

Vibraciones libres de vigas y placas con rótulas intermedias.

María V. Quintana y Ricardo O. Grossi.

*INIQUI, ICMASa, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta
Av. Bolivia 5150 (4400) Salta. e-mail: grossiro@unsa.edu.ar*

RESUMEN

Este trabajo trata el problema de vibraciones transversales libres de una viga Timoshenko con extremos elásticamente restringidos contra rotación y translación y con una rótula intermedia restringida elásticamente. Se aplica el método de los multiplicadores de Lagrange en combinación con el método de Ritz para la determinación de frecuencias y formas modales de la viga mencionada. Las deflexiones transversales y las rotaciones normales de la sección transversal de la viga se expresan en forma polinómica. Luego se extiende el método para analizar las vibraciones transversales libres de una placa delgada anisótropa, restringida elásticamente en sus bordes con rótulas a lo largo de una línea intermedia.

Para obtener una indicación de la exactitud de los modelos matemáticos desarrollados, algunos casos disponibles en la literatura han sido considerados. Por último se presentan nuevos resultados para diferentes condiciones de apoyo y de vínculos elásticos intermedios.

Palabras Claves: Vibraciones libres, vigas Timoshenko, placas delgadas, bordes elásticamente restringidos, rótula interna.

1. INTRODUCCIÓN

El Profesor Timoshenko propuso una teoría de vigas en la cual los efectos de la deformación por corte y de la inercia rotatoria son considerados dentro de la teoría clásica del modelo de Euler-Bernoulli, [1,2]. Este modelo fue objeto de estudio y aplicación por diversos científicos que generaron una inmensa cantidad de información [3-5]. El análisis del comportamiento dinámico de este tipo de vigas, cuando los extremos están elásticamente restringidos también ha recibido considerable atención. Uno de los primeros trabajos fue el de Abbas, [6], quien estudió las vibraciones de vigas Timoshenko elásticamente restringidas, mediante el método de los elementos finitos. Kocatürk y Simsek [7] estudiaron las vibraciones libres de vigas Timoshenko apoyadas elásticamente, usando las ecuaciones de Lagrange con funciones aproximantes expresadas en la forma de series de potencias. Zhou, [8] estudió las vibraciones libres de vigas Timoshenko de tramos múltiples usando funciones vigas Timoshenko. Grossi y Aranda [9] aplicaron el método de Ritz a la formulación variacional de vigas Timoshenko restringidas elásticamente en los extremos. Las vibraciones libres de vigas Timoshenko de varios tramos, con restricciones intermedias flexibles fueron analizadas por Lin y Chang, [10] usando una solución híbrida numérico-analítica. Lee y colaboradores, [11] determinaron las frecuencias exactas de vibración de vigas Timoshenko con una rótula interna cargadas axialmente y con condiciones de apoyos clásicas. La revisión de la literatura revela que no existe información sobre el análisis del comportamiento dinámico de vigas Timoshenko con una rótula restringida elásticamente y situada en un punto intermedio arbitrario.

Las características de vibración de las placas delgadas han sido extensamente estudiadas en los últimos 100 años. Placas de todos los tipos de formas, condiciones de borde y sujetas a varias fuerzas aplicadas en su plano fueron consideradas y los parámetros de frecuencia se documentaron en monografías [12], textos estándares [13-14] y en una gran cantidad de artículos científicos. Una línea intermedia con rótulas en una placa, puede ser usada para facilitar la apertura de puertas, la plegadura de portones y para simular ciertas fracturas. Es importante notar que no existen estudios en la literatura, del problema de vibraciones libres de placas delgadas elásticamente restringidas en sus bordes y que además posean rótulas a lo largo de una línea intermedia elásticamente restringida.

El propósito de este trabajo es investigar las frecuencias naturales y las formas modales de vigas Timoshenko y placas delgadas con contornos elásticamente restringidos y presencia de rótulas en puntos o líneas intermedias que están elásticamente restringidas. Los autovalores y formas modales se determinan usando una combinación del método de Ritz y el de los multiplicadores de Lagrange con un conjunto de polinomios simples como funciones de forma. Para obtener una validación de los modelos matemáticos desarrollados, se presentan tablas de comparación con algunos casos disponibles en la literatura y se presentan resultados de casos no tratados previamente. Los algoritmos desarrollados pueden ser fácilmente aplicados a un gran rango de condiciones de contorno y de restricciones intermedias.

2. TEORÍAS Y FORMULACIONES.

2.1. Vibraciones de vigas Timoshenko con una rótula interna.

Sea una viga Timoshenko de longitud l con los extremos elásticamente restringidos contra rotación y translación y una rótula en un punto intermedio c , de posición variable con restricciones elásticas, tal como se muestra en la figura 1. Las restricciones rotacionales y traslacionales están caracterizadas por las constantes r_1, r_2, r_c, r_{12} y t_1, t_2, t_c respectivamente.

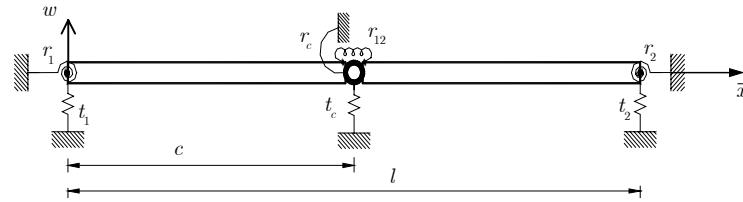


Figura 1. Sistema vibrante en estudio.

De acuerdo con la teoría de vigas Timoshenko se usan dos variables independientes para describir la deformación de la viga: el desplazamiento transversal w y el ángulo de rotación ϕ debido a la flexión.

Cuando la viga ejecuta vibraciones libres se puede suponer que w y ϕ están dados por

$$w(\bar{x}, t) = \bar{W}(\bar{x}) \text{sen}(\omega t), \quad \phi(\bar{x}, t) = \bar{\Phi}(\bar{x}) \text{sen}(\omega t), \quad (1)$$

donde ω es la frecuencia circular natural. Al introducir los parámetros adimensionales

$$x = \bar{x}/l, \quad W = \bar{W}/l, \quad \Phi = \bar{\Phi}, \quad (2)$$

el funcional Lagrangeano L_0 del problema puede escribirse como

$$L_0 = U_{\max} - T_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 + \gamma \left(\frac{l}{r} \right)^2 \left(\frac{dW}{dx} - \Phi \right)^2 \right\} dx + \frac{1}{2} [T_1 W^2(0) + R_1 \Phi^2(0) + T_c W^2(c) + R_c \Phi^2(c) + R_{12} (\Phi^2(c^+) - \Phi^2(c^-)) + T_2 W^2(1) + R_2 \Phi^2(1)] - \frac{1}{2} \Omega^2 \int_0^1 \left[\left(\frac{r}{l} \right)^2 \Phi^2 + W^2 \right] dx, \quad (3)$$

donde U_{\max} es la energía de deformación máxima debida a la flexión de la viga y a las restricciones elásticas, T_{\max} es la energía cinética máxima de la viga, E es el módulo de Young, G es el módulo transversal de corte, I es el momento de inercia, A es el área de la sección transversal, ρ es la densidad de masa y k es el factor de corrección por corte y

$$\gamma = \frac{kG}{E}, \quad r = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad \Omega = \omega l^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}, \quad T_i = \frac{t_i l^3}{EI}, \quad R_i = \frac{r_i l}{EI}, \quad i = 1, 2, \quad R_c = \frac{r_c l}{EI}, \quad T_c = \frac{t_c l^3}{EI}, \quad R_{12} = \frac{r_{12} l}{EI}.$$

2.1.1. Combinación del Método de Ritz y el uso de los multiplicadores de Lagrange.

Sean las funciones $W(x)$ y $\Phi(x)$ dadas por

$$W(x) = \begin{cases} W_1(x), \forall x \in [0, c) \\ W_2(x), \forall x \in (c, l] \end{cases} \quad \text{y} \quad \Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1(x), \forall x \in [0, c) \\ \Phi_2(x), \forall x \in (c, l] \end{cases}, \quad (4)$$

entonces al considerar los requerimientos de compatibilidad sobre el punto intermedio c , la relación entre los dos tramos adyacentes de la viga puede expresarse como:

$$W_1(c) - W_2(c) = 0. \quad (5)$$

Ahora el problema puede ser expuesto como el de extremizar el funcional dado en la expresión (3) sujeto a la restricción:

$$G(W_1, W_2) = W_1(c) - W_2(c). \quad (6)$$

Esta restricción puede ser incorporada dentro del funcional energético dado por la expresión (3) usando el método de los multiplicadores de Lagrange [15], como:

$$L_L = L_0 + \lambda G, \quad (7)$$

donde L_L es el nuevo funcional y λ es el multiplicador de Lagrange.

La deflexión transversal y la rotación normal, en cada tramo puede ser representada por los conjuntos de polinomios $\{p_{ki}(x)\}$ y $\{q_{kj}(x)\}$ respectivamente, como:

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^M a_{ki} p_{ki}(x), \quad k = 1, 2, \quad W_k = \sum_{j=1}^N b_{kj} q_{kj}(x), \quad k = 1, 2, \quad (8a,b)$$

donde a_{ki} y b_{kj} son coeficientes desconocidos a ser determinados. Es suficiente que las funciones de forma satisfagan las condiciones de bordes geométricas de la viga. En consecuencia, el primer miembro de cada conjunto de polinomios esto es: $p_{k1}(x)$ y $q_{k1}(x)$, se obtiene como el polinomio mas simple que satisface las condiciones de borde geométricas en el correspondiente tramo. Los polinomios de orden superior se obtienen como:

$$p_{ki} = p_{k1} x^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad k = 1, 2, \quad q_{kj} = q_{k1} x^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2. \quad (9a,b)$$

Sustituyendo las funciones (8a,b) en el funcional (7), y minimizando con respecto a los coeficientes desconocidos a_{ki} , b_{kj} y el multiplicador de Lagrange λ se obtiene un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales el que puede ser expresado en la siguiente forma matricial:

$$([K] - \Omega^2 [M]) \{\bar{c}\} = \{0\}, \quad (10)$$

donde

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{aa}^{(1)}] & [K_{ab}^{(1)}] & [K_{aa}^{(1,2)}] & [0] & [L_{a\lambda}^{(1)}] \\ & [K_{bb}^{(1)}] & [0] & [0] & [0] \\ & & [K_{aa}^{(2)}] & [K_{ab}^{(2)}] & [L_{a\lambda}^{(2)}] \\ & & & [K_{bb}^{(2)}] & [0] \\ \text{symm} & & & & [0] \end{bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} [M_{aa}^{(1)}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ & [M_{bb}^{(1)}] & [0] & [0] & [0] \\ & & [M_{aa}^{(2)}] & [0] & [0] \\ & & & [M_{bb}^{(2)}] & [0] \\ \text{symm} & & & & [0] \end{bmatrix},$$

$$\{\bar{c}\} = \{\{a_1\}, \{b_1\}, \{a_2\}, \{b_2\}, \lambda\}^T, \text{ con } \{a_k\} = \{a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kM}\}, \quad \{b_k\} = \{b_{k1}, b_{k2}, \dots, b_{kN}\}, k = 1, 2.$$

Las expresiones de los distintos elementos de la matriz de rigidez $[K]$ y de la matriz de masa $[M]$ vienen dados por:

$$K_{aaij}^{(1)} = \int_0^{\frac{c}{r}} \left[\frac{dp_{1i}(x)}{dx} \frac{dp_{1j}(x)}{dx} + \gamma \left(\frac{l}{r} \right)^2 p_{1i}(x) p_{1j}(x) \right] dx + R_1 p_{1i}(0) p_{1j}(0) + R_c p_{1i}(c) p_{1j}(c) + R_{12} p_{1i}(c) p_{1j}(c),$$

$$K_{abij}^{(1)} = - \int_0^{\frac{c}{r}} \gamma \left(\frac{l}{r} \right)^2 p_{1i} \frac{dq_{1j}}{dx} dx, \quad K_{aaij}^{(1,2)} = -R_{12} p_{1i}(c) p_{2j}(c),$$

$$K_{bbjm}^{(1)} = \int_0^{\frac{c}{r}} \gamma \left(\frac{l}{r} \right)^2 \frac{dq_{1j}(x)}{dx} \frac{dq_{1n}(x)}{dx} dx + T_1 q_{1j}(0) q_{1n}(0) + T_c q_{1j}(c) q_{1n}(c), \quad L_{a\lambda i 1}^{(1)} = q_{1j}(c),$$

$$K_{aaim}^{(2)} = \int_{\frac{c}{r}}^1 \left[\frac{dp_{2i}(x)}{dx} \frac{dp_{2m}(x)}{dx} + \gamma \left(\frac{l}{r} \right)^2 p_{2i}(x) p_{2m}(x) \right] dx + R_2 p_{2i}(1) p_{2m}(1) + R_{12} p_{2i}(c) p_{2j}(c),,$$

$$K_{abij}^{(2)} = - \int_{\frac{c}{r}}^1 \gamma \left(\frac{l}{r} \right)^2 p_{2i} \frac{dq_{2j}}{dx} dx, \quad K_{bbjm}^{(2)} = \int_{\frac{c}{r}}^1 \gamma \left(\frac{l}{r} \right)^2 \frac{dq_{2j}(x)}{dx} \frac{dq_{2n}(x)}{dx} dx + T_2 q_{2j}(1) q_{2n}(1), \quad L_{a\lambda i 1}^{(2)} = -q_{2j}(c),$$

$$M_{aaim}^{(1)} = \int_0^{\frac{c}{r}} \left(\frac{r}{l} \right)^2 p_{1i}(x) p_{1m}(x) dx, \quad M_{bbjm}^{(1)} = \int_0^{\frac{c}{r}} q_{1j}(x) q_{1n}(x) dx,$$

$$M_{aaim}^{(2)} = \int_{\frac{c}{r}}^1 \left(\frac{r}{l} \right)^2 p_{2i}(x) p_{2m}(x) dx, \quad M_{bbjm}^{(2)} = \int_{\frac{c}{r}}^1 q_{2j}(x) q_{2n}(x) dx, \quad \text{con } i, m = 1, 2, \dots, M, j, n = 1, 2, \dots, N.$$

Los autovalores Ω^2 se obtienen de la condición de que el determinante del sistema de ecuaciones dado por la Ecuación (10) debe anularse. Los primeros polinomios usados para varias combinaciones de las condiciones de borde clásicas son descritos en la Tabla 1, donde los símbolos F, C y S denotan los extremos libres, empotrados y simplemente apoyados, respectivamente.

Tabla 1. Primeros elementos de los conjuntos de polinomios $\{p_{ki}(x)\}$ y $\{q_{kj}(x)\}$.

Condiciones de borde clásicas con una rótula restringida elásticamente en $x = c/l$.	p_{11}	q_{11}	p_{21}	q_{21}
S-S	1	x	1	$x - 1$
S-F	1	x	1	1
F-F	1	1	1	1
C-C	x	x	$x - 1$	$x - 1$
C-S	x	x	1	$x - 1$
C-F	x	x	1	1

2.2. Vibración de placas delgadas con una rótula interna.

Sea una placa delgada anisótropa elásticamente restringida en su contorno y a lo largo de una línea intermedia que posee una rótula interna restringida elásticamente contra rotación, tal como se muestra en la figura 2.

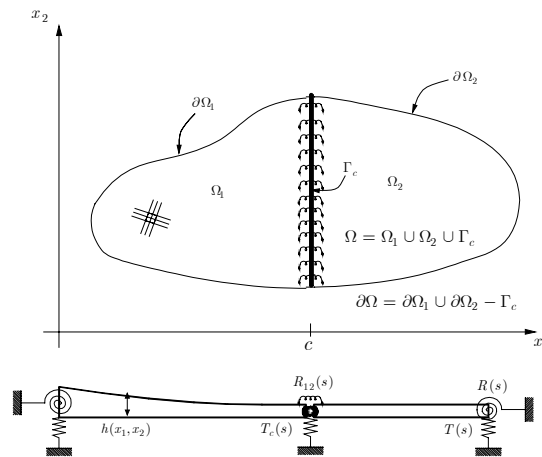


Figura 2. Sistema vibrante en estudio

La máxima energía de deformación U_{\max} debida a la deformación de la placa y de los vínculos elásticos en el contorno y en la línea intermedia viene dada por:

$$\begin{aligned}
 U_{\max} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left\{ \iint_{\Omega_i} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 4 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \left[D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right] \right] dx_1 dx_2 + \int_{\partial \Omega_i} R(s) \left(\frac{\partial w}{\partial n^{(i)}} \right)^2 ds + \int_{\partial \Omega_i} T(s) w^2 ds \right\} + \quad (11) \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} T_c(s) w^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} R_{12}(s) \left(\frac{\partial w(c^+, x_2, t)}{\partial x_1} - \frac{\partial w(c^-, x_2, t)}{\partial x_1} \right)^2 ds,
 \end{aligned}$$

donde $w = w(x_1, x_2)$ es la deflexión de la placa, (c, x_2) son los puntos donde se aplica la rótula interna, D_{ij} son los coeficientes de rigidez de la placa, $R(s), T(s), T_c(s)$ y $R_{12}(s)$ son los correspondientes coeficientes de rigidez.

Por otro lado la máxima energía cinética de la placa esta dada por:

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \iint_{\Omega} h w^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (12)$$

donde h es el espesor de la placa y ρ la densidad de masa del material de la placa.

2.2.1. Combinación del Método de Ritz y el uso de los multiplicadores de Lagrange.

Extendiendo el método propuesto en el punto anterior al funcional $\Pi = U_{\max} - T_{\max}$ obtenido de la placa en estudio, su aplicación conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$([K] - \Omega^2 [M]) \{\bar{c}\} = \{0\}, \quad (13)$$

donde $[K]$ es la matriz de rigidez y $[M]$ es la matriz de masa. Los autovalores Ω^2 se obtienen de la condición de que el determinante dado por la Ecuación (13) debe anularse.

3. EJEMPLOS NUMERICOS

En todos los casos, se consideran vigas con factor de corrección por corte $k = 5/6$ y relación de Poisson $\mu = 0.3$. En la Tabla 2 se presentan resultados de un estudio de convergencia de los seis primeros valores del parámetro de frecuencia Ω de una viga simplemente apoyada y empotrada en los extremos con un apoyo intermedio ubicado en $c/l = 0.4$. Una comparación de los valores con aquellos de la Referencia [8], muestra que es suficiente con $N = M = 12$ para obtener resultados de igual precisión.

Tabla 2. Estudio de convergencia del coeficiente $\Omega = \omega l^2 \sqrt{\rho A/EI}$ de una viga Timoshenko con un apoyo intermedio ($T_c = R_{12} \rightarrow \infty$) ubicado en $c/l = 0.4$ para $\sqrt{12} r/l = 0.1$.

Condiciones de Borde	N=M	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
S-S	8	31.3371	66.9551	103.9222	185.3377	203.2434	299.8346
	9	31.3371	66.9551	103.9195	185.3363	203.2218	293.0323
	10	31.3371	66.9551	103.9195	185.3183	203.1968	293.0078
	11	31.3371	66.9551	103.9195	185.3183	203.1966	292.7685
	12	31.3371	66.9551	103.9195	185.3182	203.1964	292.7682
	Ref [8]	31.3370	66.9554	103.9200	185.3186	203.2250	292.8410
C-C	8	44.8970	89.3750	120.2982	202.0986	220.3812	304.0233
	9	44.8970	89.3750	120.2982	202.0523	220.3466	304.0080
	10	44.8970	89.3750	120.2982	202.0522	220.3465	303.6564
	11	44.8970	89.3750	120.2982	202.0519	220.3462	303.6561
	12	44.8970	89.3750	120.2982	202.0519	220.3462	303.6512
	Ref[8]	44.8968	89.3762	120.3006	202.0673	220.4041	303.7835

Para investigar la influencia de las restricciones elásticas intermedias sobre las vibraciones libres de vigas Timoshenko, varios casos fueron resueltos. La figura 3 muestra la variación de los cuatro primeros valores del parámetro de frecuencia $\sqrt{\Omega}$ con respecto a la restricción rotacional intermedia R_c de una viga empotrada-libre. Se puede apreciar que la mayor variación en el parámetro de frecuencia corresponde a los modos 1 y 3.

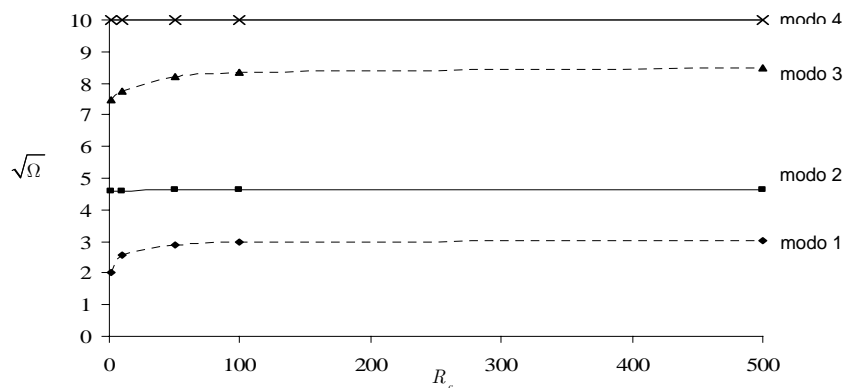


Figura 3. Variación en los primeros cuatro valores de $\sqrt{\Omega} = \sqrt{\omega l^2 \sqrt{\rho A/EI}}$ con respecto a la restricción rotacional R_c ubicada en $c/l = 0.5$ de una viga C-F ($R_{12} \rightarrow \infty$) para $\sqrt{12} r/l = 0.1$.

Tabla 3. Parámetro de frecuencia fundamental $\sqrt{\Omega} = \sqrt{\omega l^2 \sqrt{\rho A} / EI}$ de vigas Timoshenko con una rótula intermedia restringida elásticamente ($T_c = R_c = 0$) en 3 posiciones distintas.

$\sqrt{12} r/l$	0.001	0.01	0.1	0.001	0.01	0.1	0.001	0.01	0.1	
R_{12}	$c/l = 0.1$			$c/l = 0.3$			$c/l = 0.5$			
S-S	0	4.2264	4.2255	4.1400	5.1318	5.1300	5.0200	6.2830	6.2810	6.0907
	1	2.9994	2.9991	2.9773	2.5288	2.5286	2.5163	2.3832	2.3831	2.3729
	10	3.1267	3.1264	3.1012	3.0454	3.0452	3.0225	3.0013	3.0011	2.9796
	100	3.1401	3.1398	3.1142	3.1314	3.1311	3.1058	3.1261	3.1258	3.1007
C-C	0	4.3483	4.3471	4.2387	4.4831	4.4818	4.3612	3.7502	3.7496	3.6931
	1	4.4320	4.4307	4.3156	4.5839	4.5824	4.4517	4.1079	4.1070	4.0263
	10	4.6296	4.6281	4.4924	4.6992	4.6977	4.5529	4.5823	4.5809	4.4518
	100	4.7169	4.7153	4.4924	4.7266	4.7250	4.5766	4.7129	4.7113	4.5648
F-F	0	4.7287	4.7271	4.5784	4.7297	4.7281	4.5792	4.7283	4.7267	4.5781
	1	5.1296	5.1277	4.9723	6.3015	6.2993	6.1008	7.8532	7.8491	7.4972
	10	4.6848	4.6839	4.6002	3.7951	3.7945	3.7391	3.4378	3.4373	3.3978
	100	4.7258	4.7249	4.6441	4.5934	4.5926	4.5173	4.4698	4.4691	4.4002
	1000	4.7296	4.7288	4.6481	4.7159	4.7150	4.6349	4.7006	4.6998	4.6206
	1000	4.7300	4.7291	4.6485	4.7286	4.7278	4.6471	4.7271	4.7262	4.6457

Tabla 4: Estudio de comparación de los parámetros de frecuencia $\Omega/\pi^2 = (\omega b^2/\pi^2) \sqrt{\rho h/D}$ para placas rectangulares con una rótula interna libre ($a = 2, b = 1$). Partiendo del borde $x_1 = 0$ se recorre el contorno en sentido antihorario para describir las condiciones de contorno.

Casos c	Secuencia de modos.									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
SSFS 1/3 Presente	1.035	1.389	2.292	3.685	4.016	4.414	4.849	5.403	6.818	7.839
	Ref. [18]	1.035	1.387	2.288	3.680	4.012	4.407	4.836	5.394	6.804
2/3 Presente	1.024	1.489	2.113	3.568	3.989	4.508	5.292	5.454	6.714	6.962
	Ref. [18]	1.023	1.488	2.108	3.563	3.985	4.503	5.280	5.441	6.699
CSFS 1/3 Presente	1.052	1.483	2.397	4.024	4.106	4.467	5.461	5.500	7.140	8.079
	Ref. [18]	1.051	1.481	2.392	4.019	4.099	4.459	5.444	5.489	7.125
2/3 Presente	1.035	1.572	2.282	3.994	4.001	4.564	5.412	5.702	7.012	7.634
	Ref. [18]	1.035	1.570	2.277	3.989	3.995	4.558	5.398	5.686	6.99
CSSS 1/3 Presente	1.264	1.957	3.482	4.222	4.974	5.126	6.444	6.855	8.104	9.193
	Ref. [18]	1.263	1.954	3.479	4.217	4.966	5.116	6.435	6.836	8.084
2/3 Presente	1.235	2.040	3.537	4.210	4.686	5.012	6.463	7.369	7.878	9.183
	Ref. [18]	1.234	2.038	3.534	4.205	4.675	5.005	6.455	7.350	7.855

La tabla 3 muestra los valores del parámetro de frecuencia fundamental $\sqrt{\Omega}$ de una viga con una rótula intermedia restringida elásticamente. Se consideran diferentes condiciones de extremos, posición de la rótula, relación r/l y variación del coeficiente R_{12} entre 0 y 1000.

La tabla 4 muestra los diez primeros valores del parámetro de frecuencia $\Omega/\pi^2 = (\omega b^2/\pi^2) \sqrt{\rho h/D}$ de placas isotrópicas rectangulares para diferentes condiciones de borde y ubicación de la línea con rótula. Los resultados obtenidos se comparan con los dados por Xiang and Reddy, [16] quienes analizaron este problema utilizando la teoría de placas de primer orden.

En la figura 4 se muestran los primeros tres modos de vibración de una placa cuadrada isótropa empotrada en sus cuatro bordes con una rótula interna ubicada en tres posiciones diferentes.

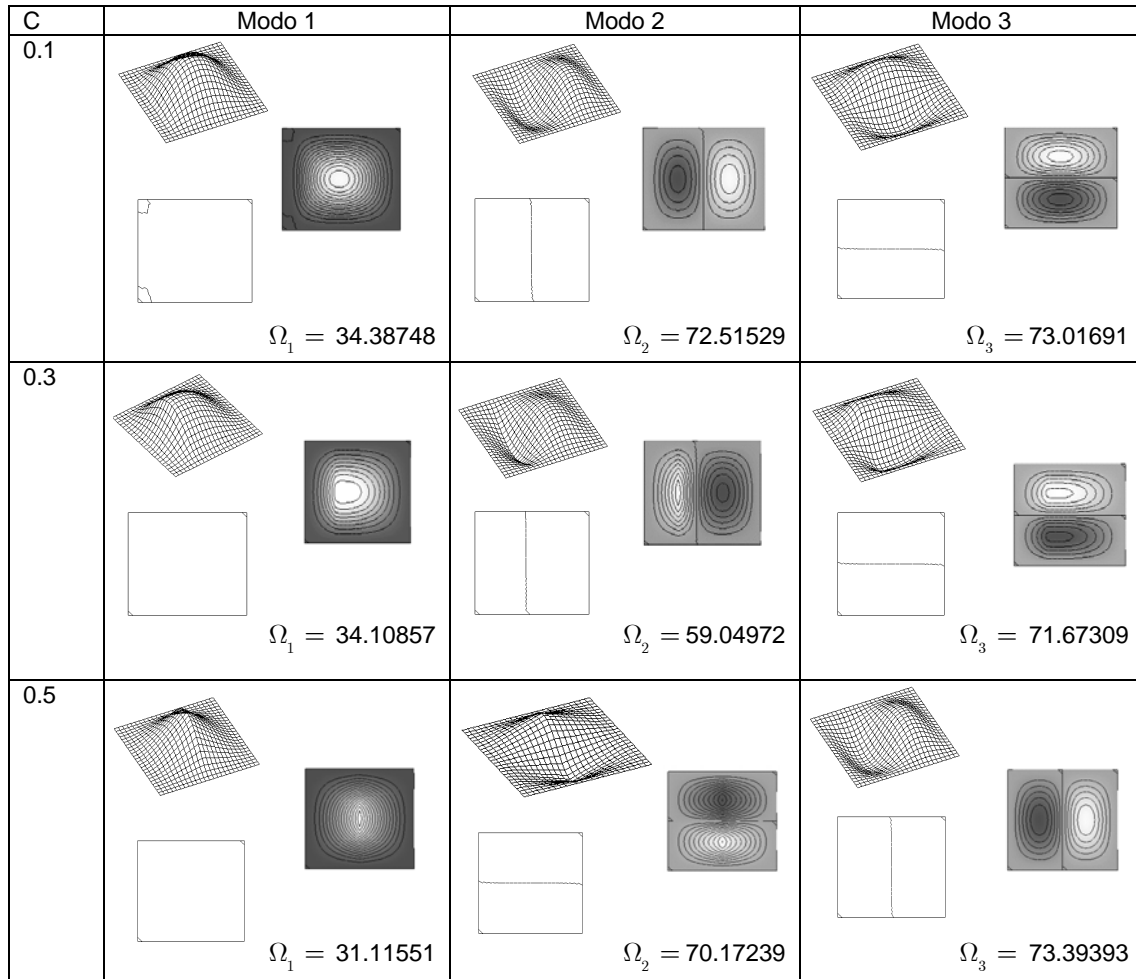


Figura 4. Las primeras tres formas modales de una placa cuadrada isótropa CCCC con una rótula ubicada en $x_1 = c$.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentan algoritmos simples y eficientes para la determinación de frecuencias naturales y formas modales de vigas y placas apoyadas elásticamente y con la presencia de rótulas intermedias también restringidas elásticamente. El método de los multiplicadores de Lagrange en combinación con el método de Ritz ha sido usado para obtener los algoritmos mencionados. La eficiencia computacional de los mismos se determinó comparando resultados con los disponibles en la literatura y realizando estudios de convergencia. Por último se presentaron nuevos resultados para diferentes condiciones de apoyo y de vínculos elásticos intermedios.

Agradecimientos: El presente trabajo fue realizado con fondos del subsidio PIP 5340 del CONICET y de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta.

5. REFERENCIAS

1. **Timoshenko S.** On the correction of shear of differential equations of transverse vibrations of prismatic bars. *Phil. Mag.*, **41**, 744-746, 1921.
2. **Timoshenko S.** On the transverse vibrations of bars of uniform cross section. *Phil. Mag.*, **43(6)** 125-131, 1922.
3. **Huang T.C.** The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions, *Journ. of App. Mech.*, **28**, 579-584, 1961.
4. **Carnegie W. y Thomas J.** The effects of shear deformation and rotatory inertia on the lateral frequencies of cantilever beams in bending, *Journ. of Engineering for Industry Trans. ASME*, **94**, 267-278, 1972.
5. **Anderson R. A.** Flexural vibrations of uniform beams according to the Timoshenko theory, *Journ. of App. Mech.*, **75**, 504-510, 1953.
6. **Abbas B.** Vibrations of Timoshenko beams with elastically restrained ends, *J. Sound and Vibr.*, **97(4)**, 541-548, 1984.
7. **Kocatürk T. y Simsek M.** Free Vibration analysis of elastically supported Timoshenko beams. *Sigma J. Eng. Nat. Sc.*, **3**, 79-93, 2005.
8. **Zhou D.**, Free Vibration of multi-span Timoshenko beams using static Timoshenko beam functions, *J. Sound and Vibr.*, **241(4)**, 725-734, 2001.
9. **Grossi R. O. y Aranda A.**, Formulación variacional de problemas de contorno para vigas Timoshenko. *Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.*, **9(3)**, 313-324, 1993.
10. **Lin H-P. y Chang S.C.**, Free vibration analysis of multi-span beams with intermediate flexible constraints, *J. Sound and Vibr.*, **281**, 155-169, 2005.
11. **Lee Y. Y., Wang C. M. y Kitipornchai S.**, Vibration of Timoshenko beams with internal hinge, *J. of Eng. Mech.*, **129**, 293-301, 2003.
12. **A.W. Leissa**, *Vibration of plates* (NASA SP-160). Washington, D.C., Office of Technology Utilization, NASA, 1969.
13. **S. Timoshenko y S. Woinowsky-Krieger**, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 1959.
14. **Reddy J.N.**, *Mechanics of Laminated Anisotropic Plates: Theory and Analysis*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1997.
15. **Reddy J. N.**, *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering, 1986 (McGraw-Hill, Inc., New York)*.
16. **Xiang Y. y Reddy J. N.**, Natural vibration of rectangular plates with an internal line hinge using the first order shear deformation plate theory, *J. Sound and Vibr.*, **263**, 285-297, 2003.