

Análisis del comportamiento dinámico de placas que sostienen maquinaria elásticamente adosada

Daniel H. Felix, Carlos A. Rossit ⁽¹⁾ y Diana V. Bambill ⁽¹⁾

*Instituto de Mecánica Aplicada, Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur
Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Argentina - e-mail: dhfelix@uns.edu.ar.*

⁽¹⁾ *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
e-mail: carossit@criba.edu.ar, e-mail: dbambill@uns.edu.ar.*

RESUMEN

Se presenta el análisis dinámico de placas o paneles rectangulares ortótropos con condiciones de contorno clásicas que incluyen elementos de masa concentradas, tales como maquinarias, motores, etc., adosados elásticamente a la misma.

El problema es de aplicación frecuente en diversos campos de la ingeniería, toda vez que algún equipo electromecánico operando a frecuencias conocidas se apoye sobre una placa.

Se utiliza el método energético de Ritz y funciones-viga como funciones aproximantes, para la formulación del algoritmo, que permite obtener los coeficientes de frecuencia natural de vibración de cada uno de los modelos propuestos.

Los modelos analizados contemplan, valores diferentes para los parámetros de configuración del sistema, tales como: ubicación de la maquinaria adosada a la placa, rigidez de su vinculación a la misma, peso del equipamiento, condiciones de contorno, ortotropía del material utilizado, etc. El modelo ortótropo describe satisfactoriamente el comportamiento de placas rigidizadas.

Es un hecho a destacar que la metodología utilizada no requiere discretizar el dominio de la estructura, y constituye en consecuencia un aporte complementario de resultados a los que pueden obtenerse por métodos discretos tales como elementos finitos.

Palabras Claves: Vibraciones, placa ortótropa, masa elásticamente adosada, comportamiento dinámico.

1. INTRODUCCIÓN

En el presente estudio se analiza el sistema dinámico que muestra el esquema de las figuras 1a y 1b, el cual está constituido por una placa de material que posee características estructurales diferentes en direcciones perpendiculares [1-3] y por maquinaria elásticamente adosada a la misma.

Resulta fundamental tener en cuenta que el agregado de maquinaria elásticamente adosada a la placa no solo constituye un estado adicional de cargas, sino que genera un nuevo sistema, (placa-resorte-masa concentrada), que adiciona un grado de libertad al sistema original y en consecuencia agrega una nueva frecuencia natural de vibración, la cual podrá estar por debajo de la frecuencia fundamental de la placa o por encima de ésta, desplazando en consecuencia todas o parte de las frecuencias originales.

Adicionalmente las frecuencias propias de la placa, dependiendo de la ubicación y valor de la masa concentrada, pueden verse sensiblemente modificadas.

El tema ha sido ampliamente discutido en la literatura técnico científica [4-6], y en consecuencia es un hecho conocido en la teoría de vibraciones mecánicas que la presencia de masas adosadas altera las frecuencias naturales de vibración de elementos estructurales, así como sus modos normales. Se pretende dar aquí un enfoque original desde el punto de vista de la metodología utilizada para su resolución.

Suponiendo que la placa se encuentra sustentada por vigas perimetrales, se consideran los dos casos extremos de rigidez a torsión de las vigas de contorno, teniéndose el modelo de placa simplemente apoyada, Figura 1a, y el de placa empotrada Figura 1b.

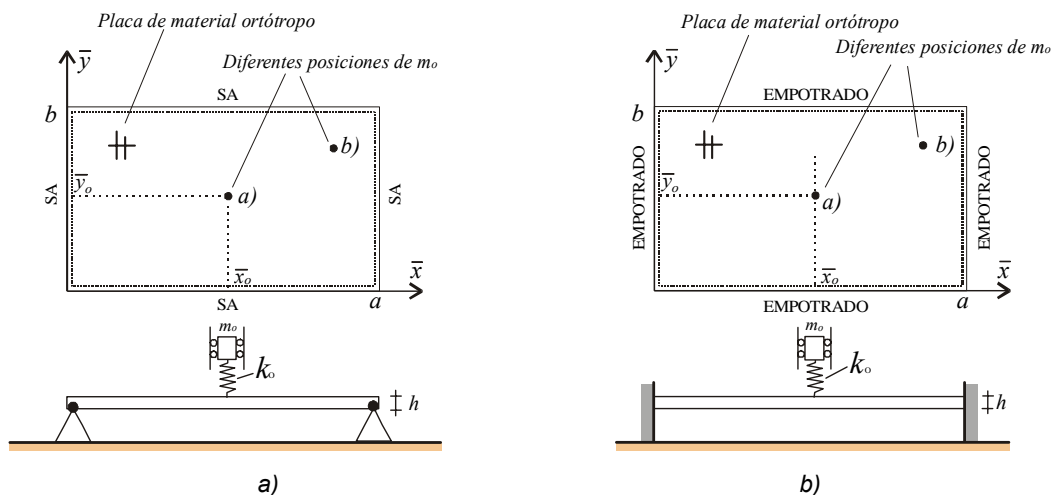


Figura 1: Placa de material ortótropo con una masa concentrada elásticamente adosada: a) Simplemente apoyada; b) Empotrada

El sistema así propuesto, se modela mediante una placa rectangular de material ortótropo, con condiciones de contorno clásicas [1,2] y una masa concentrada de valor m_0 elásticamente adosada a la misma. El presente enfoque resulta válido si las direcciones principales de

elasticidad del material coinciden con las direcciones de las vigas de contorno, puesto que de lo contrario debería tratarse mediante un modelo anisótropo [3].

Se adoptaron las siguientes relaciones para definir las propiedades mecánicas del material de la placa: $\nu_2=0.3$, $D_2=D_K=D_1/2$, mientras que la rigidez del vínculo elástico que une la masa concentrada a la placa se define mediante la constante \bar{K}_0 .

La determinación de los coeficientes correspondientes a las primeras frecuencias naturales de vibración se realizó mediante el método de Ritz [7], utilizando funciones viga como funciones aproximantes de la amplitud de desplazamiento de la placa y de la masa elásticamente adosada, cuando el sistema placa-resorte-masa concentrada ejecuta vibraciones transversales libres [8,9]. Para la implementación del método se utilizó un eficiente algoritmo de cálculo desarrollado por los autores [10, 11].

Es de destacar que este enfoque permite que tanto las soluciones analíticas como las conclusiones obtenidas sean de utilidad en diversas situaciones en que ingenieros y diseñadores, en general, necesiten analizar elementos estructurales similares a los propuestos.

2. DESARROLLO ANALÍTICO

Desde el punto de vista energético, el modelo estructural que muestran los esquemas de las figuras 1a y 1b es gobernado por la siguiente funcional :

$$\begin{aligned} \bar{J}[\bar{W}] = & \frac{1}{2} \int_A \left[D_1 \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2} \right)^2 + 2 D_1 \nu_2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}^2} + D_2 \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + 4 D_k \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right)^2 \right] d\bar{x} d\bar{y} + \frac{1}{2} \bar{K}_o \bar{Z}^2 \\ & - \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_A h \bar{W}^2 d\bar{x} d\bar{y} - \frac{1}{2} m_o \omega^2 (\bar{W}_o + \bar{Z})^2 \end{aligned} \quad (1)$$

La cual evalúa las energías de deformación y cinética máximas de los diferentes componentes del sistema. Se tiene así, que la primer integral de la funcional (1), representa la energía de deformación máxima de la placa considerada ortótropa (el modelo isótropo resulta como caso particular de ésta) y el segundo término evalúa la energía de deformación almacenada en el vínculo elástico existente entre la placa y la masa adosada. Por otra parte los términos que son restados en la funcional representan la energía cinética de la placa y de la masa adosada respectivamente. La forma adimensional de la funcional dada en la expresión (1) resulta:

$$\begin{aligned} J[W] = & \frac{1}{2} \int_{A_n} \left[\lambda^{-2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \nu_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{D_2}{D_1} \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + 4 \frac{D_k}{D_1} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + \frac{1}{2} \lambda^{-1} K_o Z^2 \\ & - \frac{1}{2} \lambda^{-1} \Omega^2 \int_{A_n} W^2 dx dy - \frac{1}{2} \lambda^{-2} \frac{m_o}{m_p} \Omega^2 (W_o + Z)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Los parámetros de configuración del modelo, dados en su forma dimensional en la Ecuación (1) y en su forma adimensional en la Ecuación (2), se detallan en la Tabla 1.

Cuando el sistema acoplado placa-masa-resorte vibra en uno de sus modos normales de vibración, la funcional de energía precedente, alcanza un valor mínimo. Cada una de estas formas naturales que adopta la amplitud de desplazamiento, y que minimizan la funcional es una de las formas modales o modos naturales de vibración del sistema, y los correspondientes autovalores representan los coeficientes naturales de vibración transversal buscados [1,2].

Tabla 1: Descripción de los parámetros del sistema dinámico que se muestra en la figura 1

Descripción	Parámetro de configuración	Forma o relación adimensional
Dimensiones de la placa y esbeltez	$a ; b$	$\lambda = a/b$
Dominio de integración coincidente con el área de la placa	$A = ab$	$A_n = 1$
Coordenadas espaciales de la placa	$\bar{x} ; \bar{y}$	$x = \bar{x}/a ; y = \bar{y}/b$
Coordenadas espaciales de la masa adosada	$\bar{x}_0 ; \bar{y}_0$	$x_0 = \bar{x}_0/a ; y_0 = \bar{y}_0/b$
Deflexión transversal de la placa	$\bar{W} = \bar{W}(\bar{x}, \bar{y})$	$W = W(x, y) = \bar{W}(\bar{x}, \bar{y})/a$
Deflexión transversal de la placa en la posición de la masa adosada	$\bar{W}_o = \bar{W}(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$	$W_o = W(x_0, y_0) = \bar{W}(\bar{x}_0, \bar{y}_0)/a$
Deflexión de la masa adosada relativa a la placa	\bar{Z}	$Z = \bar{Z}/a$
Espesor de la placa	h	-
Densidad del material de la placa	ρ	-
Rigidez a flexión en las dirección x	D_1	-
Rigidez a flexión en las dirección y	D_2	D_2/D_1
Rigidez torsional	D_k	D_k/D_1
Coefficiente de Poisson en la dirección y	ν_2	ν_2
Rigidez del vínculo elástico entre la placa y la masa adosada	\bar{K}_o	$K_o = a^2 \bar{K}_o / D_1$
Masa de la placa	$m_p = \rho h a b$	-
Valor de la masa adosada	m_o	m_o/m_p
Energía total del sistema	$\bar{J}[\bar{W}]$	$J[W] = \frac{\lambda^{-1}}{D_1} \bar{J}[\bar{W}]$
Frecuencias naturales de vibración transversal	ω	$\Omega = \sqrt{\rho h / D_1} a^2 \omega$

La siguiente expresión variacional representa la condición de minimización a satisfacer:

$$\delta J[W] = 0 \tag{3}$$

Al utilizar el método de Ritz, con el empleo de funciones viga como funciones coordenadas, la deflexión de la placa es aproximada en la forma:

$$W(x, y) \cong \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \tag{4}$$

siendo $X_m(x)Y_n(y)$ las funciones viga y $M = N$ el número de términos utilizados en la aproximación. Las A_{mn} son las constantes a determinar mediante la aplicación de la expresión variacional (3), que permiten determinar las autofunciones o formas modales del sistema.

Las funciones viga que aparecen en la expresión (4) resultan para la placa simplemente apoyada [12]:

$$X_m(x) = \text{Sen}(k_m x) \quad ; \quad Y_n(y) = \text{Sen}(k_n y) \quad (5a, b)$$

con

$$k_m = m\pi \quad \text{y} \quad k_n = n\pi \quad (6a, b)$$

Mientras que para la placa empotrada en el contorno toman la forma [12]:

$$\begin{aligned} X_m(x) &= \cosh(k_m x) - \cos(k_m x) + r_m [\text{sen}(k_m x) - \text{senh}(k_m x)] \\ Y_n(y) &= \cosh(k_n y) - \cos(k_n y) + r_n [\text{sen}(k_n y) - \text{senh}(k_n y)] \end{aligned} \quad (7a, b)$$

Con

$$r_m = \frac{\cos(k_m) - \cosh(k_m)}{\text{sen}(k_m) - \text{senh}(k_m)} \quad ; \quad r_n = \frac{\cos(k_n) - \cosh(k_n)}{\text{sen}(k_n) - \text{senh}(k_n)} \quad (8a, b)$$

En este caso los autovalores k_m y k_n se obtienen resolviendo las raíces de la siguiente ecuación característica:

$$\cos(k) \cosh(k) = 1 \quad (9)$$

Siguiendo el método de Ritz, a partir de la expresión (3), se llega al determinante ecuación [8, 9]:

$$|\mathbf{U} - \Omega^2 \mathbf{T}| = 0 \quad (10)$$

el cual permite calcular los coeficientes de frecuencia natural Ω_i buscados. Los coeficientes de frecuencia se relacionan con las frecuencias del sistema por la medio de la expresión:

$$\Omega_i = \sqrt{\frac{\rho h}{D_1}} a^2 \omega \quad (11)$$

como se muestra en la Tabla 1.

\mathbf{U} y \mathbf{T} son las matrices de deformación y cinética del sistema en estudio. De acuerdo al algoritmo propuesto [9,11], la matriz \mathbf{U} que corresponden al sistema completo, se extiende a la siguiente forma:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_p & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} k_o \end{bmatrix} \quad (12)$$

En la Ecuación (12), \mathbf{U}_p es la matriz relacionada a la energía de deformación de la placa sin la masa adosada.

Análogamente la matriz **T** se extiende a la forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_p & \lambda^{-2} \frac{m_o}{m_p} X_q(x_o) Y_l(y_o) \\ \lambda^{-2} \frac{m_o}{m_p} X_m(x_o) Y_n(y_o) & \lambda^{-2} \frac{m_o}{m_p} \end{bmatrix} \quad (13)$$

En la ecuación (13), las funciones $X_q(x_o)$, $Y_l(y_o)$, $X_m(x_o)$ e $Y_n(y_o)$, determinan los valores de las funciones coordenadas (funciones viga), en la posición de la masa adosada y la matriz \mathbf{T}_p es la matriz asociada a la energía cinética de la placa sin masa adosada. Los elementos de \mathbf{U}_p y \mathbf{T}_p contienen 4 subíndices como se observa en las Ecuaciones (14a, b):

$$\mathbf{U}_p = [u_{qlmn}] \quad \mathbf{T}_p = [t_{qlmn}] \quad (14a, b)$$

Y se calculan a partir las siguientes expresiones [10,11]:

$$u_{qlmn} = \lambda^{-2} X_{qm}^c Y_{ln}^a + \nu_2 (X_{qm}^b Y_{nl}^b + X_{mq}^b Y_{ln}^b) + \lambda^2 \frac{D_2}{D_1} X_{qm}^a Y_{ln}^c + 4 \frac{D_k}{D_1} X_{qm}^d Y_{ln}^d \quad (15a)$$

$$t_{qlmn} = \lambda^{-2} \left[X_{qm}^a Y_{ln}^a + \frac{m_o}{m_p} (X_q(x_o) X_m(x_o) Y_l(y_o) Y_n(y_o)) \right] \quad (15b)$$

A su vez los elementos de las Ecuaciones (15a) y (15b) pueden obtenerse integrando las funciones-viga utilizadas como funciones coordenadas [8,10], cuyas expresiones se transcriben a continuación:

$$\begin{aligned} X_{qm}^a &= \int_0^1 X_q X_m dx & X_{qm}^b &= \int_0^1 X_q \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx \\ X_{qm}^c &= \int_0^1 \frac{d^2 X_q}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx & X_{qm}^d &= \int_0^1 \frac{dX_q}{dx} \frac{dX_m}{dx} dx \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Y_{ln}^a &= \int_0^1 Y_l Y_n dy & Y_{ln}^b &= \int_0^1 Y_l \frac{d^2 Y_n}{dy^2} dy \\ Y_{ln}^c &= \int_0^1 \frac{d^2 Y_l}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} dy & Y_{ln}^d &= \int_0^1 \frac{dY_l}{dy} \frac{dY_n}{dy} dy \end{aligned} \quad (17)$$

Donde los subíndices q y m indican los modos normales de las funciones viga utilizadas en la dirección x , mientras que los subíndices l y n indican los modos normales de las funciones viga utilizadas en la dirección y .

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

En la Tabla 2 se verifica la validez y precisión del algoritmo desarrollado, al comparar los coeficientes de frecuencia obtenidos mediante el algoritmo propuesto con valores hallados mediante el método de elementos finitos [13,14], para el caso de una placa rectangular ortótropa simplemente apoyada.

La Tabla 3 contiene el resto de los casos resueltos para el modelo estructural que indica la

Figura 1a. En dicha tabla se observa tanto la influencia de la magnitud y posición de la masa como de la constante del resorte, en los coeficientes de frecuencia naturales del sistema completo.

Tabla 2: Comparación de resultados obtenidos con el método analítico propuesto, y con el método de elementos finitos, para una placa rectangular ortótropa SA, con una masa concentrada elásticamente adosada en x_o, y_o , con $M \times N = 400$ términos.

λ	x_o	y_o	m_o/m_p	K_o/λ	Método	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
1.5	0.8	0.8	0.1	10	MA	14.673	30.453	64.135	79.691
					MEF	14.672	30.453	64.138	79.695
				∞	MA	29.438	58.229	74.697	99.278
					MEF	29.438	58.212	74.684	99.202

Tabla 3: Primeros 4 coeficientes de frecuencia naturales $\Omega_i = \sqrt{\rho h/D_1} a^2 \omega_i$, de una placa rectangular ortótropa, maciza S.A. con una masa elásticamente adosada, en función de la rigidez K_o y de la relación m_o/m_p , para $\lambda=a/b=1.5$, con $M \times N = 400$ términos.

λ	x_o	y_o	m_o/m_p	K_o/λ	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
1.5	0.5	0.5	0.1	1	4.716	30.381	63.910	79.510
				10	14.037	32.041	63.910	79.510
				∞	25.367	63.910	79.510	96.572
			0.3	1	2.723	30.379	63.910	79.510
				10	8.174	31.769	63.910	79.510
				∞	19.871	63.910	79.510	83.668
	0.8	0.8	0.1	1	4.734	30.247	63.932	79.528
				10	14.673	30.453	64.135	79.691
				∞	29.438	58.229	74.697	99.278
			0.3	1	2.733	30.247	63.932	79.528
				10	8.484	30.415	64.127	79.687
				∞	27.479	47.346	71.301	91.730

Se observa que para valores finitos de K_o , el primer coeficiente de frecuencia corresponde al sistema discreto (masa-resorte), modificado por la presencia de la placa.

Obsérvese que hay valores de frecuencia que no se alteran por la presencia del sistema masa resorte. Ello se debe a que corresponden a modos que presentan una línea nodal que contiene al punto de aplicación del sistema discreto y no es tenida en cuenta la inercia rotatoria de la masa adosada

Con el objeto de apreciar mejor la influencia de la rigidez del vínculo elástico en los coeficientes de frecuencia del sistema, se construyeron los gráficos de las Figuras 2 y 3, que corresponden a una placa simplemente apoyada con la masa concentrada elásticamente adosada en el centro de la misma. En la Figura 2 se grafica la frecuencia fundamental del sistema Ω_1 versus la constante elástica K_o y la curva de frecuencia Ω_0 , que corresponde al sistema discreto masa concentrada-resorte. Este gráfico muestra que para valores bajos de K_o los valores de la

frecuencia fundamental del sistema acoplado tienden a los del sistema discreto.

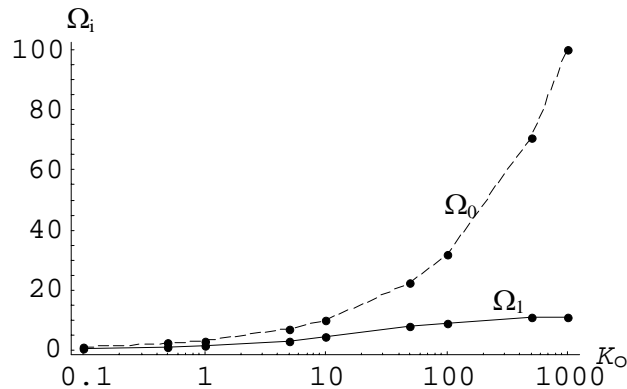


Figura 2: Variación de Ω_1 en una placa ortótropa cuadrada, S.A. en función de la rigidez K_0 , comparado con la frecuencia natural Ω_0 del sistema masa resorte sin la placa, para $x_0 = y_0 = 0.5$ y $m_0/m_p = 0.5$

En la Figura 3 se grafican los primeros coeficientes correspondientes a las frecuencias superiores. El cruce de las curvas indica la alteración en el orden en que aparecen los modos normales de vibración cuando los valores de rigidez K_0 son relativamente altos y, como ocurre en este caso, cuando la masa concentrada se ubica sobre una línea nodal de alguno de los modos superiores analizados.

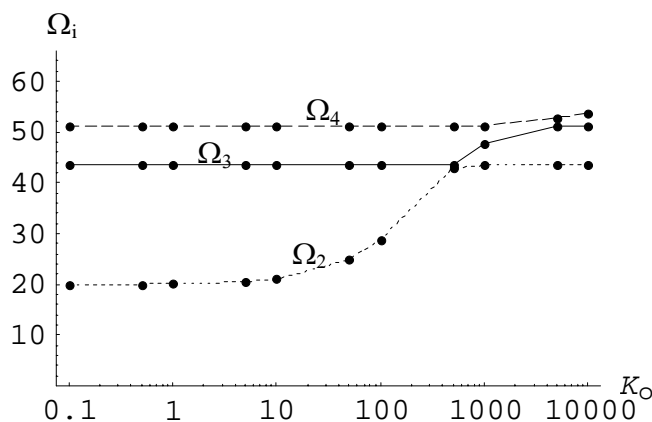


Figura 3: Variación de los coeficientes de frecuencia Ω_i para $n=2, 3$ y 4 , en función de la rigidez del vínculo elástico K_0 expresado en escala logarítmica, para $x_0 = y_0 = 0.5$ y $m_0/m_p = 0.5$.

Ambos gráficos están contruidos en escala semi-logarítmica con el objeto de apreciar mejor las variaciones en las frecuencias.

Se analizó también el modelo de placa rectangular ortótropa, empotrada en su contorno, con la masa concentrada elásticamente adosada en las posiciones que indica la Figura 1b.

En la Tabla 4 se comparan los coeficientes de frecuencia obtenidos con valores hallados mediante el método de elementos finitos.

La Tabla 5 contiene el resto de los casos resueltos para el modelo estructural que indica la

Figura 1b. Si bien la condición de empotramiento en el contorno le confiere mayor rigidez al sistema, el comportamiento, muestra ser similar al descripto para la placa simplemente apoyada.

Tabla 4: Comparación de resultados obtenidos con el método analítico propuesto, y con el método de elementos finitos, para una placa ortótropa, empotrada, con una masa concentrada elásticamente adosada en x_o, y_o .

λ	x_o	y_o	m_o/m_p	K_o/λ	Método	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
1	0.8	0.8	0.3	10	MA	5.723	33.571	61.617	73.645
					MEF	5.723	33.574	61.626	73.652
1.5	0.8	0.8	0.1	10	MA	14.870	51.121	90.637	114.88
					MEF	14.868	51.124	90.645	114.89

Tabla 5: Primeros 4 coeficientes de frecuencia naturales $\Omega_i = \sqrt{\rho h/D_1} a^2 \omega_i$, de una placa rectangular ortótropa, empotrada en el contorno, con una masa elásticamente adosada, en función de la rigidez K_o y de la relación m_o/m_p , para $\lambda=a/b=1.5$, con $M \times N = 400$ términos.

λ	x_o	y_o	m_o/m_p	K_o/λ	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
1.5	0.5	0.5	0.1	1	4.7290	51.208	90.548	114.81
				10	14.523	52.447	90.548	114.81
				∞	39.874	90.548	114.81	125.78
			0.3	1	2.7301	51.207	90.548	114.81
				10	8.3972	52.372	90.548	114.81
				∞	29.318	90.548	112.91	114.81
	0.8	0.8	0.1	1	4.7392	51.082	90.556	114.82
				10	14.870	51.121	90.637	114.88
				∞	50.517	84.387	105.94	127.62
			0.3	1	2.7364	51.082	90.556	114.82
				10	8.5861	51.118	90.636	114.88
				∞	48.329	65.691	97.584	121.21

4. CONCLUSIONES

Las primeras frecuencias naturales del sistema placa-resorte-masa pueden resultar sensiblemente diferentes a las correspondientes a la placa sin la masa adosada, y en consecuencia el análisis del sistema completo se hace necesario.

El sistema en estudio, que contempla la ortotropía del material y la masa concentrada elásticamente adosada permite configurar un modelo más refinado, que mejora la precisión de los resultados. Esto se pone de manifiesto al comparar dichos resultados con aquellos calculados con el método de elementos finitos.

Adicionalmente, el algoritmo utilizado, que fue desarrollado previamente por los autores y se base en el método de Ritz y en la utilización de funciones-viga como funciones coordenadas, requiere un mínimo esfuerzo computacional.

5. REFERENCIAS

- [1] A. W. Leissa, *Vibrations of Plates*, NASA S.P. 160, 1969.
- [2] P. A. A. Laura, *Vibrations of Orthotropic Plates*, Instituto de Mecánica Aplicada, Bahía Blanca, Argentina, 1998.
- [3] S. G. Lekhnitskii, *Anisotropic Plates*, Gordon and Breach Sciens Publishers, 1968.
- [4] H. A. Larrondo, D. R. Avalos and P. A. A. Laura, Transverse vibrations of simply supported anisotropic rectangular plates carrying an elastically mounted concentrated mass, *Journal of Sound and Vibration*, **215**(5), 1195-1202, 1998.
- [5] D. R. Avalos, H. A. Larrondo and P. A. A. Laura, Vibrations of a simply supported plate carrying an elastically mounted concentrated mass. *Ocean Engineering*, **20**(2), 195-205, 1993.
- [6] D. H. Felix, D. V. Bambill, y C. A. Rossit, "Vibraciones libres de una placa rectangular: Influencia de una masa adosada", *Mecánica Computacional*, Vol. XXI pp 2194-2200, MECOM 2002.
- [7] W. Ritz, Theorie der Transversalschwingungen, einer quadratischen Platte mit freien Rändern. *Ann. Physik*, Bd. 28, pp. 737-786, 1909.
- [8] R. P. Felgar Jr, *Formulas for integrals containing characteristic functions of a vibrating beam*, The University of Texas Publication, Circ.Nº 14, 1950.
- [9] C. A. Rossit, D. H. Felix, D. V. Bambill y S. Maiz, Vibraciones transversales libres de placas delgadas sobre fundación elástica con una masa adosada, *Mecánica Computacional*, Vol. **XXIV**, 3235-3253, MECOM 2005.
- [10] D. H. Felix, D. V. Bambill y C. A. Rossit, "Desarrollo de un algoritmo de cálculo para la implementación del método de Rayleigh-Ritz en el cálculo de frecuencias naturales de vibración de placas rectangulares con complejidades diversas", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **20** (2), pp. 123-138, 2004.
- [11] D. H. Felix, *Vibraciones de placas ortótropas con diversas condiciones de vínculo y orificios de borde libre*, Tesis Doctoral, Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur Bahía Blanca, Argentina, 2004.
- [12] C. A. Rossit, *Vibraciones longitudinales y transversales de barras. Desarrollos no armónicos de Fourier*, Tesis de Magíster en Ingeniería, Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1995.
- [13] R. E. Rossi, A note of a finite element for vibrating thin orthotropic rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, **208**(5), 864-868, 1997.
- [14] ALGOR inc., *Linear Stress and Vibration Analysis Processor Reference Manual*. Part Nº 6.000.501, Revision 5.00, Pittsburgh, PA, USA, 2004.

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido patrocinado por el Programa de Investigación y Desarrollo del CONICET, por la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica y por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur y fue desarrollado en el Departamento de Ingeniería de dicha Universidad.