

## **Máquinas eólicas de resistencia diferencial: estudio paramétrico cualitativo.**

Lisandro A. Rodríguez<sup>1</sup>

*\*<sup>1</sup> Departamento de Ingeniería – Universidad Nacional del Sur  
Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Argentina. e-mail: [fwankel@yahoo.com.ar](mailto:fwankel@yahoo.com.ar)*

### **RESUMEN**

En 2003, respondiendo al encargo de una empresa local, se realizó un corto estudio paramétrico sobre máquinas eólica de resistencia diferencial de eje vertical, con la finalidad de determinar la factibilidad y rentabilidad de su implementación. Dicho estudio se basó en un modelo aerodinámico simplificado, con los propósitos de determinar la influencia de los parámetros fundamentales involucrados en el diseño geométrico de la máquina sobre el rendimiento, el tamaño de las instalaciones y las multiplicadoras de velocidad requeridas. Las ecuaciones matemáticas derivadas de este modelo, con los coeficientes aerodinámicos extraídos de una simulación numérica, se cargaron en Excel para obtener las curvas características. La investigación dejó en claro, que aun en el mejor de los casos, los dispositivos en cuestión poseen un rendimiento notablemente bajo y una baja velocidad de giro; comparados con los sistemas basados en sustentación aerodinámica. A esto debemos agregar los problemas estructurales derivados de la estela de torbellinos de Kármán. La conclusión fundamental del trabajo es que las máquinas de resistencia diferencial han de eliminarse totalmente como una alternativa en la construcción de aerogeneradores.

### **Palabras clave:**

Aerodinámica, aerogeneradores, máquinas eólicas, resistencia aerodinámica

---

<sup>1</sup> Técnico aeronáutico. Estudiante de ingeniería mecánica.

## 1. INTRODUCCION:

Dentro de las máquinas eólicas, las máquinas de resistencia diferencial (MRD) son las más antiguas e intuitivas [3]. Aparte del trato ligero por parte de D. Le Gourières [3], no se encontró referencia alguna al cálculo de estas en la literatura moderna. Su funcionamiento está basado en una diferencia de fuerzas generadas por la corriente fluida sobre elementos ubicados en lados opuestos del eje; con dicho eje operando normal a la corriente libre, y siendo la dirección de la fuerza resultante idealmente paralela a esta; cuando  $\omega = 0$ . Se intenta que los elementos expuestos al flujo posean resistencias –marcadamente- diferentes, según el sentido de la corriente relativa a los mismos. La popularidad de las MRD en construcciones pequeñas y en la extracción de agua [3], se basa en su sencillez constructiva y –salvando consideraciones estructurales y aeroelásticas - que el diseño es prácticamente independiente de las condiciones de operación.<sup>1</sup> Interesa aquí evaluar y cualitativamente los parámetros que definen las performances de una MRD y determinar como influyen en el tamaño y comportamiento de la instalación; deduciendo las ecuaciones características de su funcionamiento y su posible simplificación. El modelo simplificado planteado contrasta bastante bien con ensayos experimentales [4] y una implementación numérica que resuelve la integral (4) dada más adelante; aunque no puede ser usado para el diseño estructural.

## 2. AERODINÁMICA BÁSICA:

Dado un cuerpo expuesto a una corriente fluida (figura 1), experimentará una variada y dispar distribución de presiones sobre su superficie que determinará un conjunto de fuerzas sobre el mismo.

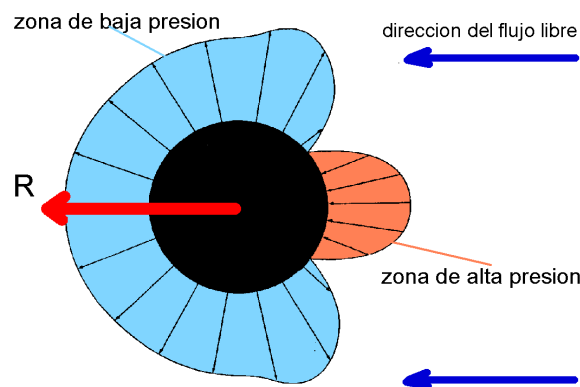


Figura 1. Distribución de presiones en un cilindro circular inmerso en una corriente fluida real

Estas fuerzas; cuya resultante puede descomponerse en paralelas a la corriente, normales a la misma y un momento; varían según la posición del cuerpo respecto de la dirección del flujo. Para identificar tal dirección, se define una línea de referencia sobre el cuerpo y se habla entonces del ángulo entre esta y la dirección del flujo; como “ángulo de ataque” ( $\alpha$ ). La componente en la dirección de la corriente se denomina resistencia; usualmente  $D$  (del inglés drag). Similarmente se define la componente normal al flujo o sustentación;  $L$  (del inglés Lift). Sus valores quedan determinados por:

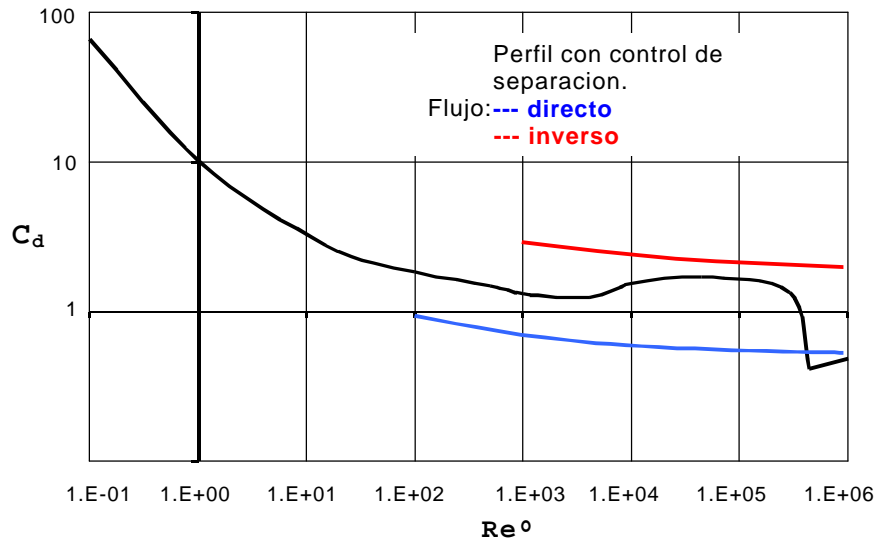
$$D = \frac{1}{2} V^2 r \times C_D \times S \quad (1)$$

$$L = \frac{1}{2} V^2 r \times C_L \times S \quad (2)$$

(véase la definición completa de símbolos en el apéndice A).

<sup>1</sup> Es necesario aclarar que un rotor Savonius abierto también posee esta característica; pero no es exactamente una MRD, por tanto este estudio no lo incluye.

El punto sobre el que se centra la resultante de esfuerzos aerodinámicos recibe el nombre de "centro aerodinámico"(CA). Este tiene una importancia fundamental en los fenómenos de aeroelasticidad, como veremos mas adelante.  
Si bien, usualmente se tratan  $C_D$  y  $C_L$  como si fueran constantes, en realidad dependen del numero de Reynolds ( $Re^o$ ). En una MRD, el coeficiente de resistencia aerodinámica no puede de ninguna manera considerarse constante. Aunque en este estudio preliminar así lo supondremos, para facilitar los cálculos. La figura 2 muestra como varia la resistencia aerodinámica de un cilindro en función del  $Re^o$ ; junto con las curvas características de las secciones usadas en MRD y aquí estudiadas.



**Figura 2.** Resistencia aerodinámica de un cilindro en función de  $Re^o$  [1,2,5]

### 3. PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO DE UNA MRD Y ANALISIS SIMPLIFICADO DE LA MISMA:

Sea un elemento perteneciente a un rotor como el de la figura 3, sometido a una corriente fluida. El rotor experimentara un torque o momento instantáneo:

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{D} \quad (3).$$

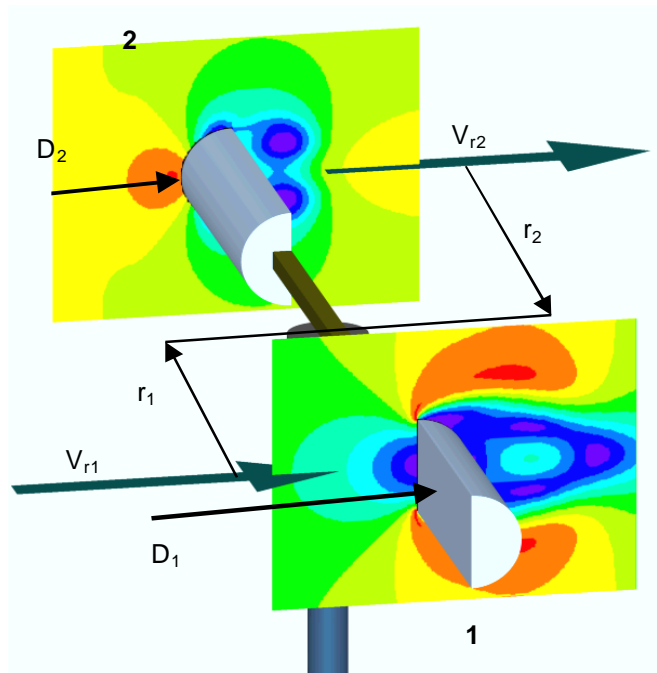
Integrando esta expresión en el total del área barrida obtenemos el torque y el trabajo transmitido por el fluido al rotor en cada revolución.

$$\vec{M} = \iint_A \vec{r} \times \vec{D} \cdot dA \quad (4) \quad T_U = \iint_A \left\| \vec{r} \times \vec{D} \right\| \cdot (\theta \cdot r) \cdot dA \quad (4b).$$

La integral (4) es clásica en problemas de aerodinámica y propulsión; por ejemplo, es la que define el comportamiento del rotor de un helicóptero, un autogiro o una hélice. Se debe tener cuidado con su evaluación. Generalmente no es fácil de resolver, sin embargo para nuestro análisis conceptual bastara con considerar dos puntos opuestos sobre alguna circunferencia. Por simplicidad estos se toman de forma que definan una línea normal a la corriente libre. Experimentos en túnel aerodinámico [4] y un cálculo numérico de (4) hecho en matlab, mostraron que el modelo es valido para el calculo de la velocidad de equilibrio.

De acuerdo con la figura 3, los elementos 1 y 2, experimentaran un esfuerzo por área unitaria:

$$D_1 = \frac{1}{2} V_{r1}^2 \mathbf{r} \times C_{D1} \quad (5). \quad D_2 = \frac{1}{2} V_{r2}^2 \mathbf{r} \times C_{D2} \quad (5b).$$



**Figura 3.** Esquema de una MRD de eje vertical

$V_r$  es la velocidad relativa del fluido respecto de cada uno de los elementos.

$$V_r = |\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}| \pm V_L \quad (6).$$

### 3.2. El rotor en condición estática:

Si el molino no gira  $\omega r = 0$ . De (5) y (5b) con la condición precedente:

$$|D_1 - D_2| \cdot r = M = \left[ \left( \frac{1}{2} V_L^2 \mathbf{r} \cdot C_{D1} \right) - \left( \frac{1}{2} V_L^2 \mathbf{r} \cdot C_{D2} \right) \right] \cdot r \quad (7).$$

Llamando  $q$  al término cinético  $\frac{1}{2} \rho V^2$ :

$$M = |C_{D1} - C_{D2}| \cdot q \quad (7b).$$

Así, cuanto mayor sea la diferencia entre los coeficientes, mayor torque.

Para los perfiles normales empleados  $C_{D1}/C_{D2}$  - que llamaremos ganancia (G)- varía de 1.5, a casi 4 para casquetes esféricos [2,5]. Valor que puede aumentarse solo un poco, mediante el uso de secciones especiales; como las desarrolladas durante esta investigación (figuras 2 y 8).

### 3.3. Velocidad de equilibrio:

Cuando la velocidad de giro no es cero, hay que considerar la forma completa de (6). En este caso (7) queda; en forma completa:

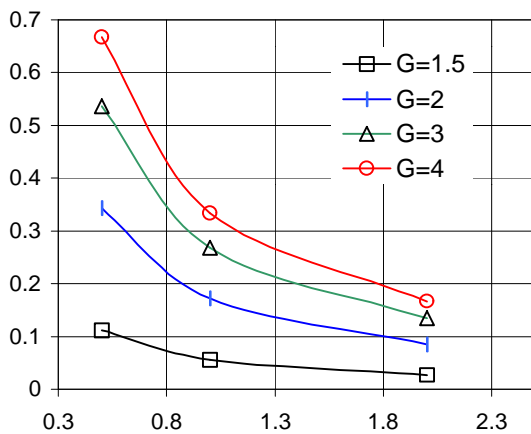
$$\frac{M}{r} = \frac{\mathbf{r}}{2} \left[ [V_L - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r})]^2 \cdot C_{D1} - [V_L + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r})]^2 \cdot C_{D2} \right] \quad (8).$$

En el caso de  $M=0$  el segundo término de (8) también se anula y obtenemos la velocidad natural de equilibrio. Esta sería la velocidad máxima de giro de la MRD si no se extrae potencia del eje.

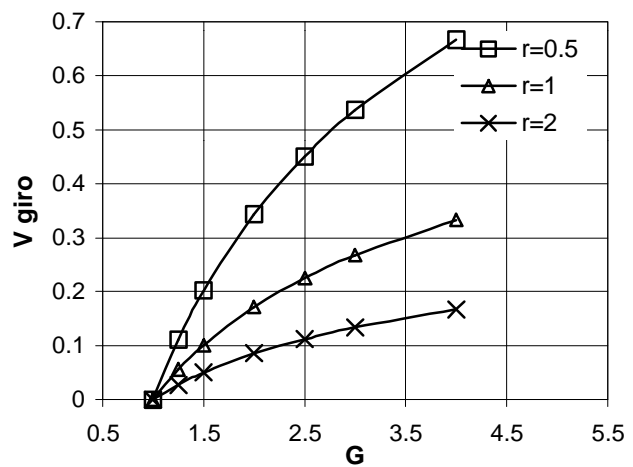
$$w = V_L \left[ \frac{\sqrt{\frac{C_{D1}}{C_{D2}} - 1}}{\sqrt{\frac{C_{D1}}{C_{D2}} + 1}} \right] \cdot \frac{1}{r} \quad (9).$$

Esta expresión nos indica cualitativamente<sup>2</sup> el comportamiento de todo rotor puesto en movimiento por un par de resistencia diferencial, para una sección elemental definida en un radio fijo<sup>3</sup>.

La ecuación (9) nos indica una serie de cosas de importancia primordial. Podemos observar que la velocidad de rotación es directamente proporcional a  $V_L$  e inversamente proporcional al radio. Si consideramos que  $r$  se refiere al radio equivalente aerodinámico ( $r_c$ ), vemos que alargar las palas de una determinada maquina hacia la periferia, conduce a una reducción de la velocidad de giro (figura 4); mientras que proyectarlas hacia el centro conduce a un aumento de la misma. La relación será (aproximadamente):



**figura 4** variación de la velocidad de equilibrio en función del radio equivalente. (valores adimensionales).



**figura 5.** variación de la velocidad de equilibrio en función de la ganancia.

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{r_{C2}}{r_{C1}}$$

Como ya vimos para el caso del rotor estático, la relación  $C_{D1}/C_{D2}$  juega un papel determinante en la velocidad de equilibrio. Esto se muestra en la figura 5.

### 3.4. Potencia Vs velocidad y potencia máxima:

La potencia extraíble en cada sección sale de la ecuación (8):

$$P = \frac{r}{2} \left[ [V_L - (w \cdot r)]^2 \cdot C_{D1} - [V_L + (w \cdot r)]^2 \cdot C_{D2} \right] \cdot r \cdot w \quad (10).$$

Es bastante claro que la potencia máxima extraíble de la MRD estará en algún valor intermedio, entre  $\omega_{eq}$  y  $\omega=0$ ; ya que para ambos extremos ésta es cero.

Para conocer la velocidad de giro para la cual la potencia es máxima procedemos a derivar (10).

<sup>2</sup> Se recuerda que la velocidad real de equilibrio se obtiene resolviendo 4 e igualando a cero.

<sup>3</sup> Para un rotor completo puede considerarse un radio medio aerodinámico equivalente.

De la condición:  $\frac{\partial P}{\partial \omega} = 0$  obtenemos  $\omega_{Max}$ . (Ver apéndice B)

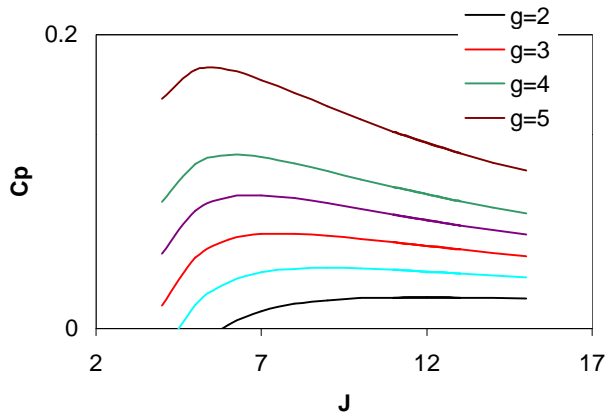


Figura 6. Variación del coeficiente de potencia en función de  $G$  y  $J$

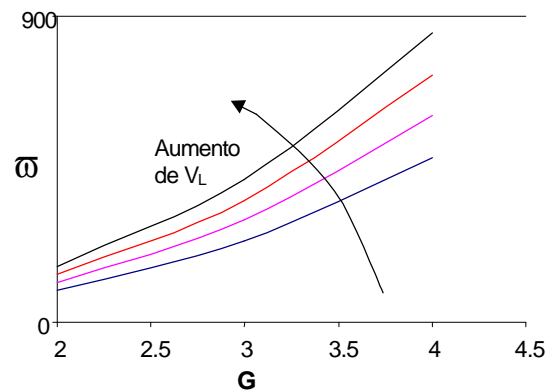


Figura 7. Variación de la velocidad específica de potencia máxima en función de  $G$  y  $V_L$

De los párrafos anteriores podemos extraer que la potencia aumenta con el aumento del radio y con el número de palas; ya que con este aumenta  $M$ ; en tanto no se incremente la interferencia [5]. A la vez que aumenta el torque, la velocidad a la que extraemos la máxima potencia decrece con el aumento del radio. Así es que lo que fundamentalmente logramos al aumentar éste, es cambiar la velocidad a la que extraemos potencia y aumentar el área interceptada total.

La totalidad del aumento de potencia parte del aumento del área de la cuchara.

### 3.5 La variación de la potencia en función de $G$ :

$G$  es el factor más importante a modificar para obtener altas potencias específicas a mayores velocidades de rotación. Aumentar el área a través de aumentar el diámetro total produce un aumento de potencia con una disminución de  $\omega_M$  y un aumento proporcional de los esfuerzos centrífugos en los soportes. De la misma forma recurrir simplemente a ensanchar las palas conduce a un aumento del peso de la instalación. A diferencia de todo esto, un aumento de potencia de salida aumentando  $\omega_M$ , vía aumentar  $G$ , permite una disminución de dichos esfuerzos para igual potencia neta. De las figuras 6 y 7, se deduce la importancia que tiene lograr ganancias elevadas; tanto para aumentar el coeficiente de potencia, como para aumentar la velocidad de giro de  $C_p$  máximo. En MRD  $G$  es el equivalente a  $L/D$  en los sistemas sustentadores.

## 4. COMPORTAMIENTO REAL DEL ROTOR

### 4.1. Efecto del número de Reynolds.

Para resolver (4) se debe conocer  $\vec{D}(Re^\circ, \Theta, etc)$ ; que no suele ser una función simple.

Una cuestión primordial en la solución de (4) es que la dirección real del flujo no es normal al eje de las palas y el módulo de la velocidad cambia de forma constante, y con este el  $Re^\circ$ . Para nuestro análisis hemos contado con el supuesto de un perfil de desprendimiento fijo asegurado y  $C_d$  "independiente de  $Re^\circ$ ". Un perfil con desprendimiento fijo ayuda mucho a simplificar el problema; fundamentalmente considerando que las resistencias de presión y base (producto de la estela turbulenta) serán mucho mayores que la resistencia por fricción [1,4]. Modelos numéricos realizados permiten sostener esta hipótesis. Figura 8. (Nótese la asimetría de velocidades)

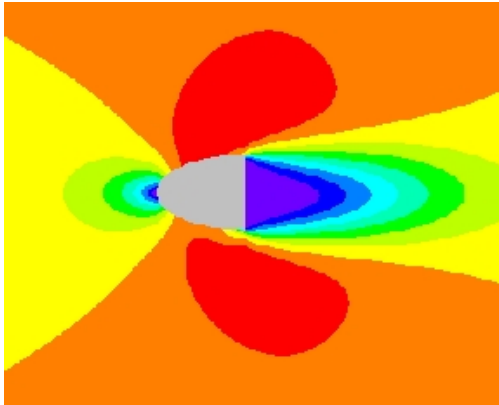


Figura 8

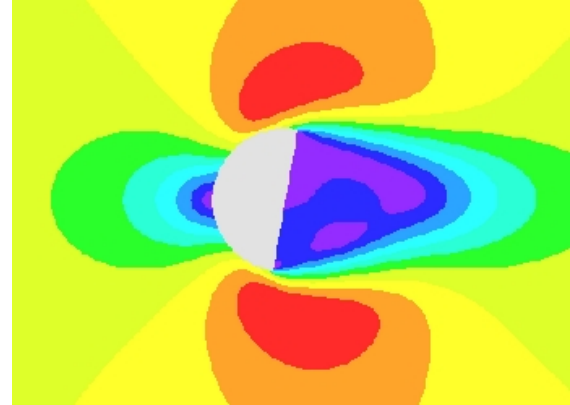


Figura 9

#### 4.2. Interferencia mutua de las palas:

El análisis precedente presupone a la palas expuestas a la corriente libre; pero en un rotor real, las palas se interfieren mutuamente. Tras un cierto número de palas, el rotor asemeja su comportamiento al predicho por las ecuaciones presentes; aunque  $C_{D1}$  y  $C_{D2}$  no se corresponderán con los de una pala aislada.

El comportamiento de las palas en interferencia es muy singular [5].

Cada pala que avanza estará inmersa en la estela turbulenta de la precedente respecto a la dirección del flujo. Moviéndose en una corriente de menor velocidad media, dicha pala puede experimentar una disminución notable de la resistencia al avance respecto a la corriente libre; dando como resultado una reducción neta en el  $C_{D2}$  equivalente. Para las palas que retroceden ocurrirá algo similar; disminuyendo en este caso  $C_{D1}$ . [2,4]. Para la separación adecuada y según el tipo de cuerpo, también se da el efecto inverso.

Como resultado de los fenómenos anteriores, al aumentar el número de palas en el rotor, el aumento de la potencia no será un múltiplo de dicho número; sino que podrá ser tanto superior, como inferior a este producto.

#### 4.3. Efectos del flujo radial.

Por la forma de las palas aquí consideradas, el flujo que incide sobre el rotor tenderá a "encajonarse" en el reverso; moviéndose a lo largo de este de manera radial.

La migración radial en la pala que retrocede inducirá un momento positivo en el eje cuando esta sea hacia el centro de giro. Por otro lado, la pala que avanza experimentará un momento similar pero opuesto. Junto a esto está el bombeo centrífugo del flujo circundante; que consume energía. Si ambos fenómenos se cancelan, la práctica indica que "si no hay ni gasto ni beneficio hay gasto". Por lo tanto, si se trata de palas rectas sugiero evitar diseños que puedan encajonar el flujo; mas aun las palas huecas, que inevitablemente oficiarán como un auténtico ventilador centrífugo.

Si las palas no fueran rectas, el rotor podría oficiar de forma "eficiente" como una turbina radial de flujo cruzado. Esta última ya no es una MRD y su teoría debe analizarse de la misma manera que un ventilador de flujo cruzado<sup>4</sup>; pero oficiando ahora como turbina.

#### 4.4. Fenómenos de resonancia.

Las palas de una MRD como la planteada están sometidas a esfuerzos cíclicos de distintas frecuencias y distintas direcciones.

Las cargas horizontales de baja frecuencia, sin interferencia negativa [5], son las más fáciles de intuir y son las propias del funcionamiento "normal" del aparato. La frecuencia será igual a la

<sup>4</sup> Pero no un Darrieus; que es modelado por filamentos de vórtices en condición no estacionaria.

velocidad de giro; mientras que la variación de cargas estará dada por el mismo análisis echo para determinar la variación de torque; pero considerando la forma exacta de (3).

Un estudio analítico de las oscilaciones transversales de baja frecuencia mostrara que su amplitud dependerá fundamentalmente de la proximidad de la frecuencia fundamental de resonancia de la pala. Esto nos ayuda a determinar como mantener a la pala en una condición segura; simplemente asegurándonos que en la peor condición dicha frecuencia esta lejos de la de excitación.

Conviene aclarar que aumentar la rigidez de la pala y su anclaje puede ser desaconsejable. Así, es común en los rotores de helicóptero recurrir a palas articuladas, o cuya rigidez elástica en la raíz es pequeña.

#### 4.4.1. Fluter.

Como se dijo en un principio, cuando un cuerpo está inmerso en una corriente fluida, se encuentra sujeto a un conjunto de fuerzas que determinan una resultante a través de su centro aerodinámico.

Si el centro aerodinámico está por delante del centro de corte de la pala tendremos una situación de equilibrio inestable; en el que las fuerzas aerodinámicas tenderán a torcer a ésta hasta algún punto de equilibrio; no necesariamente estático. La ecuación (2) ya no valdrá cero; como habíamos supuesto y la pala desviara la corriente generando cargas axiales importantes. La figura 9 muestra una simulación en la que se aprecia este efecto.

Las fuerzas aerodinámicas varían con el ángulo de ataque de la pala, variando por tanto los esfuerzos torsionales; en forma algo caótica para este caso<sup>5</sup> [6]. Así, la pala comenzara a oscilar en flexión y torsión; conformando con la corriente un sistema autoexcitado; donde la amplitud de las oscilaciones dependerá de la forma en que varíe la sumatoria de las fuerzas con el ángulo de torsión de la pala y el momento de inercia de esta. Este mecanismo se conoce como *fluter tridimensional flexotorsional acoplado con flaping*.

Este tipo de sistemas es claramente no lineal, y suele ser representado por ecuaciones del tipo de Van der Poll.

A esta altura cave aclarar que las palas se comportaran de manera diferente según el sentido de la corriente. Para las palas aquí analizadas el centro de presión en condición de flujo posterior está muy adelantado y puede no se llegarse a la amortiguación aerodinámica antes del limite elástico.

Aunque puede parecer extraño, los fenómenos de fluter se dan de forma constante, a todas las velocidades; solo que comienzan a ser perceptibles tras una cierta *velocidad critica* en la cual las oscilaciones se tornan visibles y eventualmente (aunque no siempre) peligrosas.

Por ultimo hay que notar que las alternancias de la estela de Kármán son motores de fenómenos no autoexcitados y disparadores caóticos del fluter. Su frecuencia dependerá del numero de Strouhal [1]; un parámetro que es función de la forma y de la velocidad relativa, que aquí varia cíclicamente.

## CONCLUSIONES

Es claro que la única forma de hacer energéticamente viable una MRD es mediante el incremento del parámetro G hasta un valor cercano a 10; la aerodinámica de fluidos reales es concluyentemente desesperanzadora a este respecto.

No pudiendo hacerse nada para aumentar G y considerando los problemas estructurales, producto de las cargas cíclicas propias del funcionamiento de una MRD, podemos concluir que su construcción solo se justifica para una instalación pequeña, con elevado par de arranque y donde la sencillez constructiva y de diseño sean los factores determinantes.

Por ultimo, el lector habrá notado que no se consideró la expansión de la corriente interceptada por el rotor (propia del teorema de Betz), lo que hubiera complicado mucho el análisis sin aportar nada substancial. El Cp se referirá por lo tanto al área interceptada de la corriente, lejos del rotor.

La expansión de la corriente puede modelarse de forma simplificada en un campo bidimensional, con la superposición de un vórtice y un surgente distribuido. Este modelo muestra claramente la presencia de vorticidad en el flujo, conectada con la generación de

<sup>5</sup> Los cuerpos de desprendimiento turbulento no cumplen con la condición de Kuta y, por tanto, no siguen la teoría del perfil.

torque, junto a la correspondiente desviación lateral de la corriente; que conduce a una componente normal  $V_L$ . Adicionalmente puede estudiarse el interesante efecto de interferencia entre dos rotores.

---

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Hermann Schlichting. *Boundary layer theory 4. ed.* New York : McGraw-Hill, (1965)
  - [2] J.C. Hunsaker, B. G. Rightmire. *Engineering applications of fluid mechanics.* New York : McGraw-Hill, (1947).
  - [3] Désiré Le Gourières. *Energía eólica. Teoría, concepción y cálculo práctico de las instalaciones.* Barcelona : Masson, (1983)
  - [4] F. B. Bradfield. *Aerodynamic properties of a hemispherical cup with application to the hemispherical cup, windmill and anemometer.* Aeronautical Research Council R&M-712 (1919).
  - [5] S. Hörner. *Fluid-Dynamic Drag.* HFD.(1965/1992).
  - [6] S. Hörner. *Fluid-Dynamic Lift.* (1985).
-

## APÉNDICE A.

### Lista de símbolos

- $\vec{D}$ . Fuerza de resistencia aerodinámica. Vectorialmente.
- $\vec{M}, \vec{m}$ . Momento torsor en el eje. En Nm.
- $C_D$ . Coeficiente de resistencia aerodinámica. } Ambos dependientes del  $Re^0$  y de la  
 $C_L$ . Coeficiente de sustentación. } posición de la sección respecto de la  
dirección del flujo.
- $C_p$ . Coeficiente de potencia:  $2P/(\rho V^3 S)$
- D. Modulo de la fuerza de resistencia aerodinámica; tangencial a la dirección de la corriente. En N.
- G. Factor de ganancia aerodinámica.
- J. velocidad específica.
- L. Modulo de la fuerza de "sustentación"; normal a la dirección de la corriente. En N.
- P. Potencia.
- $Re^0$ . Numero de Reynolds.
- S. Superficie interceptada. En  $m^3$ .
- $T_U$ . Trabajo útil en el rotor (aerodinámico). En W.
- V. Módulo de la Velocidad en la corriente libre. En m/seg.
- $V_r$ . Velocidad relativa en el radio r.
- $\theta$ . Posición angular de un elemento del rotor. Medido respecto a la dirección de la corriente libre.
- $\rho$ . Densidad del aire. En  $Kg/m^3$ .
- $\omega$ . Velocidad angular del rotor.
- 

## APENDICE B

### Derivación de las ecuaciones.

#### 1. ANALISIS CUALITATIVO SIMPLIFICADO

Si definimos los esfuerzos de resistencia aerodinámica sobre un elemento como.

$$D = \frac{1}{2} V^2 r \times C_D \times S \quad (1)$$

El momento resultante de los esfuerzos sobre las secciones ubicadas en posiciones opuestas del rotor, 1 y 2 (véase la figura 1) será.

$$M = \frac{r}{2} \left[ [V_L - (\mathbf{w} \cdot r)]^2 \cdot C_{D1} - [V_L + (\mathbf{w} \cdot r)]^2 \cdot C_{D2} \right] \cdot r \quad (8b).$$

### 1.1 Velocidad máxima de equilibrio:

Igualando a cero la ultima expresión y operando obtenemos la velocidad de equilibrio.

$$\begin{aligned} [V_L - (\mathbf{w} \cdot r)]^2 \cdot C_{D1} - [V_L + (\mathbf{w} \cdot r)]^2 \cdot C_{D2} &= 0 \quad \rightarrow \\ [V_L - (\mathbf{w} \cdot r)] \cdot \sqrt{\frac{C_{D1}}{C_{D2}}} - [V_L + (\mathbf{w} \cdot r)] &= 0 \quad \rightarrow \\ G = \frac{C_{D1}}{C_{D2}} \quad ; \quad [V_L - (\mathbf{w} \cdot r)] \cdot \sqrt{G} - [V_L + (\mathbf{w} \cdot r)] &= 0 \quad \rightarrow \\ [V_L \cdot \sqrt{G} - 1] - \mathbf{w} \cdot r [\sqrt{G} + 1] &= 0 \quad \rightarrow \\ \mathbf{w} = V_L \left[ \frac{\sqrt{G} - 1}{\sqrt{G} + 1} \right] \cdot \frac{1}{r} \quad ; \quad \mathbf{w} = V_L \left[ \frac{\sqrt{\frac{C_{D1}}{C_{D2}}} - 1}{\sqrt{\frac{C_{D1}}{C_{D2}}} + 1} \right] \cdot \frac{1}{r} & \quad (9). \end{aligned}$$

### 1.2. Velocidad de potencia máxima:

La velocidad de potencia máxima se encuentra cuando  $\partial P / \partial \omega = 0$   
siendo P:

$$P = \frac{r}{2} \left[ [V_L - (\mathbf{w} \cdot r)]^2 \cdot C_{D1} \cdot \mathbf{w} \cdot r - [V_L + (\mathbf{w} \cdot r)]^2 \cdot C_{D2} \cdot \mathbf{w} \cdot r \right] \quad (10)$$

Derivando 10.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \mathbf{w}} &= \left[ -2 \cdot [V_L - (\mathbf{w} \cdot r)] \cdot \mathbf{w} \cdot r + [V_L - (\mathbf{w} \cdot r)]^2 \right] \cdot G - \left[ 2 \cdot [V_L + (\mathbf{w} \cdot r)] \cdot \mathbf{w} \cdot r + [V_L + (\mathbf{w} \cdot r)]^2 \right] \cdot r \cdot \frac{r}{2} \\ \rightarrow \frac{\partial P}{\partial \mathbf{w}} &= \left[ \left[ - [V_L - (\mathbf{w} \cdot r)] \cdot 2\mathbf{w} \cdot r + V_L^2 - 2 \cdot V_L \cdot (\mathbf{w} \cdot r) + (\mathbf{w} \cdot r)^2 \right] \cdot G - \left[ [V_L + (\mathbf{w} \cdot r)] \cdot 2\mathbf{w} \cdot r + V_L^2 + 2 \cdot V_L \cdot (\mathbf{w} \cdot r) + (\mathbf{w} \cdot r)^2 \right] \right] \cdot r \cdot \frac{r}{2} \end{aligned}$$

igualando a cero la ultima expresión y simplificando

$$(G-1) \cdot V_L^2 + 3(G-1) \cdot \mathbf{w}^2 \cdot r^2 - 4(G+1) \cdot V_L \cdot \mathbf{w} \cdot r = 0 \quad \rightarrow$$

resolviendo para  $\mathbf{w}$

$$\mathbf{w} = \frac{4 \cdot (G+1) \cdot r \cdot V_L \pm \sqrt{16(G+1)^2 \cdot r^2 \cdot V_L^2 - 12(G-1)^2 \cdot r^2 \cdot V_L^2}}{6 \cdot (G-1) \cdot r^2} \quad \rightarrow$$

$$\mathbf{w} = \frac{2 \cdot (G+1) \pm \sqrt{4(G+1)^2 - 3(G-1)^2}}{3(G-1) \cdot r} \cdot V_L \quad (C1)$$