

EL MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL EN EL ANÁLISIS DINÁMICO DEL SISTEMA DOBLE-VIGA, SIMPLEMENTE APOYADO Y DE SECCIÓN CIRCULAR VARIABLE

M.A. De Rosa¹, M. Lippiello², M.J. Maurizi³ y H.D. Martín⁴

¹*Dipartimento di Strutture, Geotecnica, Geologia Applicata all'Ingegneria
Università degli Studi della Basilicata, Viale dell'Ateneo Lucano 10,
85100, Potenza, Italia. E-mail: mderosa@unibas.it*

²*Dipartimento di Costruzioni e Metodi Matematici in Architettura (CoMMA)
Via Forno Vecchio 36, 80134, Napoli, Italia. E-mail: maria.lippiello@unina.it*

³*Instituto de Mecánica Aplicada (IMA) – Departamento de Ingeniería
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina.
E-mail: ima@criba.edu.ar*

⁴*Regional Académica Reconquista – Universidad Tecnológica Nacional
Gral. Lopez 741, 3560 Reconquista, Santa Fe.
E-mail: hdmartin@criba.edu.ar*

RESUMEN

En el presente trabajo se estudian las vibraciones libres de dos vigas paralelas, de sección circular variable, vinculadas entre sí por un modelado elástico homogéneo tipo Winkler y simplemente apoyadas en sus extremos.

El método adoptado para la solución del sistema de dos ecuaciones diferenciales a derivadas parciales es aquel de la cuadratura diferencial (simbolizado por DQM), brillantemente descrito en el último decenio del siglo pasado y ampliamente reconocido por su versatilidad y sencillez de aplicación en diversas ramas de la ingeniería.

Tanto el sistema estructural propuesto como la metodología empleada para su análisis permiten a su vez la determinación de casos posibles de variaciones óptimas de la sección.

Palabras Claves: doble-viga, cuadratura diferencial, vibraciones libres.

1. INTRODUCCIÓN

El método de cuadratura diferencial ha sido ideado por sus proponentes como una alternativa potencial a las técnicas de solución numérica convencionales, tales como los métodos de diferencias finitas y elementos finitos.

Formulando la regla de cuadratura para una derivada como una extensión análoga de la cuadratura para integrales, Bellman y Casti [1] propusieron el método que nos ocupa para la solución numérica de problemas de valores iniciales de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Después de 1980 sus aplicaciones fueron ampliamente desarrolladas gracias al trabajo innovativo en la computación, por parte de otros investigadores, de los denominados coeficientes ponderados (o pesados). Como resultado, ha emergido como una herramienta de discretización numérica poderosa con la cual obtener resultados muy precisos usando un número considerablemente pequeño de puntos de redes o mallas, y en consecuencia, requiriendo un esfuerzo computacional relativamente pequeño.

Su amplio y eficiente empleo en una variedad de problemas de las ciencias físicas e ingenieriles, motivó que Bert y Malik [2] presentaran en 1996 una brillante revisión cronológica, sobre todo lo acontecido y publicado hasta aquel año, en lo concerniente al desarrollo y aplicación del DQM en más de un centenar de trabajos.

Entre los posteriores avances cabe citar el generado por Chen y otros [3] y la variación a su formulación presentada por De Rosa y Franciosi [4].

Por otra parte, existen aplicaciones como las estructuras aeronáuticas y aeroespaciales, los edificios elevados, los mástiles-antenas y las torres-tanque, donde se utilizan las vigas no uniformes con el fin de obtener un modelo simplificado que permita una mejor distribución de la resistencia, simulando su comportamiento dinámico y conociendo los modos de vibración, todo ello con el objeto de satisfacer los requerimientos constructivos. Como resultado, el problema de las vibraciones transversales de vigas con propiedades variables y su diseño óptimo han sido tópicos de creciente interés durante los últimos cincuenta años.

Como los coeficientes de la ecuación de movimiento de vigas no uniformes son variables, las soluciones exactas en forma cerrada no resultan en general disponibles como solución de vibraciones transversales, excepto en el caso de vigas cónicas y las que poseen una configuración de cuña.

El sistema doble-viga que aquí se analiza, de sección circular variable y elásticamente vinculado, encuentra su aplicación como elemento constituyente de fundaciones de grandes reservorios y plantas nucleares, como miembros estructurales y componentes de pantallas de protección contra desmoronamientos en túneles y carreteras, o como dispositivo esencial con el fin de evitar la erosión de costas marinas y desembocaduras de grandes ríos.

La decisión de adoptar el DQM para encontrar la solución sobre la respuesta dinámica del sistema mencionado se basa en la experiencia previa lograda por De Rosa y Franciosi [5], cuando proponen el método en la búsqueda de las vibraciones libres del sistema de vigas simplemente apoyadas, la adopción del mismo que realizan De Rosa y Lippiello [6] al estudiar las vibracio-

nes libres de la doble-viga a sección constante, y más aún, cuando De Rosa, Auciello y Lippiello [7] logran con su empleo óptimos resultados en el análisis de la estabilidad dinámica de una viga en voladizo, de sección variable y en presencia de una fuerza axial inclinada.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El modelo propuesto prevé un esquema de dos vigas de sección circular variable y de igual longitud L , ubicadas paralelamente y apoyadas en sus extremos. Las dos vigas están vinculadas por un suelo tipo Winkler con coeficiente de rigidez k_w , tal como se indica en la Figura 1.

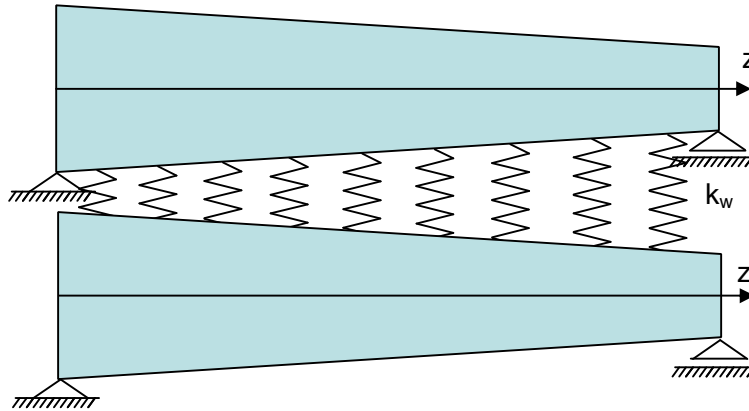


Figura 1: Sistema doble viga, de sección circular variable, apoyado en sus extremos y elásticamente vinculado entre sí.

Si se usa la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, para las vibraciones libres de la doble - viga de sección variable e inmersa en un suelo tipo Winkler, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} (EI(z)v_1''(z))'' - \omega^2 \rho A(z)v_1(z) + k_w(v_1(z) - v_2(z)) &= 0 \\ (EI(z)v_2''(z))'' - \omega^2 \rho A(z)v_2(z) + k_w(v_2(z) - v_1(z)) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

donde $v_1(z)$ y $v_2(z)$ son los desplazamientos transversales de la primera y segunda viga, E es el módulo de Young, ρ la densidad de masa e I_z y A_z son el momento de inercia y el área de la sección de ambas vigas, dadas por:

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{r_0^4}{4} \left(1 + \frac{e z}{L}\right)^{4q}; & A(z) &= \pi r_0^2 \left(1 + \frac{e z}{L}\right)^{2q} \\ I_0 &= \frac{\pi r_0^4}{4}; & A_0 &= \pi r_0^2; & g(z) &= \left(1 + \frac{e z}{L}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

siendo r_0 el radio de la sección circular inicial, e un coeficiente de la ley de variación del radio de la sección, q un exponente de la misma y ω^2 la frecuencia libre de vibración del sistema. Sustituyendo las expresiones anteriores en el sistema indicado como Ecuación (1), convierte a las ecuaciones diferenciales en:

$$\begin{aligned}
 & K4q(4q-1)\frac{e^2}{L^2}g(z)^{(4q-2)}v_1'' + K8q\frac{e}{L}g(z)^{(4q-1)}v_1''' + \\
 & + Kg(z)^{4q}v_1'''' - mg(z)^{2q}\omega^2v_1 + k_w(v_1 - v_2) = 0 \\
 & K4q(4q-1)\frac{e^2}{L^2}g(z)^{(4q-2)}v_2'' + K8q\frac{e}{L}g(z)^{(4q-1)}v_2''' + \\
 & + Kg(z)^{4q}v_2'''' - mg(z)^{2q}\omega^2v_2 + k_w(v_2 - v_1) = 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

designando con $K = El_0$ y $m = \rho A_0$ a la rigidez y masa de la sección recta inicial.

Para el esquema de viga simplemente apoyada, las condiciones límites son:

$$v_i(0,t) = v_i''(0,t) = v_i(L,t) = v_i''(L,t) = 0, \quad i = 1, 2 \tag{4}$$

Se pasa ahora del dominio físico $[0, L]$ al dominio natural Gaussiano $[-1, 1]$ a través de la siguiente transformación:

$$\zeta = 2\frac{z}{L} - 1 \tag{5}$$

Así la ley de variación $g(z)$ se transforma en:

$$f(\zeta) = \left(1 + \frac{e}{2}(\zeta + 1)\right) \tag{6}$$

Si se sustituyen las Ecuaciones (5) y (6) en las ecuaciones del sistema (3), ellas asumirán las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 & f(\zeta)^{2q}v_1''''(\zeta) + 4qef(\zeta)^{(2q-1)}v_1'''(\zeta) + q(4q-1)e^2f(\zeta)^{(2q-2)}v_1''(\zeta) - \\
 & \Omega^2v_1(\zeta) + \frac{K_w}{f(\zeta)^{2q}}(v_1(\zeta) - v_2(\zeta)) = 0 \\
 & f(\zeta)^{2q}v_2''''(\zeta) + 4qef(\zeta)^{(2q-1)}v_2'''(\zeta) + q(4q-1)e^2f(\zeta)^{(2q-2)}v_2''(\zeta) - \\
 & \Omega^2v_2(\zeta) + \frac{K_w}{f(\zeta)^{2q}}(v_2(\zeta) - v_1(\zeta)) = 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

donde:

$$K_w = (k_w L^4 / 4K) \quad ; \quad \Omega^2 = \omega^2 mL^4 / 16K \tag{8}$$

Las condiciones en los límites del nuevo dominio resultan ahora:

$$\begin{aligned}
 & v_i(\zeta = -1) = 0; \quad v_i''(\zeta = -1) = 0; \\
 & v_i(\zeta = 1) = 0; \quad v_i''(\zeta = 1) = 0; \quad i = 1, 2
 \end{aligned} \tag{9}$$

3. MÉTODO DE LA CUADRATURA DIFERENCIAL

Para poder discretizar las ecuaciones diferenciales (3), se subdivide el intervalo natural de cada una de ellas en n segmentos definidos por $n+1$ puntos localizados en las abscisas $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+1}$. Para concretarlo se asumen $n+7$ incógnitas nodales:

$$\mathbf{d}^T = (u_1, u_1', u_1'', u_1''', u_2, \dots, u_{n+1}, u_{n+1}', u_{n+1}'', u_{n+1}''') \tag{10}$$

es decir, el desplazamiento en cada punto nodal y las primeras tres derivadas de los puntos extremos.

El desplazamiento $v(\zeta)$ puede ser aproximado de esta forma:

$$v(\zeta) = \alpha C = \sum_{i=1}^{n+7} \alpha_i C_i \quad (11)$$

con α el vector fila de los monomios y C el vector columna de las coordenadas lagrangeanas. Se puede asignar a α la siguiente serie:

$$\alpha = (1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n+6}) \quad (12)$$

donde los puntos nodales son así definidos:

$$\zeta_i = \frac{2(i-1)-n}{n}; \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (13)$$

Las tres primeras derivadas del desplazamiento $v(\zeta)$ son:

$$v'(\zeta) = \alpha' C; \quad v''(\zeta) = \alpha'' C; \quad v'''(\zeta) = \alpha''' C \quad (14)$$

y si se las sustituye oportunamente en la Ecuación (10), resulta:

$$\mathbf{d} = (\alpha_1, \alpha_1', \alpha_1'', \alpha_1''', \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}', \alpha_{n+1}'', \alpha_{n+1}''')^T C = N_0 C \quad (15)$$

Siguiendo el mismo procedimiento desarrollado en la publicación de Chen y otros [3], se obtiene:

$$A = N_0' N_0^{-1}, \quad B = AA, \quad G = AAA, \quad D = AAAA \quad (16)$$

En lo que respecta a nuestro sistema de ecuaciones diferenciales, es necesario adoptar $2(n+7)$ incógnitas nodales, por lo cual, el sistema (7) se puede discretizar como sigue:

$$\begin{bmatrix} L_{1,1} + K_w / f^{2q} & L_{1,2} & \dots & L_{1,n+7} & -K_w / f^{2q} & 0 & \dots & 0 \\ L_{2,1} & L_{2,2} + K_w / f^{2q} & \dots & L_{2,n+7} & 0 & -K_w / f^{2q} & \dots & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & \dots & L_{3,n+7} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{4,1} & L_{4,2} & \dots & L_{4,n+7} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{n+7,1} & L_{n+7,2} & \dots & L_{n+7,n+7} + K_w / f^{2q} & 0 & 0 & \dots & -K_w / f^{2q} \\ -K_w / f^{2q} & 0 & \dots & 0 & L_{1,1} + K_w / f^{2q} & L_{1,2} & \dots & L_{1,n+7} \\ 0 & -K_w / f^{2q} & \dots & 0 & L_{2,1} & L_{2,2} + K_w / f^{2q} & \dots & L_{2,n+7} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & L_{3,1} & L_{3,2} & \dots & L_{3,n+7} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & L_{4,1} & L_{4,2} & \dots & L_{4,n+7} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -K_w / f^{2q} & L_{n+7,1} & L_{n+7,2} & \dots & L_{n+7,n+7} + K_w / f^{2q} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_1^{(1)'} \\ v_1^{(1)''} \\ v_1^{(1)'''} \\ v_2^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n+1}^{(1)'''} \\ v_1^{(2)} \\ v_1^{(2)'} \\ v_1^{(2)''} \\ v_1^{(2)'''} \\ v_2^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n+1}^{(2)'''} \end{bmatrix} = \Omega^2 \mathbf{I} \begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_1^{(1)'} \\ v_1^{(1)''} \\ v_1^{(1)'''} \\ v_2^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n+1}^{(1)'''} \\ v_1^{(2)} \\ v_1^{(2)'} \\ v_1^{(2)''} \\ v_1^{(2)'''} \\ v_2^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n+1}^{(2)'''} \end{bmatrix} \quad (17)$$

donde (18) es la versión discretizada del operador diferencial:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & f(\zeta)^{2q} \partial^4 / \partial \zeta^4 + 4eqf(\zeta)^{2q-1} \partial^3 / \partial \zeta^3 \\ & + (e^2 q(4q-1))f(\zeta)^{2q-2} \partial^2 / \partial \zeta^2 \end{aligned} \quad (18)$$

En consecuencia será:

$$L_{ij} = (f_i)^{2q} D_{ij} + 4eq(f_i)^{2q-1} G_{ij} + (e^2 q(4q-1))(f_i)^{2q-2} B_{ij} \quad \text{con } i, j = (1, (n+7)) \quad (19)$$

Se imponen ahora las condiciones en los límites indicados como Ecuación (4). A continuación es conveniente permutar las filas (y las columnas) (n+4), (n+6), (n+8), (n+10), (2n+11) y (2n+13) con las filas (y columnas), 2, 4, 5, 6, 7, 8, por lo cual resulta ser finalmente una matriz particionada de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{L}_{aa} & \mathbf{L}_{ab} \\ \mathbf{L}_{bb} & \mathbf{L}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \Omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{L}_{aa} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{L}_{ab} = \emptyset \quad (21)$$

$$\mathbf{w}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_1^{(1)''} \\ v_{n+1}^{(1)} \\ v_{n+1}^{(1)''} \\ v_1^{(2)} \\ v_1^{(2)''} \\ v_{n+1}^{(2)} \\ v_{n+1}^{(2)''} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_6^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ v_1^{(1)'} \\ v_{n+1}^{(1)'} \\ v_1^{(1)'''} \\ v_{n+1}^{(1)'''} \\ v_2^{(1)} \\ v_1^{(2)'} \\ v_3^{(1)} \\ v_1^{(2)''} \\ v_2^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n+1}^{(2)''} \end{pmatrix} \quad (22)$$

con \mathbf{L}_{aa} de dimensión (8 x 8), \mathbf{L}_{ab} de dimensión (8 x (2n+6)), \mathbf{L}_{ba} de dimensión ((2n+6) x 8) y por último \mathbf{L}_{bb} de dimensión ((2n+6) x (2n+6)).

Se arriba entonces al siguiente problema de autovalores:

$$(\mathbf{L}_{bb} - \Omega^2 \mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (23)$$

4. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Se ha examinado un esquema de doble-viga cuyas características geométricas y físicas son idénticas para cada una de ellas:

$$K = EI = 4 \times 10^6 \text{ Nm}^2, \quad m = \rho A = 1 \times 10^2 \text{ Kgm}^{-1}, \\ L = 10m, \quad k_w \in [0,5] 10^5 \text{ Nm}^{-2}$$

El análisis numérico se ha efectuado utilizando el programa de cálculo simbólico *Mathematica* [8] y el sistema de ecuaciones ha sido discretizado en n = 20 puntos para cada una de ellas.

En la Tabla 1 se citan los valores de las frecuencias libres de vibración ω_{ih} , con $i = 1,2$, índice que denota la primera y segunda viga, y $h = 1,2$, índice que identifica la primera y segunda frecuencia libre. Con la modificación del coeficiente e de la ley de variación de la sección, del exponente q de la misma, y del coeficiente de rigidez k_w del modelo elástico homogéneo, se obtienen los distintos valores de las frecuencias.

Tabla 1 Valores de la frecuencia libre de vibración en función del coeficiente e de la ley de variación de la sección, del exponente q de dicha ley y del coeficiente de rigidez k_w del modelo elástico homogéneo.

$k_w = 0$	h	q = 1		q = 1,5		q = 2	
		1	2	1	2	1	2
e = - 0,5	ω_{1h}	13,9136	58,2229	11,1951	50,0147	8,7491	43,0006
	ω_{2h}	13,9136	58,2229	11,1951	50,0147	8,7491	43,0006
e = 0,5	ω_{1h}	24,1483	98,1088	26,3287	109,353	28,4298	121,888
	ω_{2h}	24,1483	98,1088	26,3287	109,353	28,4298	121,888
$k_w = 2 \times 10^5$	h	1	2	1	2	1	2
e = - 0,5	ω_{1h}	13,9136	58,2229	11,1951	50,0147	8,7491	43,0006
	ω_{2h}	82,8551	109,790	89,5663	125,065	95,5951	140,476
e = 0,5	ω_{1h}	24,1483	98,1088	26,3287	109,353	28,4298	121,888
	ω_{2h}	56,2552	111,078	52,7379	119,428	50,0625	129,826
$k_w = 5 \times 10^5$	h	1	2	1	2	1	2
e = - 0,5	ω_{1h}	13,9136	58,2229	11,1951	50,0147	8,7491	43,0006
	ω_{2h}	125,657	157,859	134,593	179,218	142,688	198,787
e = 0,5	ω_{1h}	24,1483	98,1088	26,3287	109,353	28,4298	121,888
	ω_{2h}	83,5472	128,229	76,4578	133,253	70,6265	140,975

Como se puede notar, para $k_w = 0$ encontramos los valores clásicos de las frecuencias libres de vibración de las vigas de sección circular variable y simplemente apoyadas en sus extremos. Los valores son idénticos porque las características geométricas y físicas de ambas son coincidentes. Para $e = -0,5$ las primeras y segundas frecuencias libres de vibración decrecen con el aumento del exponente q de la ley de variación del radio. En el caso para el cual $e = +0,5$, con el aumento de q también las dos frecuencias de vibración libre aumentan. Esto se puede explicar cualitativamente recordando que la primera frecuencia está dada por la relación entre la rigidez y la masa. Si se halla esta relación se puede notar, que a menos de una constante, la frecuencia es proporcional a $A(z)$, que para $e = -0,5$ decrece y para $e = +0,5$ crece.

Cuando se introduce el lecho de resortes elásticos los autovalores de la segunda viga cambian y, como se observa en la Tabla 1, crecen para $e = -0,5$, mientras que para $e = +0,5$ la primera frecuencia decrece y la segunda crece con el aumento de q . Esto se debe ciertamente a la influencia del lecho elástico sobre la segunda viga.

5. CONCLUSIONES

Ha sido señalado por Z. Oniszczuk [9]: "El análisis general de las vibraciones libres de un sistema doble-viga elásticamente conectado es complicado y laborioso en virtud de la gran variedad de posibles combinaciones de las condiciones de borde". En el presente trabajo se han calculado las vibraciones libres de dos vigas de sección variable, conectadas elásticamente

entre sí con una ley tipo Winkler y simplemente apoyadas en sus extremos. Se ha obtenido el sistema de ecuaciones diferenciales, que después resulta oportunamente discretizado con el método conocido en la literatura con el nombre de las cuadraturas diferenciales.

Si se adjuntaran al lecho de resortes un conjunto o complejo de amortiguadores, se podría fácilmente retornar al clásico problema de los absorbedores dinámicos de vibraciones.

6. REFERENCIAS

- [1] R. E. Bellman, J. Casti, Differential quadrature and long-term integration, *J. Math. Anal. Appl.*, **Vol.** 34, pp. 235-238, 1971.
- [2] C. W. Bert, M. Malik, Differential quadrature method in computational mechanics, *Appl. Mech. Rev.*, **Vol.** 49, N° 1, pp. 1-28, 1996.
- [3] W. Chen, A. G. Striz, C. W. Bert, A new approach to the differential quadrature method for fourth-order equations, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **Vol.** 40, pp.1941-1956, 1997.
- [4] M. A. De Rosa, C. Franciosi, On natural boundary conditions and DQM, *Mech. Res. Comm.*, **Vol.** 25(3), pp.279-286, 1998.
- [5] M. A. De Rosa, C. Franciosi, Non-classical boundary conditions and DQM, *J. of Sound and Vibr.*, **Vol.** 212(4), pp. 743-748, 1998.
- [6] M. A. De Rosa, M. Lippiello, Non-classical boundary conditions and DQM four double-beams, *Mech. Res. Comm.*, **Vol.** 34(7-8), 538-544, 2007.
- [7] M. A. De Rosa, N. M. Auciello, M. Lippiello, Dynamic stability analysis and DQM for beams with variable cross-section, *Mech. Res. Comm.*, **Vol.** 35(3), pp. 187-192, 2008.
- [8] S. Wolfram, *The Mathematica Book*, Third ed., Wolfram Media Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [9] Z. Oniszczuk, Free transverse vibrations of elastically connected simply supported double-beam complex system, *J. of Sound and Vibr.*, **Vol.** 232(2), pp 387-403, 200.