuencias naturales de una viga Timoshenko rotante, de sección constante o variable en forma escalonada, es abordado en el presente estudio mediante la utilización del Método de Cuadratura Diferencial, conocido por su sigla MCD. El enfoque resulta original en cuanto a la técnica elegida para resolverlo.

La utilización de la teoría de vigas Timoshenko permite obtener un modelo más refinado que produce en consecuencia resultados más precisos, al considerar los efectos de la inercia rotatoria y la deformación por corte de la viga modelada.

Cuando la viga rotante está sometida a una excitación armónica, el problema puede describirse con un sistema de ecuaciones diferenciales, cuya resolución conduce a la determinación de los coeficientes de frecuencia natural de la viga en esas condiciones.

El objetivo del trabajo es aportar datos útiles en forma de tablas, para el conocimiento del comportamiento vibratorio de vigas rotantes, y contribuir a la difusión del MCD como herramienta de cálculo.

**Palabras Claves:** viga Timoshenko, vibración, viga rotante, sección escalonada.

## 1. INTRODUCCIÓN

Existen numerosos trabajos sobre vigas rotantes. La teoría más sencilla aplicable a este tipo de estructuras surge de aplicar el modelo Bernoulli – Euler que tiene en cuenta las fuerzas de inercia debidas a la tracción lateral y no considera ni el efecto de la deformación por corte, ni el de la inercia rotatoria. En este trabajo se plantea un modelo basado en la teoría de Timoshenko, que también incluye en su formulación ambos efectos (deformación por corte e inercia rotatoria) y permite describir el comportamiento de la viga con mayor precisión.

Varios procedimientos experimentales [1,2] y analíticos [3-9] se han utilizado para obtener las frecuencias naturales de la viga cantilever rotante.

En este tratado se utiliza el Método de Cuadratura Diferencial, MCD, que es en esencia una técnica numérica que permite resolver ecuaciones diferenciales. Este método fue desarrollado en la década del setenta por Bellman y Casti [10] y en los años noventa por otros autores [11-12]. En la actualidad se dispone de una extensa bibliografía tanto en revistas como libros [13,14] que describen detalladamente el método y sus variantes. Sólo se mencionan algunos autores en las Referencias, por un motivo de espacio en la longitud máxima autorizada para el trabajo.

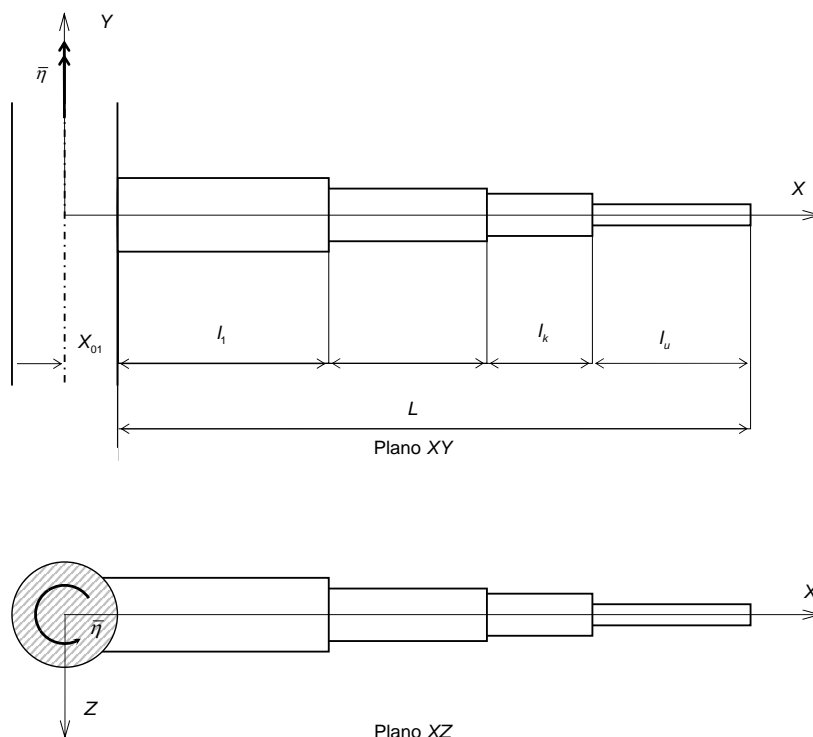


Figura 1 Viga escalonada.

Se adoptaron para este análisis vigas con secciones escalonadas por tramos y de sección uniforme en toda la longitud. Los resultados obtenidos de las primeras tres frecuencias naturales para los distintos casos se comparan con algunos valores disponibles en la literatura,



Según la teoría de Timoshenko, las dos ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan el movimiento de vibración libre en el plano XY del tramo k-ésimo de la viga rotante, expresadas adimensionalmente, son las que siguen a continuación:

$$\eta^2 (X_{0k} + x) \frac{dW_k}{dx} - \frac{s_1^2}{l_k^2} N_k \frac{d^2 W_k}{dx^2} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{s_1^2}{l_k^2} \left( \frac{d^2 W_k}{dx^2} - \frac{d\Psi_k}{dx} \right) = \Omega^2 W_k \quad (1a)$$

$$-\frac{\kappa}{2(1+\nu)} s_1^2 s_k^2 \frac{dW_k}{dx} - \frac{s_1^2}{l_k^2} \frac{d^2 \Psi_k}{dx^2} + \left( \frac{\kappa}{2(1+\nu)} s_1^2 s_k^2 - \eta^2 \right) \Psi_k = \Omega^2 \Psi_k \quad (1b)$$

donde  $\nu$  es el coeficiente de Poisson del material,  $W_k$  es la amplitud de desplazamiento de la sección en la dirección Y,  $\Psi_k$  es la amplitud de giro,  $N_k$  es el esfuerzo normal,  $s_k = L/i_k$  es el factor de esbeltez del tramo k-ésimo;  $s_1 = L/i_1$  es el factor de esbeltez del primer tramo de la viga y  $\kappa$  es el factor de corte de la sección transversal.

Los coeficientes adimensionales de la velocidad de rotación  $\eta$  y de la frecuencia natural  $\Omega$  se

definen como:  $\eta = \sqrt{\frac{\rho A_1}{E I_1}} L^2 \bar{\eta}$ ;  $\Omega = \sqrt{\frac{\rho A_1}{E I_1}} L^2 \omega$ , respectivamente, donde  $A_1$  es el área e  $I_1$  es el

momento de inercia del primer tramo,  $k = 1$ ;  $E$  es el módulo de elasticidad,  $\rho$  es la densidad y  $L$  es la longitud total de la viga rotante.

Las condiciones de borde para los desplazamientos y los esfuerzos en cada tramo k-ésimo se escriben como:

$$-I_{(k-1)} W_{(k-1)} \Big|_{x=1} + I_k W_k \Big|_{x=0} = 0; \quad -\Psi_{(k-1)} \Big|_{x=1} + \Psi_k \Big|_{x=0} = 0 \quad (2a,b)$$

$$-\alpha_{(k-1)} \left( \left( N_{(k-1)} + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \right) \frac{dW_{(k-1)}}{dx} - \frac{\kappa \Psi_{(k-1)}}{2(1+\nu)} \right) \Big|_{x=1} + \alpha_k \left( \left( N_k + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \right) \frac{dW_k}{dx} - \frac{\kappa \Psi_k}{2(1+\nu)} \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (3a)$$

$$-\frac{\alpha_{(k-1)}}{I_{(k-1)}} \frac{d\Psi_{(k-1)}}{dx} \Big|_{x=1} + \frac{\alpha_k}{I_k} \frac{d\Psi_k}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad (3b)$$

donde  $\alpha_k = A_k / A_1$  es la relación de áreas.

El modelo de la viga cantilever debe cumplir en el extremo empotrado, las condiciones de giro y desplazamiento nulos y en el extremo libre, las condiciones de corte y momento flector nulos, dichas condiciones se traducen a las ecuaciones adimensionales siguientes:

$$W_1 \Big|_{x=0} = 0; \quad \Psi_1 \Big|_{x=0} = 0; \quad Q_u \Big|_{x=1} = 0, \quad M_u \Big|_{x=1} = 0 \quad (4a-d)$$

Para aplicar el MCD [4] se discretiza cada tramo k-ésimo de la viga, en una malla irregular de  $n$  puntos mediante la expresión formulada por Chebyshev – Gauss – Lobato [5]:

$$\frac{X_i}{l_x} = \frac{1 - \cos[(i-1)\pi/n-1]}{2} \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n$$

En cada punto  $i$  de la malla se aproximan las derivadas de las funciones  $\Psi_k$  y  $W_k$  mediante la aplicación de las ecuaciones análogas de cuadratura [6]:

$$\left. \frac{d^{(q)}W_k}{dx^q} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(q)} W_{kj}; \quad \left. \frac{d^{(q)}\Psi_k}{dx^q} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(q)} \Psi_{kj} \quad (5a, b)$$

con la letra  $q$  se indica el orden de derivación;  $i, j$  son subíndices que se refieren a los nodos del tramo y  $W_{kj}$ ,  $\Psi_{kj}$  son el desplazamiento y el giro del nodo  $j$  del tramo  $k$ -ésimo. A cada nodo  $i$  se le asocia un polinomio de Lagrange [11, 12], cuyas raíces son las coordenadas de los nodos restantes de ese tramo de la forma:

$$\Pi(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_j) \quad (6)$$

Con los polinomios  $\Pi(x_i)$  se determinan los coeficientes  $A_{ij}^{(q)}$ , de las derivadas de orden  $q$  que permiten escribir las ecuaciones análogas de cuadratura de las Ecuaciones (1a,b):

$$\eta^2 (X_{0k} + x_i) \sum_{j=1}^n (A_{ij}^{(1)}) W_{kj} - \frac{S_1^2}{I_k^2} N_{ki} \sum_{j=1}^n (A_{ij}^{(2)}) W_{kj} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{S_1^2}{I_k^2} \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(2)} W_{kj} + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{S_1^2}{I_k^2} \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(1)} \Psi_{kj} = \Omega^2 W_{ki} \quad (7a)$$

$$-\frac{\kappa}{2(1+\nu)} S_1^2 S_k^2 \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(1)} W_{kj} - \frac{S_1^2}{I_k^2} \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(2)} \Psi_{kj} + \left( \frac{\kappa}{2(1+\nu)} S_1^2 S_k^2 - \eta^2 \right) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(0)} \Psi_{kj} = \Omega^2 \Psi_{ki} \quad (7b)$$

La expresión del esfuerzo normal es  $N_k|_{x=x_i} = \eta^2 \frac{I_k^2}{S_1^2} \left( X_{0k} + \frac{1}{2} - X_{0k} x_i - \frac{1}{2} x_i^2 \right) + F_{k+1}$ .

Las condiciones de compatibilidad entre tramos consecutivos y las condiciones de borde de la viga empotrada – libre quedan expresados como:

$$-I_{(k-1)} \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(0)} W_{(k-1)j} + I_k \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} W_{kj} = 0; \quad -\sum_{j=1}^n A_{nj}^{(0)} \Psi_{(k-1)j} + \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} \Psi_{kj} = 0 \quad (8a,b)$$

$$-\alpha_{(k-1)} \left( \left( N_{(k-1)n(k-1)} + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \right) \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(1)} W_{(k-1)j} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(0)} \Psi_{(k-1)j} \right) \quad (9a)$$

$$+\alpha_k \left( \left( N_{k1} + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \right) \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(1)} W_{kj} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} \Psi_{kj} \right) = 0$$

$$-\frac{\alpha_{(k-1)}}{I_{(k-1)}} \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(1)} \Psi_{(k-1)j} + \frac{\alpha_k}{I_k} \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(1)} \Psi_{kj} = 0 \quad (9b)$$

$$\sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} W_{1j} = 0; \quad \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} \Psi_{1j} = 0 \quad (10a,b)$$

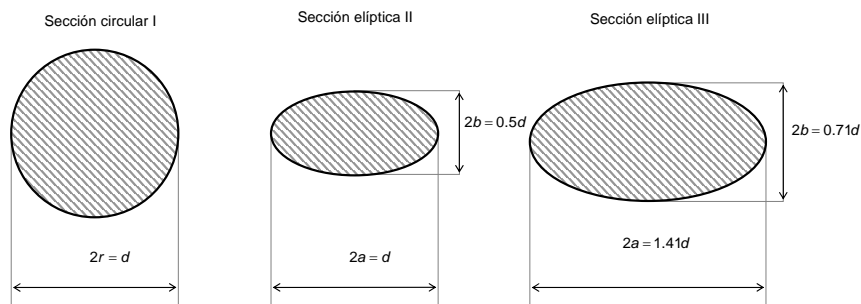
$$\left( N_u|_{x=1} + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \right) \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(1)} W_{uj} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(0)} \Psi_{uj} = 0; \quad \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(1)} \Psi_{uj} = 0 \quad (11a,b)$$

Las Ecuaciones (7) a (11) son el conjunto de ecuaciones análogas de cuadratura del problema analizado. Resolviéndolas se obtienen los autovalores, que corresponden a los coeficientes de frecuencia  $\Omega$  de la viga rotante considerada.

Los modelos de vigas presentados en este trabajo se resolvieron también por el método de elementos finitos, MEF, utilizando el módulo de análisis lineal del software comercial Algor [15].

## 2. RESULTADOS NUMÉRICOS

Debido al efecto rigidizador de la fuerza centrífuga que se genera durante la rotación de la viga, es esperable que las frecuencias naturales se incrementen con el aumento de la velocidad de rotación y con el aumento del radio del eje de rotación al que se encuentra empotrada la viga. Las Tablas presentan los coeficientes de las tres primeras frecuencias naturales de vibración



*Figura 3. Viga rotante: Secciones transversales.*

de una viga cantilever rotante, en función de la velocidad de rotación y del radio del eje de rotación al que está empotrada. Se considera un material cuyo coeficiente de Poisson es  $\nu = 0.30$ . Se adoptaron tres secciones transversales diferentes, Figura 3, una sección circular I y dos secciones elípticas II y III. La dimensión indicada con  $d$ , tiene un mismo valor en los tres tipos de sección. Para las secciones elípticas adoptadas se cumple  $a = 2b$ . Las secciones I y II tienen el mismo ancho en el sentido del eje  $Z$ , en tanto que la sección III tiene un área igual a la de la sección circular.

*Tabla 1 Coeficientes de frecuencia de la viga cantilever en reposo. ( $\eta = 0$ )*

| $\Omega_i$                            | S. circular(I) |        | S. elíptica(II) |        | S. elíptica(III) |        |
|---------------------------------------|----------------|--------|-----------------|--------|------------------|--------|
|                                       | MCD            | MEF    | MCD             | MEF    | MCD              | MEF    |
| <i>Viga uniforme</i>                  |                |        |                 |        |                  |        |
| $\Omega_1$                            | 3.481          | 3.481  | 3.507           | 3.507  | 3.499            | 3.499  |
| $\Omega_2$                            | 20.630         | 20.629 | 21.661          | 21.661 | 21.308           | 21.307 |
| $\Omega_3$                            | 53.548         | 53.547 | 59.307          | 59.306 | 57.207           | 57.206 |
| <i>Viga escalonada de tres tramos</i> |                |        |                 |        |                  |        |
| $\Omega_1$                            | 6.505          | 6.505  | 6.563           | 6.563  | 6.544            | 6.544  |
| $\Omega_2$                            | 14.643         | 14.643 | 14.912          | 14.911 | 14.822           | 14.822 |
| $\Omega_3$                            | 33.769         | 33.768 | 35.511          | 35.510 | 34.911           | 34.910 |

El factor de corte depende de la forma geométrica, para una sección circular asume la expresión:  $\kappa = \frac{6(1+\nu)}{7+6\nu}$ , en tanto que para la elíptica es:  $\kappa = \frac{12(1+\nu)(3a^2 + b^2)a^2}{(40+37\nu)a^4 + (16+10\nu)a^2b^2 + \nu b^4}$ .

En la Tabla 1 se presentan los coeficientes de frecuencia de la viga cantilever de sección uniforme y escalonada en tres tramos  $\eta = 0$ . La viga uniforme tiene sección constante en toda su longitud  $L$ . En tanto que la viga escalonada adoptada tiene su longitud distribuida en tres tramos de diferente tamaño de sección,  $\alpha_1 = 1$ ;  $\alpha_2 = 4/9$  y  $\alpha_3 = 1/9$ . En este trabajo se adoptó la longitud del primer tramo igual al 40% de la longitud total  $L$  y el segundo y el tercero con longitudes del 30% de  $L$ . Según se observa la disminución de la sección en la viga escalonada produce un importante aumento del coeficiente de frecuencia fundamental.

Para la viga rotante se han considerado distintas situaciones, cuando el radio del eje de giro puede despreciarse frente a la longitud de la viga  $X_{01} = 0$ , y cuando tiene valores tales como

$$X_{01} = \frac{1}{4}L, \frac{1}{2}L, L \text{ y } 2L.$$

La Tabla 2 muestra los valores para la viga uniforme rotante con velocidades  $\eta = 1$  y  $5$ . Para la sección circular el coeficiente de esbeltez se adoptó igual a 30, por lo que en las secciones elípticas resultan: para la II  $s = 60$  y para la III  $s = 42.426$ , en función de que  $d$  se mantiene con el mismo valor para los tres tipos de sección.

*Tabla 2 Coeficientes de frecuencia de la viga rotante de sección uniforme en función de  $\eta$  y  $X_{01}$*

| $\eta = 1$        |        |                 |        | $\eta = 5$       |        |                |        |                 |        |                  |        |
|-------------------|--------|-----------------|--------|------------------|--------|----------------|--------|-----------------|--------|------------------|--------|
| S.circular (I)    |        | S.elíptica (II) |        | S.elíptica (III) |        | S.circular (I) |        | S.elíptica (II) |        | S.elíptica (III) |        |
| MCD               | MEF    | MCD             | MEF    | MCD              | MEF    | MCD            | MEF    | MCD             | MEF    | MCD              | MEF    |
| $X_{01}/L = 0$    |        |                 |        |                  |        |                |        |                 |        |                  |        |
| 3.646             | 3.646  | 3.673           | 3.673  | 3.664            | 3.664  | 6.387          | 6.399  | 6.433           | 6.439  | 6.418            | 6.426  |
| 20.778            | 20.779 | 21.808          | 21.808 | 21.455           | 21.455 | 24.057         | 24.086 | 25.074          | 25.085 | 24.723           | 24.739 |
| 53.702            | 53.703 | 59.453          | 59.453 | 57.356           | 57.356 | 57.247         | 57.295 | 62.852          | 62.863 | 60.797           | 60.518 |
| $X_{01}/L = 0.25$ |        |                 |        |                  |        |                |        |                 |        |                  |        |
| 3.698             | -      | 3.726           | -      | 3.717            | -      | 7.091          | -      | 7.139           | -      | 7.123            | -      |
| 20.828            | -      | 21.857          | -      | 21.504           | -      | 25.100         | -      | 26.110          | -      | 25.760           | -      |
| 53.757            | -      | 59.505          | -      | 57.408           | -      | 58.490         | -      | 64.040          | -      | 62.001           | -      |
| $X_{01}/L = 0.50$ |        |                 |        |                  |        |                |        |                 |        |                  |        |
| 3.751             | -      | 3.778           | -      | 3.769            | -      | 7.727          | -      | 7.779           | -      | 7.763            | -      |
| 20.877            | -      | 21.906          | -      | 21.553           | -      | 26.097         | -      | 27.103          | -      | 26.754           | -      |
| 53.811            | -      | 59.556          | -      | 57.460           | -      | 59.699         | -      | 65.202          | -      | 63.176           | -      |
| $X_{01}/L = 1$    |        |                 |        |                  |        |                |        |                 |        |                  |        |
| 3.852             | 3.854  | 3.880           | 3.8804 | 3.871            | 3.872  | 8.860          | 8.872  | 8.920           | 8.9260 | 8.900            | 8.9077 |
| 20.976            | 20.978 | 22.003          | 22.004 | 21.651           | 21.652 | 27.972         | 28.014 | 28.978          | 28.996 | 28.628           | 28.652 |
| 53.920            | 53.923 | 59.658          | 59.658 | 57.564           | 57.565 | 62.028         | 62.123 | 67.451          | 67.472 | 65.448           | 65.489 |
| $X_{01}/L = 2$    |        |                 |        |                  |        |                |        |                 |        |                  |        |
| 4.049             | 4.050  | 4.076           | 4.077  | 4.067            | 4.068  | 10.762         | 10.776 | 10.835          | 10.843 | 10.810           | 10.819 |
| 21.173            | 21.175 | 22.196          | 22.197 | 21.845           | 21.846 | 31.354         | 31.407 | 32.377          | 32.400 | 32.018           | 32.049 |
| 54.136            | 54.142 | 59.862          | 59.862 | 57.772           | 57.774 | 66.373         | 66.506 | 71.692          | 71.723 | 69.717           | 69.774 |

La Tabla 3 muestra los coeficientes de frecuencia que corresponden a vigas escalonadas de tres tramos con sección tipo I, II y III. Para la viga escalonada de sección circular I de acuerdo a lo ya indicado y adoptando  $s_1 = 30$ , se tiene  $s_2 = 45$  y  $s_3 = 90$ , para la sección elíptica II:  $s_1 = 60$ ,  $s_2 = 90$ ,  $s_3 = 180$  y para la sección elíptica III:  $s_1 = 42.4264$ ,  $s_2 = 63.640$ ,  $s_3 = 127.279$ .

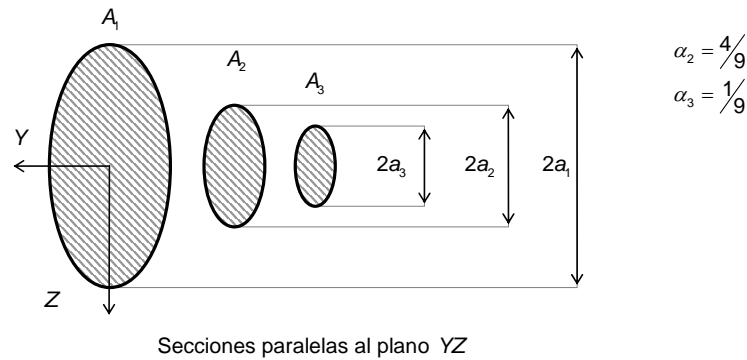


Figura 4. Variación de las secciones transversales escalonadas en una viga de tres tramos

Tabla 3 Coeficientes de frecuencia de la viga rotante escalonada de 3 tramos en función de  $\eta$  y  $X_{01}$

| $\eta = 1$        |        |                 |        | $\eta = 5$       |        |                |        |                 |        |                  |        |
|-------------------|--------|-----------------|--------|------------------|--------|----------------|--------|-----------------|--------|------------------|--------|
| S.circular (I)    |        | S.elíptica (II) |        | S.elíptica (III) |        | S.circular (I) |        | S.elíptica (II) |        | S.elíptica (III) |        |
| MCD               | MEF    | MCD             | MEF    | MCD              | MEF    | MCD            | MEF    | MCD             | MEF    | MCD              | MEF    |
| $x_{01}/L = 0$    |        |                 |        |                  |        |                |        |                 |        |                  |        |
| 6.619             | 6.619  | 6.677           | 6.678  | 6.657            | 6.659  | 8.775          | 8.786  | 8.852           | 8.858  | 8.827            | 8.834  |
| 14.801            | 14.802 | 15.068          | 15.070 | 14.977           | 14.981 | 18.140         | 18.160 | 18.436          | 18.450 | 18.337           | 18.353 |
| 33.903            | 33.903 | 35.634          | 35.645 | 35.023           | 35.044 | 36.974         | 36.997 | 38.736          | 38.749 | 38.126           | 38.142 |
| $x_{01}/L = 0.25$ |        |                 |        |                  |        |                |        |                 |        |                  |        |
| 6.657             | -      | 6.715           | -      | 6.696            | -      | 9.438          | -      | 9.5176          | -      | 9.491            | -      |
| 14.850            | -      | 15.117          | -      | 15.026           | -      | 19.085         | -      | 19.385          | -      | 19.284           | -      |
| 33.950            | -      | 35.681          | -      | 35.070           | -      | 38.038         | -      | 39.799          | -      | 39.188           | -      |
| $x_{01}/L = 0.50$ |        |                 |        |                  |        |                |        |                 |        |                  |        |
| 6.695             | -      | 6.753           | -      | 6.734            | -      | 10.058         | -      | 10.136          | -      | 10.110           | -      |
| 14.898            | -      | 15.166          | -      | 15.074           | -      | 19.981         | -      | 20.285          | -      | 20.183           | -      |
| 33.997            | -      | 35.727          | -      | 35.116           | -      | 39.073         | -      | 40.833          | -      | 40.222           | -      |
| $x_{01}/L = 1$    |        |                 |        |                  |        |                |        |                 |        |                  |        |
| 6.770             | 6.771  | 6.829           | 6.830  | 6.810            | 6.811  | 11.189         | 11.204 | 11.271          | 11.281 | 11.244           | 11.256 |
| 14.995            | 14.996 | 15.264          | 15.265 | 15.174           | 15.175 | 21.651         | 21.680 | 21.966          | 21.990 | 21.860           | 21.886 |
| 34.090            | 34.091 | 35.831          | 35.832 | 35.231           | 35.232 | 41.061         | 41.105 | 42.824          | 42.850 | 42.209           | 42.240 |
| $x_{01}/L = 2$    |        |                 |        |                  |        |                |        |                 |        |                  |        |
| 6.918             | 6.919  | 6.977           | 6.978  | 6.958            | 6.959  | 13.155         | 13.174 | 13.245          | 13.260 | 13.215           | 13.323 |
| 15.186            | 15.187 | 15.455          | 15.456 | 15.365           | 15.367 | 24.626         | 24.658 | 24.964          | 24.989 | 24.849           | 24.876 |
| 34.277            | 34.279 | 36.017          | 36.018 | 35.417           | 35.418 | 44.761         | 44.830 | 46.539          | 46.581 | 45.915           | 45.964 |

Las Tablas 1, 2 y 3 muestran un excelente acuerdo entre los valores calculados por ambos métodos, el de cuadratura diferencial y el de elementos finitos, tanto para la viga en reposo

como rotando con velocidades de  $\eta$  igual a 1 y 5, para todas las secciones transversales analizadas.

A continuación en la Tabla 4, se presentan las frecuencias naturales, dadas en Hertz para una viga cantilever de sección rectangular de aluminio de dimensiones 310 mm, 30 mm y 3 mm, para los casos de la viga en reposo y rotando con  $\eta$  igual a 1 y 2. Las tres primeras frecuencias naturales mostradas en la Tabla, corresponden a las obtenidas para los modelos experimentales [1] (a) y (b), para un modelo analítico [16] (teoría Bernoulli-Euler) y para las calculadas por los autores utilizando el MCD. Tal como se observa, el acuerdo entre los valores experimentales y analíticos es bueno para las velocidades simuladas de  $\eta$  igual a 0, 1 y 2. Para la frecuencia fundamental, los valores experimentales son mayores que los analíticos para las dos experiencias, (a) y (b), de la referencia citada [1]. Según explica su autor, Senatore, esto es debido a la forma experimental en que se representaron las cargas inducidas por la fuerza centrífuga, mientras que en los modelos teóricos éstas se ajustan mejor a la distribución que dicha fuerza tiene en la dirección de la coordenada longitudinal  $X$ .

*Tabla 4 Comparación de las tres primeras frecuencias naturales de la viga rotante uniforme en función de la velocidad  $\eta$ , con  $X_{01} = 0$ .*

| $f_i$ (Hz) | Frecuencia experimentales |       | Frecuencias teóricas |                      |
|------------|---------------------------|-------|----------------------|----------------------|
|            | [1]                       | [1]   | [16]                 | Presente estudio MCD |
| $\eta = 0$ |                           |       |                      |                      |
| 1          | 24.8                      |       | 25.3                 | 25.1                 |
| 2          | 155.5                     |       | 157.0                | 157.3                |
| 3          | 436.8                     |       | 438.0                | 440.2                |
| $\eta = 1$ |                           |       |                      |                      |
|            | (a)                       | (b)   |                      |                      |
| 1          | 28.0                      | 29.0  | 26.3                 | 26.3                 |
| 2          | 158.0                     | 158.5 | 158.5                | 158.4                |
| 3          | 440.0                     | 441.0 | 442.0                | 441.2                |
| $\eta = 2$ |                           |       |                      |                      |
|            | (a)                       | (b)   |                      |                      |
| 1          | 37.0                      | 34.5  | 29.6                 | 29.6                 |
| 2          | 163.3                     | 161.3 | 161.6                | 161.5                |
| 3          | 446.0                     | 444.5 | 445.0                | 444.4                |

### 3. CONCLUSIONES

El modelado de este tipo de problemas utilizando el Método de Cuadratura Diferencial, brinda resultados confiables, aún en el caso de vigas rotantes con variadas características, como lo son considerar distintas velocidades, diámetros del eje de rotación, esbelteces de la viga, cambio de sección en los tramos, entre otros. También podrían plantearse diversas condiciones de vinculación o teorías más refinadas para modelar la viga. Como conclusión de este trabajo puede establecerse que el Método de Cuadratura Diferencial constituye una herramienta eficaz para hallar soluciones a este tipo de problemas.

#### 4. REFERENCIAS

- [1] A. Senatore, Measuring the natural frequencies of centrifugally tensioned beam with laser doppler vibrometer, *Measurement*, **Vol. 39**, pp. 628-633, 2006.
- [2] S. S. Rao, R. S. Gupta, Finite element vibration analysis of rotating Timoshenko beams, *Journal of Sound and Vibration*, **Vol. 242** - 1, pp.103-124, 2001.
- [3] J. R. Banerjee. Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of centrifugally stiffened Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration* **Vol. 247**, pp. 97-115. 2001.
- [4] D. H. Felix, D. V. Bambill, R. E. Rossi. Análisis de vibración libre de una viga Timoshenko escalonada, centrífugamente rigidizada, mediante el MCD. Sometido a publicación.
- [5] J. R. Banerjee. Free vibration of centrifugally stiffened uniform and tapered beams using the dynamic stiffness method. *Journal of Sound and Vibration* **Vol. 233**, pp. 857-875. 2000.
- [6] S. C. Lin and K. M. Hsiao. Vibration analysis of a rotating Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration* **Vol. 240**, pp. 303-322. 2001.
- [7] H. Ouyang and M. Wang, A dynamic model for a rotating beam subjected to axially moving forces, *Journal of Sound and Vibration*, **Vol. 308**-3-5, pp. 674-682. 2007.
- [8] S. Y. Lee and J.J. Sheu, Free vibration of an extensible rotating inclined Timoshenko beam, *Journal of Sound and Vibration*, **Vol. 304**-3-5, pp. 606-624. 2007.
- [9] D. V. Bambill, R. E. Rossi, D. H. Felix, S. J. Escanes, Lateral vibration of rotating beams by the DQM. Sometido a publicación.
- [10] R. Bellman y J. Casti, Differential quadrature and long-term integration, *J. Math. Anal. App.*, **Vol. 34**, pp. 235-238. 1971.
- [11] C. W. Bert y M. Malik, Differential quadrature method in computational mechanics: A review, *Applied Mechanics Review*, **Vol. 49**, pp.1-28, 1996.
- [12] G. Karami, P. Malekzadeh, S. A. Shahpari. A DQEM for vibration of shear deformable nonuniform beams with general boundary conditions. *Engineering Structures* **Vol. 25**, pp.1169-1178. 2003.
- [13] R.E. Bellman y R.S. Roth, *Methods in approximation: techniques for mathematical modeling*, Editorial D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1986.
- [14] C. Shu, *Differential Quadrature and its application in Engineering*, Editorial Springer-Verlag London Limited, Gran Betaña, 2000.
- [15] ALGOR inc., Linear Stress and Vibration Analysis Processor Referent Manual, *Part N° 6.000.501, Revision 5.00*, Pittsburg, PA, USA. 2004.
- [16] S. Naguleswaran, Lateral vibration of a centrifugally tensioned uniform Euler-Bernoulli beam, *Journal of Sound and Vibration*, **Vol. 176**-5, pp. 613-624. 1994.

#### Agradecimientos

El presente trabajo fue desarrollado en el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur y ha sido patrocinado por el Programa de Investigación y Desarrollo del CONICET, por la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica y por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur.