

Efecto de la excitación del soporte en una viga de acero. Estudio analítico, experimental y simulación numérica del ensayo

Patricia M. Bellés*¹ y José L. Pombo²

¹ *Depto. de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Universidad Nacional del Sur.
Comisión de Investigaciones Científicas (CIC) de la Provincia de Buenos
Aires. Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. e-mail: pbelles@criba.edu.ar*

² *Depto. de Ingeniería, Laboratorio de Vibraciones Mecánicas, Universidad Nacional del Sur.
Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. e-mail: jlpombo@criba.edu.ar*

RESUMEN

El presente trabajo fue desarrollado en el Laboratorio de Vibraciones Mecánicas del Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur. En publicaciones anteriores [1, 2] fueron estudiados los efectos de cargas de impacto a una viga cantilever de acero. En este caso se estudia la respuesta dinámica de la viga bajo una excitación transitoria en el empotramiento consistente en un desplazamiento transversal con una variación temporal de tipo armónico la cual actúa en un intervalo acotado en el tiempo.

Este tipo de excitación tiene múltiples aplicaciones en estructuras móviles o en vibraciones inducidas mecánicamente [3, 5-7]. Aunque una excitación armónica pura puede no ser tan frecuente como otros tipos de movimientos, su comprensión es esencial para conocer la respuesta del sistema a excitaciones más generales. Un ejemplo en el campo de la dinámica estructural, es el efecto de un sismo sobre una estructura en cuyo caso la ley de variación del movimiento de la base no sería de tipo sinusoidal.

El conocimiento de las vibraciones inducidas por el movimiento del soporte permite controlar las amplitudes del movimiento oscilatorio introduciendo cambios, tanto en la sollicitación externa, como en las características dinámicas de la estructura. Grandes amplitudes de vibración que comprometan la seguridad del sistema, pueden prevenirse empleando amortiguadores o absorbedores. En la práctica suele incrementarse el amortiguamiento de la estructura empleando diferentes métodos (activo, pasivo, semi-activo).

Se determinaron analítica, numérica y experimentalmente las frecuencias naturales de vibración libre más bajas y los modos asociados a ellas. Posteriormente se excitó el soporte en coincidencia con la frecuencia fundamental y se estudió la respuesta dinámica de la viga.

El análisis numérico con elementos finitos se realizó con el módulo de cálculo Mechanical Event Simulation (MES) de Algor, que permite evaluar resultados en el dominio del tiempo y de la frecuencia [4, 5].

Palabras Claves: excitación del soporte, viga cantilever, experimental, elementos finitos.

1. INTRODUCCIÓN

Ejemplos típicos de excitación del soporte son los movimientos de la fundación de un edificio debido a un sismo, vibraciones producidas por tránsito pesado o maquinarias, o el movimiento de la base de un elemento de una maquina. En muchas ocasiones la excitación del soporte puede inducir la sollicitación más severa para una estructura, y en consecuencia puede ser decisiva para el diseño. Numerosos autores han tratado este problema [3-10] y son diversos los caminos que pueden seguirse, según cual sea el objetivo del estudio.

Para un sistema ligeramente amortiguado que se encuentra bajo la acción de una excitación armónica del soporte, se pueden obtener dos tipos de respuesta: en el tiempo o en la frecuencia. La respuesta en el tiempo debería extenderse por un período sumamente largo de tiempo para que pueda alcanzarse el estado estacionario, lo cual podría ser prohibitivo desde un punto de vista práctico. En este caso se puede recurrir a la respuesta en frecuencia ya que esta provee la respuesta estacionaria, mientras que la contribución de la parte transitoria de la respuesta del sistema no puede ser capturada con este tipo de análisis. Si se requiere la parte transitoria debe hacerse un análisis por superposición modal o por integración directa. Sin embargo, cuando la parte transitoria de la respuesta no es de interés o es muy corta, como es el caso de la mayor parte de los problemas de vibración de máquinas, el uso de la respuesta en frecuencia es apropiado. El análisis de la respuesta en frecuencia provee la respuesta estacionaria cuando la estructura está sometida a una sola carga armónica. Cuando la excitación incluye más de una frecuencia, se obtienen las amplitudes de respuesta del estado estacionario (si el sistema es lineal) combinando las respuestas armónicas individuales.

El desarrollo del presente trabajo incluye los siguientes enfoques del problema: en primer lugar se presenta un breve planteo teórico del modelo analítico y del método de superposición modal. Luego se describen los ensayos experimentales realizados y sus resultados. Por último se muestran resultados numéricos en el dominio del tiempo y de la frecuencia, obtenidos con un software comercial que emplea el método de elementos finitos.

2. MODELO ANALITICO

2.1. Frecuencias naturales de la viga cantilever

Sea una viga cantilever esbelta con longitud L , densidad ρ , rigidez flexional EI y área de la sección transversal A . Las dimensiones de la sección transversal son pequeñas en comparación con su longitud por lo que la deformación por corte y la inercia rotacional con respecto al eje neutro se desprecian. La influencia de dichos efectos no se tiene en cuenta [8]. El problema de la vibración flexional de una viga uniforme y descargada, está dada por la ecuación diferencial homogénea correspondiente al modelo Bernoulli-Euler

$$EI \frac{\partial^4 y(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Donde $y(\bar{x}, t)$ es el desplazamiento transversal, \bar{x} la variable longitudinal ($0 \leq \bar{x} \leq L$) y t el tiempo. Se introduce la abscisa adimensional $x = \frac{\bar{x}}{L}$ ($0 \leq x \leq 1$), y la notación $\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial x}$; ... y $\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial t}$; La (1) se puede escribir de la forma

$$y''''(x, t) + a^2 y(x, t) = 0 \quad \text{con} \quad a^2 = \frac{\rho A}{EI} L^4 \quad (2)$$

Dado que (2) involucra una derivada de segundo orden con respecto al tiempo y una derivada cuarta con respecto a x , se necesitan dos condiciones iniciales y cuatro condiciones de borde para obtener una solución única $y(x, t)$.

Nota: sólo se describirá brevemente este tema, el mismo puede encontrarse ampliamente desarrollado en numerosos textos y publicaciones [3, 5-10].

La solución de la (2) puede obtenerse por separación de variables asumiendo que el movimiento en vibración libre consiste en una función de posición $\varphi(x)$, cuya amplitud varía en función del tiempo de la forma $y(x, t) = \varphi(x)T(t)$, de modo que (2) resulta en

$$T(t) \varphi''''(x) + a^2 \varphi(x) \dot{T}(t) = 0, \quad \text{o también} \quad \frac{\varphi''''(x)}{\varphi(x)} = -a^2 \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \Omega^2 \quad (3)$$

Dando lugar a las siguientes ecuaciones en las cuales ahora las derivadas (que se siguen indicando con comillas y con puntos) son totales

$$\varphi''''(x) - \Omega^2 \varphi(x) = 0 \quad (4)$$

$$\dot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (5)$$

$$\text{Con el parámetro adimensional de frecuencia: } \Omega^2 = a^2 \omega^2 = \frac{\rho A}{EI} L^4 \omega^2 \quad (6)$$

Llamando ω_j ($j = 1, 2, \dots$) a las frecuencias naturales, los parámetros adimensionales son

$$\Omega_j^2 = a^2 \omega_j^2 = \frac{\rho A}{EI} L^4 \omega_j^2 \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (7)$$

La (5) es la ecuación temporal de vibración libre, cuya solución es: $T(t) = A \cos \omega t + B \sen \omega t$.

Las constantes A y B dependen de condiciones iniciales de velocidad inicial y desplazamiento. Por otra parte, la ecuación espacial (4) puede resolverse asumiendo una solución de la forma $\varphi(x) = C e^{\beta x}$ (C y s constantes). La solución general resulta de la forma

$$\varphi(x) = C_1 \sen \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x \quad (8)$$

El valor de β y de tres de las cuatro constantes (C_1, C_2, C_3, C_4) se calculan con las cuatro condiciones de borde y definen la forma modal. La constante que queda indeterminada está vinculada con la amplitud de la vibración.

2.2. Movimiento armónico del soporte

Sea el caso particular de la vibración transversal (flexional) de la viga excitada por un movimiento armónico impuesto en su empotramiento, que se expresa

$$Y(t) = Y_0 \cos \lambda t \quad (\text{o } Y(t) = Y_0 \text{sen} \lambda t) \quad (9)$$

Y_0 : amplitud de la excitación, λ : frecuencia excitadora. Las condiciones de borde e iniciales

$$\text{son:} \quad \begin{array}{ccc} y(0,t) = Y(t) & y''(1,t) = 0 & y(x,0) = 0 \\ \underbrace{y'(0,t) = 0}_{\substack{\text{desplazamiento transversal y} \\ \text{pendiente en el empotramiento}}} & \underbrace{y'''(1,t) = 0}_{\substack{\text{momento flector y corte} \\ \text{en el extremo libre}}} & \underbrace{\dot{y}(x,0) = 0}_{\substack{\text{viga inicialmente} \\ \text{recta y en reposo}}} \end{array} \quad (10)$$

Se introduce en (2) una redefinición de la elástica: $u(x,t) = y(x,t) - Y(t)$, resultando la ecuación $u'''' + a^2 \ddot{u} = -a^2 \ddot{Y}$. Finalmente se obtiene la siguiente ecuación diferencial con condiciones de borde homogéneas:

$$u'''' + a^2 \ddot{u} = a^2 \lambda^2 Y_0 \cos \lambda t \quad (11)$$

$$u(0,t) = 0; \quad u'(0,t) = 0; \quad u''(1,t) = 0; \quad u'''(1,t) = 0 \quad (12)$$

2.3. Superposición modal

El problema gobernado por (11) y (12) puede resolverse por el método de superposición modal.

Las formas modales $\varphi_j(x, \Omega_j)$ verifican la ecuación: $\varphi_j'''' - \Omega_j^2 \varphi_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots$) (13)

Con cuatro condiciones de borde homogéneas. Las φ_j deben satisfacer la condición de ortogonalidad. Para resolver la (11) se propone para la función $u(x,t)$ una combinación lineal de las formas modales, multiplicada por una función desconocida $\alpha_j(t)$, a determinar.

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(t) \varphi_j(x, \Omega_j) \quad (14)$$

Reemplazando en (11) se tiene: $\sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j(t) \varphi_j''''(x, \Omega_j) + a^2 \ddot{\alpha}_j(t) \varphi_j(x, \Omega_j)) = a^2 \lambda^2 Y_0 \cos \lambda t$ (15)

Si (de (13)) se introduce $\varphi_j'''' = \Omega_j^2 \varphi_j$ ($j = 1, 2, \dots$) en (15) y adoptando $\alpha_j(t) = Y_0 \beta_j \cos \lambda t$, donde β_j (con $j = 1, 2, \dots$) son constantes arbitrarias, finalmente se obtiene

$$\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j (\Omega_j^2 - a^2 \lambda^2) \varphi_j = a^2 \lambda^2 Y_0 \quad (16)$$

Multiplicando miembro a miembro por φ_i e integrando (por ortogonalidad se eliminan los términos con $i \neq j$), pueden obtenerse los coeficientes β_j . Por último se obtienen los $\alpha_j(t) = Y_0 \beta_j \cos \lambda t$, y de (14) se conoce $u(x,t)$.

Nota: Como se ha dicho, para un estudio detallado de este tema se puede recurrir a la bibliografía de referencia.

3. DESCRIPCIÓN DEL MODELO ESTUDIADO

Se analiza una viga de acero de sección rectangular en voladizo.

Geometría de la sección transversal de la viga: altura (h) = 0.0066 m., base (b) = 0.0247 m.

Longitud de la viga (L) = 0.75 m.

Propiedades del material: densidad (ρ)=7850 kg/m³; módulo de Young (E)=2.1x 10⁶ Kg/cm²=2.06x10¹¹ N/m²; coeficiente de Poisson (μ)=0.3.

4. ENSAYO EXPERIMENTAL

En primer lugar se calcularon las frecuencias naturales de vibración de la viga cantilever para posteriormente estudiar su respuesta dinámica bajo la acción de la excitación aplicada en el empotramiento. En las fotografías de la Figura 1 se muestra la viga montada sobre el soporte en el laboratorio y un detalle del empotramiento y el sensor de proximidad que se utilizó para la determinación de las frecuencias naturales de vibración transversales (verticales).



Figura1 Montaje de la viga (izquierda) y detalle del empotramiento y sensor (derecha).

El análisis de las señales se realizó mediante el uso del programa comercial Multipurpose Lab Interfase (MPLI). El mismo incluye un osciloscopio que permite estudiar las vibraciones en el dominio del tiempo y también un analizador de espectros con la transformada rápida de Fourier (FFT) en el dominio de la frecuencia.

El ensayo experimental arrojó los resultados siguientes (ver Figura 2) para las tres primeras frecuencias naturales: $f_1 = 9.086 \text{ Hz}$; $f_2 = 57.45 \text{ Hz}$; $f_3 = 160.90 \text{ Hz}$.

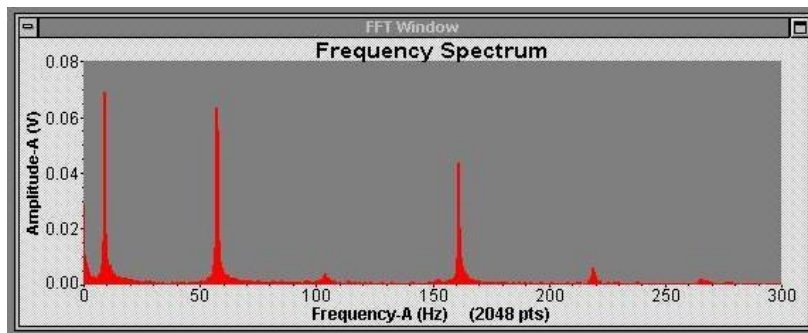


Figura 2 Resultados de frecuencias naturales experimentales

Siendo los valores teóricos [10]: $f_1 = 9.554 \text{ Hz}$; $f_2 = 59.872 \text{ Hz}$; $f_3 = 167.644 \text{ Hz}$, los resultados experimentales son satisfactorios ya que las diferencias con la solución teórica están por debajo del 5% para los tres primeros modos de vibración. Dichas diferencias se atribuyen principalmente a las imperfecciones en la materialización de los vínculos, ya que es imposible construir un empotramiento perfecto porque la simulación de las condiciones de borde clásicas siempre introduce flexibilidades o rigideces no deseadas.

Posteriormente, para la realización del ensayo dinámico con excitación armónica, se diseñó una estructura de soporte cuya frecuencia de vibración en dirección vertical coincidiera aproximadamente con la primera frecuencia de la viga a ensayar (Figura 3).



Figura 3 Estructura de soporte para el ensayo dinámico con excitación armónica.

Sobre el empotramiento, se colocó un excitador mecánico (Figura 4) constituido por dos motores eléctricos de velocidad variable que accionan dos ruedas con masas excéntricas. Éstas proporcionan dos fuerzas de inercia centrífuga cuya composición produce la fuerza armónica de excitación.

Se aplicó un desplazamiento transversal (vertical) de tipo armónico actuando en un intervalo de tiempo de 6.5 seg. Como consecuencia de la excitación, la vibración del sistema resulta de otras dos superpuestas. Una es una vibración libre del sistema que es transitoria por ser amortiguada. La otra vibración superpuesta es la vibración estacionaria producida y mantenida por el movimiento aplicado. Cuando la frecuencia de la fuerza de excitación se aproxima a una

frecuencia de oscilación libre natural de la viga, la amplitud resultante será importante porque el movimiento aplicado está en resonancia o en una condición muy cercana a ella.



Figura 4 Vistas del excitador mecánico

Los resultados del ensayo, en el tiempo y en la frecuencia, se muestran en la Figura 5. Se observa que en este caso tiene un amortiguamiento de tipo viscoso (fricción fluida proporcional a la velocidad) a diferencia del modelo de elementos finitos que es del tipo de fricción seca.

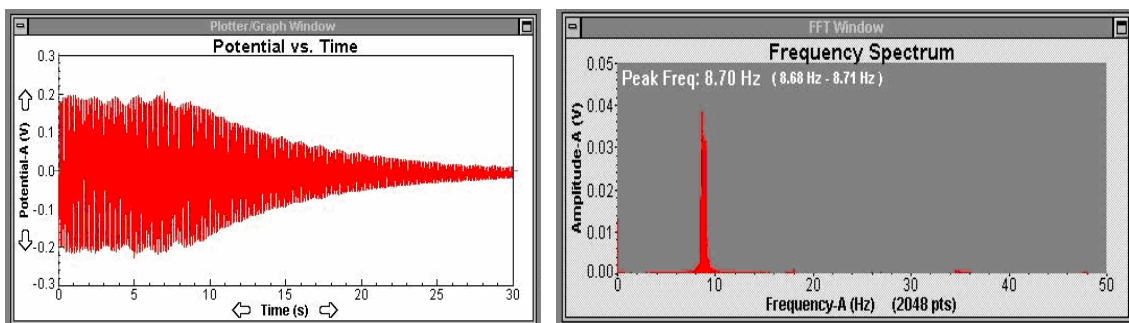


Figura 5 Resultados del ensayo, en el tiempo y en la frecuencia

4. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

El análisis numérico se realizó con un programa que emplea el método de elementos finitos (MEF) en cálculo lineal y no lineal. En particular, se empleó el módulo Mechanical Event Simulation (MES) de Algor® [4], que permite evaluar resultados en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

El modelo de elementos finitos consta de 30 elementos y 31 nodos. Se emplearon elementos tipo “beam” con seis grados de libertad por nodo: tres traslacionales y tres rotacionales con respecto a los tres ejes de referencia (x,y,z).

Se consideró un modelo con masa concentrada (lumped) en los nodos y con amortiguamiento de Rayleigh.

Se aplicaron las restricciones nodales correspondientes al empotramiento en el extremo izquierdo.

4.1. Resultados de frecuencias naturales y formas modales

Las tres primeras frecuencias naturales (vibración en dirección vertical) calculadas con MEF son $f_1 = 9.5598 \text{ Hz}$; $f_2 = 59.8566 \text{ Hz}$; $f_3 = 167.447 \text{ Hz}$. Puede verse que la diferencia de los resultados aproximados del MEF, difieren en menos del 0.1% con respecto a los valores teóricos. Es sabido que la comprobada confiabilidad del MEF es motivo de su difundido uso, en particular en problemas de ingeniería. En la Figura 6 se reproducen los respectivos modos flexionales de vibración.

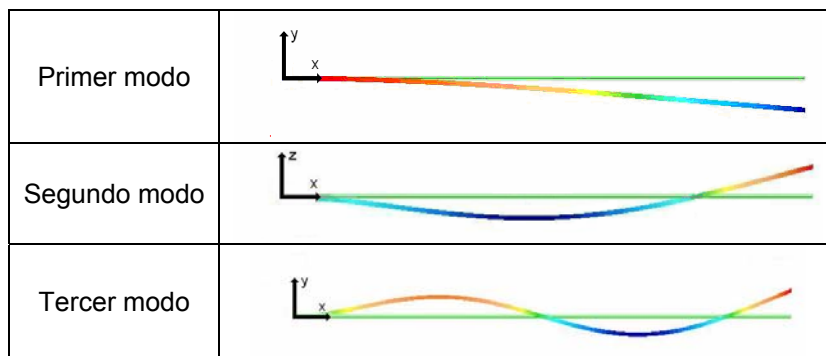


Figura 6 Tres primeros modos de vibración de la viga en el plano (x,y). Resultados de MEF.

4.2. Acciones sobre el modelo de elementos finitos: excitación armónica en el apoyo.

El software empleado es el programa Algor® [4] para cálculo no lineal con elementos finitos. En particular se utilizó el módulo MES (Mechanical Event Simulation).

La excitación aplicada a la viga es una oscilación sinusoidal en el empotramiento en correspondencia con la frecuencia fundamental del sistema, con una amplitud de 1mm. El movimiento del empotramiento, fue modelado de dos maneras diferentes: empleando un elemento actuador y con un desplazamiento impuesto. A continuación se describe la utilización de ambos procedimientos numéricos.

4.2.1. Excitación aplicada con un elemento actuador

En este caso el mecanismo que imprime el movimiento fue modelado con un "actuador". El mismo es elemento lineal muy rígido con 6 grados de libertad que reproduce desplazamientos variables en el tiempo. El uso de actuadores en el modelo de elementos finitos hace posible simular movimientos en cualquier dirección, por medio de curvas de carga que pueden ser independientes para cada uno de ellos. En este caso, la duración total del análisis se fijó en 10 segundos. Previamente a la aplicación de la excitación en el apoyo, se introdujo la acción de la gravedad y se permitió que dicha acción se estabilizara antes de aplicar otras fuerzas.

La curva de carga del actuador se muestra en la Figura 7. Puede verse la curva sinusoidal, que es de la forma $y = A \sin(2\pi f_1 t)$. La acción se extiende de 1 hasta 4.5 segundos y luego tiene valor nulo hasta el final del análisis.

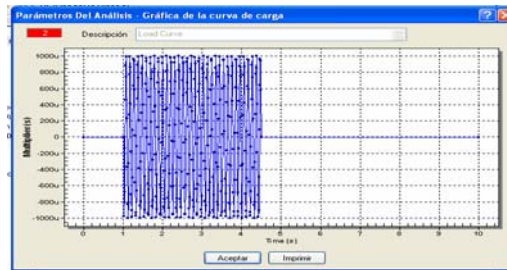


Figura 7 Curva de carga del elemento actuador.

En la Figura 8 se muestra la curva de desplazamientos en el empotramiento el cual, como es lógico, coincide con la curva del actuador (Figura 7) ya que éste es el punto de contacto del mismo. La amplitud de la oscilación aplicada es de 2.5mm. También se muestra la respuesta en frecuencia a través de la transformada rápida de Fourier (FFT) en la se observa un pico en correspondencia con la frecuencia natural excitada por el movimiento del actuador.

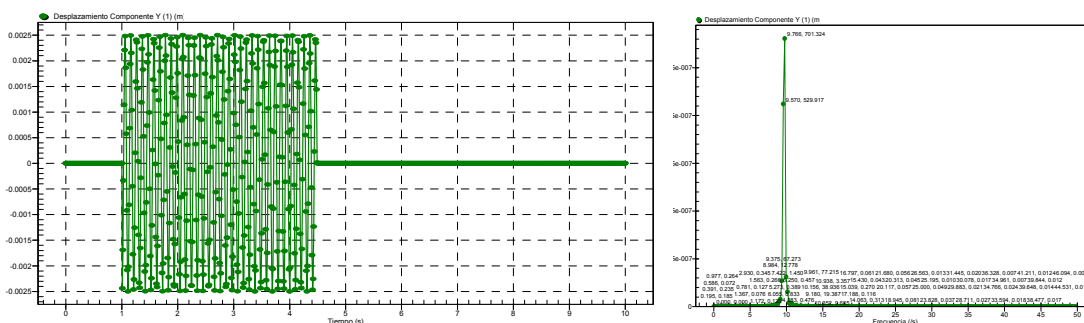


Figura 8 Desplazamiento en el origen y FFT.

La Figura 9 corresponde a la curva de desplazamientos del extremo libre de la viga (nodo 21) y la FFT. Dado que la frecuencia de la excitación coincide con la frecuencia natural de la viga, la amplitud resultante de la oscilación del sistema resulta creciente por el efecto de resonancia, pero no crece indefinidamente sino que alcanza un máximo de 0.15 m, para luego decrecer por amortiguamiento, cuando se interrumpe la excitación.

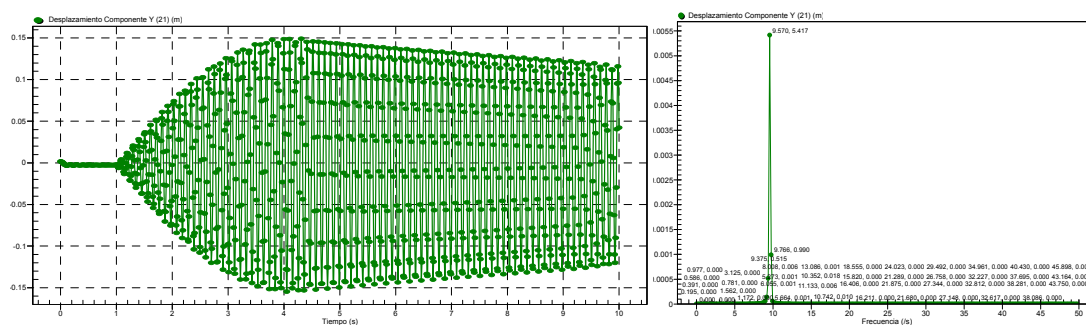


Figura 9 Desplazamiento transversal en el extremo libre de la viga (nodo 21) y FFT.

Se observó un comportamiento similar del nodo central, aunque con una amplitud menor. En este caso el desplazamiento máximo fue de 0.05m, decreciendo a partir de los 4.5 segundos.

4.2.2. Excitación aplicada con desplazamiento impuesto

También se aplicó la excitación en el empotramiento con un desplazamiento impuesto, como una condición de borde, permitiendo especificar giros o desplazamientos en los nodos, con valores constantes o con curvas de variación en el tiempo. En este caso se anularon todos los giros y desplazamientos del nodo 1 (empotramiento), excepto el desplazamiento vertical que fue impuesto con una curva idéntica a la que se empleó para el elemento actuador (Figura 7). Los resultados obtenidos fueron totalmente análogos motivo por el cual no se repiten.

5. CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos se concluye que la aplicación de excitaciones transitorias en el análisis con elementos finitos, mediante el uso de actuadores o con desplazamientos impuestos es de gran utilidad para predecir el comportamiento de estructuras. El uso de estas herramientas de cálculo no reemplazan el trabajo experimental, sino que lo complementan ahorrando tiempo y costos en el trabajo de laboratorio.

6. REFERENCIAS

- [1] P.M. Bellés, J.L. Pombo, J.M. Miguel, S. La Malfa, International Congress on Quality Assessment of Numerical Simulations in Engineering QUANSE 2002, *Excitación virtual y experimental de vigas mediante impacto*, Concepción, Chile, 2002.
- [2] J.L. Pombo, S. La Malfa, *Excitación Mediante Martillo de Impacto*, UNS-UTN, 2001.
- [3] R.W. Clough, J. Penzien, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, 1975.
- [4] Algor Technical User Documentation. 2007.
- [5] C.Spyrakos, *Finite Element Modeling in Engineering Practice*, West Virginia University, 1996.
- [6] J.D. Inman, *Engineering Vibration*, Prentice Hall International, Inc., 1996.
- [7] W. Weaver, S. Timoshenko, D. Young, *Vibrating Problems in Engineering*, J. Wiley & S., 1990.
- [8] J.L. Pombo, C. Filipich, D. Martín, IX Congreso Chileno de Ingeniería Mecánica, *Comportamiento dinámico de sistemas discretos y continuos excitados por frecuencias intermedias a las naturales propias*, Valparaíso, Chile, 2000.
- [9] T. Sireteanu, *A possible explanation of the building breakage between 2nd and 3rd floor when subjected to strong earthquakes*, Romanian Academy, Series A, V. 6, N° 3, 2005.
- [10] R. Blevins, *Formulas for Natural Frequencies and Mode Shape*, V. Nostrand Reinhold, 1979.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo financiero de la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires y de la SGCyT-UNS.