



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

## FoDAMI

## ESTUDIO Y DISEÑO DE UN CINEMATISMO DE VINCULACIÓN NO HOMOCINÉTICA MEDIANTE ENGRANAJES NO CIRCULARES APLICADO AL MOTOR ROTATIVO VERDUR

Ing. Gustavo A. Verdur <sup>\*1</sup>, Ing. Luis R. Mercuri <sup>\*2</sup> e Ing. Ramiro Rodrigo <sup>\*3</sup>

<sup>\*1</sup> Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias – Universidad Nacional de San Luis  
Av. 25 de Mayo 384, Villa Mercedes, San Luis, Argentina, e-mail: [gverdur@fices.unsl.edu.ar](mailto:gverdur@fices.unsl.edu.ar)

<sup>\*2</sup> e-mail: [lmercuri@fices.unsl.edu.ar](mailto:lmercuri@fices.unsl.edu.ar)

<sup>\*3</sup> e-mail: [rrodrigo@fices.unsl.edu.ar](mailto:rrodrigo@fices.unsl.edu.ar)

### RESUMEN

Este trabajo se genera en el marco de proyecto de investigación PROICO N° 50806 “DESARROLLO, EVALUACION Y OPTIMIZACION DE DISPOSITIVOS MECANICOS CON CAPACIDAD DE OPERAR COMO UN MOTOR ROTATIVO Y ESTUDIO DE ALTERNATIVAS DE ACCIONAMIENTO CON DIFERENTES FLUIDOS” desarrollado en Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias (F.I.C.A.) de la Universidad Nacional de San Luis - Argentina. El mismo consiste en un desarrollo innovador basado en la mecánica del motor rotativo Verdur, dispositivo mecánico basado en la interacción de dos piezas móviles que en su movimiento circular puro, generan 4 cámaras de volumen variable.

En el presente trabajo se estudiará un sistema de vinculación cinemática, entre las dos piezas móviles principales (aro y rotor) del motor rotativo Verdur. Dichas piezas mecánicas rotantes no presentan características homocinéticas, sino que existe una diferencia de velocidades de una respecto de la otra, la cual está totalmente determinada analítica y experimentalmente, y responde a una función del tipo senoidal.

El sistema mecánico de vinculación a estudiar, deberá cumplir con el requisito de presentar, ante una entrada de velocidad constante, una salida de velocidad variable, que se aproxime en la mayor medida posible a la geometría y curvatura de la función de transferencia del mecanismo base.

Una alternativa que actualmente se consolida como viable por su avance en las técnicas de mecanizado, la presentan los engranajes no circulares. Particularmente, para este caso se piensa utilizar los del tipo elíptico. Estos pares de engranajes tienen una salida de velocidad expresada por funciones periódicas de tipo cicloidal. La aproximación entre las dos funciones (par aro-rotor y par engranes) se logrará interviniendo en los parámetros geométricos de los engranes hasta minimizar la diferencia entre ambas funciones. Se procederá de forma analítica y mediante modelos virtuales para validación de resultados.

**Palabras Claves:** motor, rotativo, cinemática, engranaje, elíptico.



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

## 1. INTRODUCCIÓN Y DESCRIPCIÓN DEL MECANISMO PRINCIPAL O DE BASE.

El Motor Rotativo VERDUR está constituido por dos únicas piezas móviles rotantes, de generación cilíndrica, que se mueven en una carcasa con diferentes centros de giro. La disposición de estas piezas, genera cuatro cámaras de volumen variable, cada una de las cuales interviene en el proceso termodinámico de transformación de energía química en mecánica, realizado en cuatro etapas clásicas: admisión, compresión, expansión y escape. El ingreso y expulsión de gases es mediante lumbreras y está exento de cigüeñal. Sobre este sistema se han construido ya algunos prototipos, tanto sea para funcionar como motor a explosión, como compresor, incluso como motor de aire, (según la últimas tendencia en tecnologías Cat's), los últimos construidos, se muestran en fotografías (Figura 1), cuyos componentes principales, básicamente son similares.

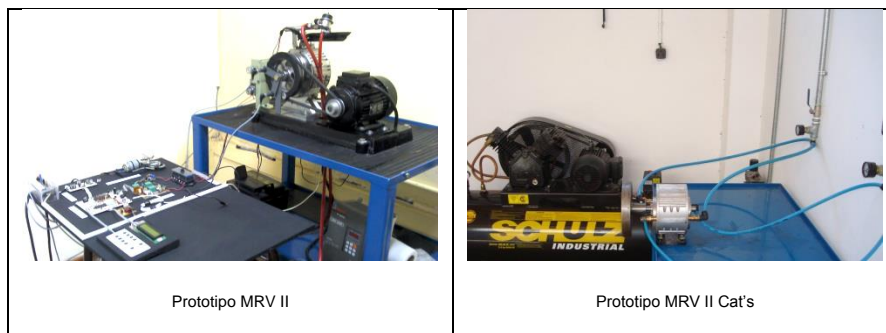


Figura 1 Últimos prototipos

En la siguiente imagen (Figura 2), se muestran los componentes del motor MRVII, y especialmente el sistema interno Aro-Rotor/Paleta (señalados con flechas rojas), que será motivo del presente trabajo. Cabe aclarar que a todos los efectos, el conjunto eje-rotor-paleta, se considera una única pieza por estar estas partes vinculadas solidariamente, y por razones de claridad en la explicación, de ahora en adelante solo se la designará como "Rotor".

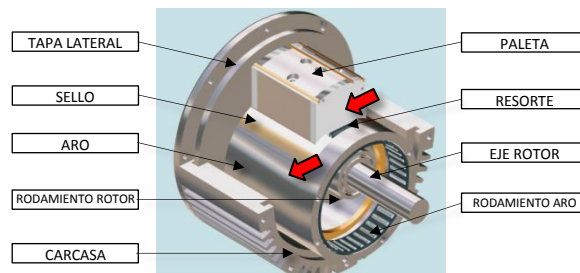


Figura 2 Componentes del mecanismo base del motor



Para comprender la relación mecánica de estos dos componentes, (Aro-Rotor), que giran sobre diferentes centros, se debe contar con la cinemática del mecanismo, que analíticamente se determina del modelo matemático del motor, previamente desarrollado en los comienzos del trabajo de investigación, y que actualmente constituye el núcleo de cálculo, de un potente simulador paramétrico, montado sobre planilla con macros en Excel, que provee, además de la cinemática y la dinámica, todas las funciones relacionadas con las variaciones volumétricas y termodinámicas. Este modelo ha sido motivo de publicaciones anteriores [1],[2],[3], y por ello, solamente se presentarán, a modo de introducción, las fórmulas principales asociadas a este cinematismo.

## 2. PARÁMETROS CINEMÁTICOS DEL MECANISMO ARO - PALETA

Del análisis cinemático del mecanismo, se obtienen las expresiones para la trayectoria y la velocidad de un punto “notable”, que sea representativo del movimiento de los dos elementos móviles, paleta-rotor y aro. El punto más apropiado es el punto “P” (Figura 3), punto común, de contacto entre la cara de la paleta y el borde de la ventana del aro; el mismo pertenece virtualmente a ambos cuerpos, pero es conveniente considerarlo asociado al aro y deslizante sobre la paleta.

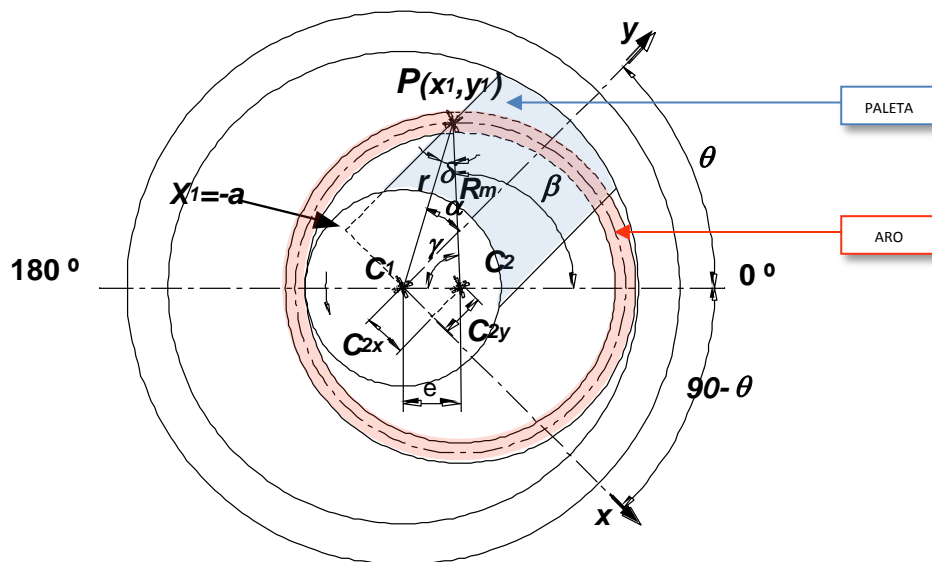


Figura 3 Parámetros geométricos relevantes para la cinemática

Están implícitas en este análisis dos suposiciones, que no distan demasiado de la realidad:



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

- El aro se encuentra absolutamente subordinado al sistema rotor-paleta, a través de contacto permanente, o sea que no hay despegue relativo.

- La velocidad angular del rotor, se considerará cte. (en los ejemplos de este trabajo: 3000 rpm)

Se puede ver que la posición de P, respecto a un sistema de coordenadas móvil, ubicado en el centro de giro del aro, queda definida en todo momento por sus coordenadas polares ( $R_m$ ,  $\beta$ ), o cartesianas ( $x_1$ ,  $y_1$ ), siendo  $R_m$  un dato constructivo cte., atendiendo a esto, la función  $\beta$  ( $\theta$ ) se puede calcular mediante la expresión:

$$\beta = \theta + \tan^{-1} \left[ \frac{a}{\sqrt{R_m^2 - [-a - (e \times \sin \theta)]^2 + e \times (-\cos \theta)}} \right] + \sin^{-1} \left[ \frac{\sin \left( \theta + \tan^{-1} \left( \frac{a}{\sqrt{R_m^2 - [-a - (e \times \sin \theta)]^2 + e \times (-\cos \theta)}} \right)}{R_m} \right)}{R_m} \right] \quad (1)$$

$\omega_1$  y  $\omega_2$  son las velocidades angulares del conjunto rotor- paleta, y el aro respectivamente, y responden a las siguientes ecuaciones:

$$\omega_1 = \frac{d\theta}{dt} = cte. \quad (2)$$

$$\omega_2 = \frac{d\beta}{d\theta} \times \omega_1 \quad (3)$$

Donde el cociente diferencial de la fórmula (3), puede resolverse de varias maneras, ya sea derivando la expresión (1), respecto de  $\theta$ ; u obtener por software la curva derivada (una vez trazada la curva de dicha ecuación), o como tercer método trabajándola discrecionalmente como cociente de incrementos, obteniéndose, la curva de  $\omega_2$  en las gráficas, que se muestran adelante (para  $\Delta\theta = 10^\circ$ , y una velocidad  $\omega_1 = 3000$  rpm.). También, existen dos variables, que analíticamente son de interés, fundamentalmente para el análisis dinámico y son:

“r”, que representa el radio de giro del punto P, pero respecto del centro de giro de la paleta  $C_1$  (Figura 3)

$$r = \sqrt{a^2 + \left\{ \sqrt{R_m^2 - [-a - (e \times \sin \theta)]^2 + e \times (-\cos \theta)} \right\}^2} \quad (4)$$

y  $\delta$ , que representa la inclinación relativa, entre el aro y la paleta, y fundamental, para obtener la curva de desplazamiento del sello mecánico, que debe colocarse entre ellos.

$$\delta = \sin^{-1} \left( \frac{\sin \left[ \theta + \tan^{-1} \left( \frac{a}{\sqrt{R_m^2 - [-a - (e \times \sin \theta)]^2 + e \times (-\cos \theta)}} \right) \right] \times e}{R_m} \right) \quad (5)$$



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

En la curva de la Figura 4, se puede ver el cambio de velocidad del aro, mientras la paleta permanece con velocidad constante (3000 rpm). Las respectivas aceleraciones y desaceleraciones, evidenciando que no se trata de componentes homocinéticos, si bien eso resulta obvio, si se tiene en cuenta que presentan diferentes centros de rotación.

Cabe aclarar, que las expresiones matemáticas, que representan el modelo matemático del sistema, son las más generales, y pueden simplificarse si se considera que, el punto de contacto P con el aro, se sitúa en la intersección del círculo central del aro, con el eje central de la paleta, con eso es posible llevar la variable "a" a cero, lo cual simplifica el análisis, y de hecho, se adapta mejor, al caso que se pretende abordar. El efecto de esta consideración se refleja en el carácter simétrico de la curva de Figura 4.

En la Figura 5, se aprecia la distorsión generada en la curva según el punto de contacto se considere centrado, adelante o, detrás de la paleta.

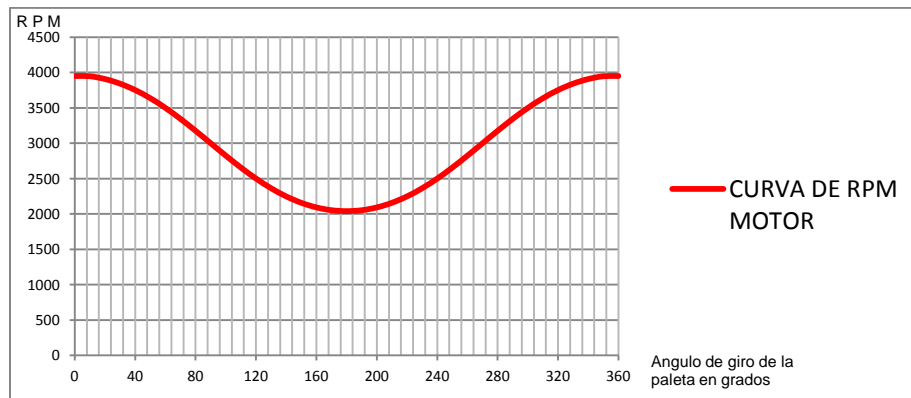


Figura 4 Curva de Velocidad angular del aro Vs. Ángulo girado, a una velocidad constante del rotor

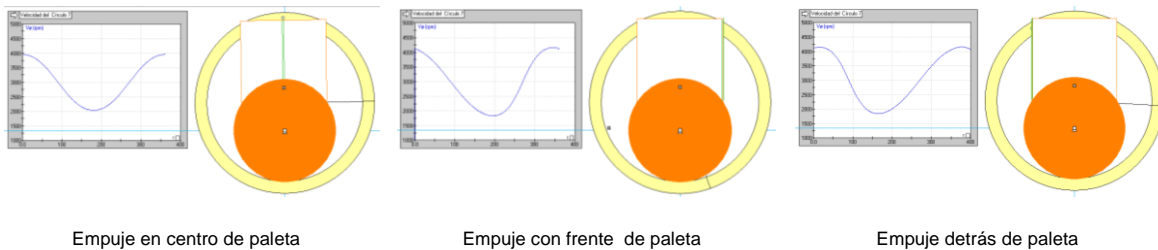


Figura 5 Distorsión de la curva

Para terminar con esta introducción, es importante mencionar, que los parámetros cinemáticos obtenidos analíticamente, se validan además por inserción de "meters" en modelos CAD-2D, y 3D,



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

montados sobre plataformas de simulación dinámica (Working Modelo 2D y 4D), que además, se usan en otras líneas de trabajo, como recursos de post-procesamiento, para análisis de resistencia y deformación, por métodos FEA.

### 3. PRESENTACION DEL SISTEMA

Un modelo cinemático simplificado de funcionamiento análogo o equivalente, es el presentado en Figura 6, donde se muestran las correspondencias geométricas principales.

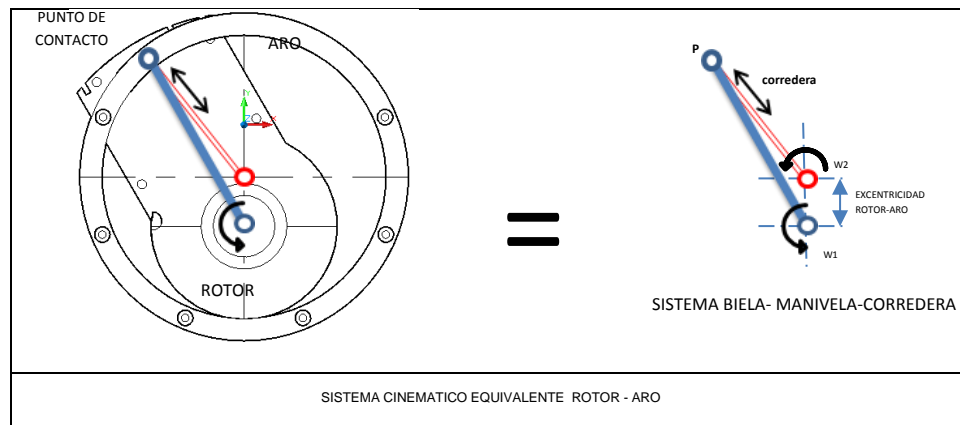


Figura 6 Equivalencia Cinemática

El objetivo, es que estos dos componentes, (ROTOR-ARO), no interactúen por choque, ya que eso genera fuerzas dinámicas asociadas, que llevan rápidamente a fallas mecánicas de resistencia, y deformación de los elementos, por eso se pretende, que exista una vinculación, que actúe de interface cinética, y que compatibilice las diferencias de velocidades, en un movimiento coordinado y suave, con ausencia de impacto. Una de las formas más sencillas de hacer esto, desde el punto de vista constructivo, es la colocación de una corredera en el punto medio de la paleta, vinculada a un muñón en el aro, (o viceversa), según Figura 6., pero fue descartada, por problemas asociados a la posición en que se encuentra, (una zona de alta temperatura del motor), y a las dimensiones limitadas con que se cuenta, que obligan a que los componentes de vinculación, se vean exigidos al límite de la resistencia.

Otra opción, sin duda más compleja constructivamente, y la cual es objeto de este trabajo, para analizar su desempeño y su viabilidad, es colocar un sistema de transmisión variable cíclicamente, que vincule el eje de rotación del rotor con el eje de rotación del aro. Habiendo analizado, diferentes tipos de configuración, se encontró, que los sistemas de engranajes no circulares, en



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

# FoDAMI

especial los elípticos, y dentro de ellos, los que giran alrededor de uno de sus focos, son capaces de reproducir con bastante exactitud la curva de velocidades.

En la Figura 7, se ve un par de dichos engranajes, representados por sus elipses primitivas en contacto.

La expresión de las relaciones matemáticas principales, como pueden deducirse fácilmente vienen dadas por las expresiones tabuladas, y la curva de la relación de velocidades, es del tipo cicloidal como muestra la misma Figura.

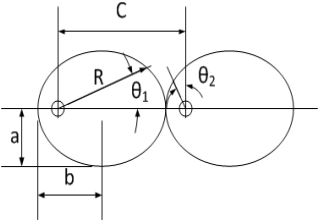
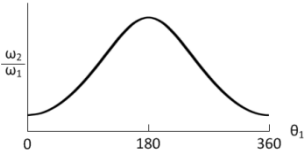
Tipo	Comentarios	Ecuaciones básicas	Ecuaciones de velocidad $\omega_1 = \text{cte.}$
<p data-bbox="240 821 565 842">Dos elipses que rotan alrededor del foco</p> 	<p data-bbox="597 821 781 1035">Los engranajes son idénticos. Relativamente fáciles de fabricar. Usados en mecanismos de retorno rápido, prensas de impresión y maquinaria automática.</p>	$R = \frac{b^2}{a[1 + \epsilon \cdot \cos\theta]}$ $\epsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ $a = \frac{1}{2} \text{ eje mayor}$ $b = \frac{1}{2} \text{ eje menor}$	$\omega_2 = \omega_1 \left[ \frac{r^2 + 1 + (r^2 - 1) \cos\theta_2}{2r} \right]$ $r = \frac{R_{\text{máx}}}{R_{\text{mín}}}$ 

Figura 7 Sistema de transmisión no-circular tipo elíptico

Como se mencionara anteriormente, se pretende entonces que, dada la curva de la variación de velocidad del mecanismo, aproximar a la mínima diferencia la curva de salida del sistema de transmisión diseñado, tarea que, se abordó desde diferentes grupos de trabajo, siguiendo tres metodologías, con el fin de contrastar resultados. La primera, de base analítico-teórica, fue desarrollando las expresiones matemáticas descriptivas de la cinemática, para posteriormente cargarlas en un simulador paramétrico, construido sobre planilla de cálculo, y validada en forma geométrica por CAD; los resultados de esta metodología, se utilizaron como referencia de comprobación. La segunda, esencialmente más experimental, se basó en modelos cinemáticos virtuales, o maquetas digitales, generadas en programas comerciales de simulación dinámica de mecanismos, 2D y 3D, de la firma Dassault System. Por último, el tercero, explotando una nueva y poderosa aplicación computacional, dirigida específicamente al desarrollo de engranajes no-circulares, llamada Delgear, la cual aún no se encuentra disponible comercialmente, pero que pudo usarse gracias a que gentilmente, la firma desarrolladora, permitiera su utilización, con fines de investigación.



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

## 4. RESULTADOS

En las tres líneas abordadas, se obtuvieron soluciones muy similares, leves diferencias del orden de la décima de mm, se presentaron en el sistema de simulación dinámica 2D y 3D, donde se hicieron girar las dos elipses, en 360 grados, generando un punto único de contacto sobre la intersección de las primitivas con la línea que une los focos de las elipses, como era de esperar de acuerdo a las propiedades de las curvas conjugadas, este error era expectable debido a que, en el sistema 2D, no se pudo cargar la tabla de datos de coordenadas de la curva de velocidades, en la elipse conducida, y se tuvo que acudir a insertar un medidor de velocidad relacionado al aro del modelo virtual del mecanismo. En cambio en el sistema 3D, la curva obtenida podía resultar más real, ya que se configura la simulación con colisión entre dientes, sin embargo, cuando se trabajó con el dentado, y se trazaron los perfiles de dientes según el método propuesto por Kuczewski [4] y Bloomfield [5], las imprecisiones graficas del trazado, sumadas al facetado CAD, y al error del integrador, introducía “ruido” de cálculo, y saltos dimensionales de orden significativo, cuando se trabajaba con el dentado en modo de choque o contacto. El más exacto resultó ser modelo exportado como archivo CAD, extraído del paquete de cálculo de Delgear, que además de aproximarse exactamente a la curva, proporciona los perfiles dentados de las elipses. En Figura 8, se ve una pantalla del simulador en planilla de cálculo, donde se obtiene la curva matriz de velocidad en modo analítico, se determina la excentricidad de las elipses, y sus centros, y se puede ver que prácticamente son círculos con centro desplazado:

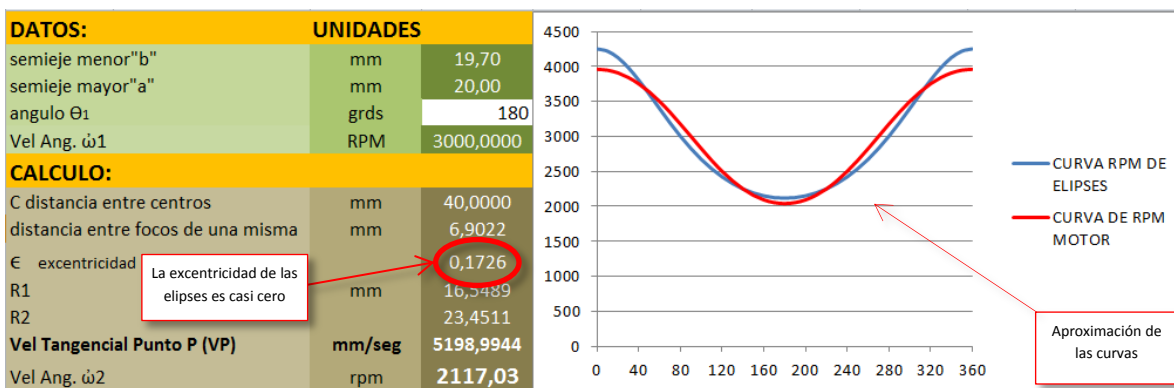


Figura 8 Pantalla de resultados del simulador Excel

En Figura 9, se ve la pantalla del modelo virtual generado en simulador dinámico WM-2D.



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

# FoDAMI

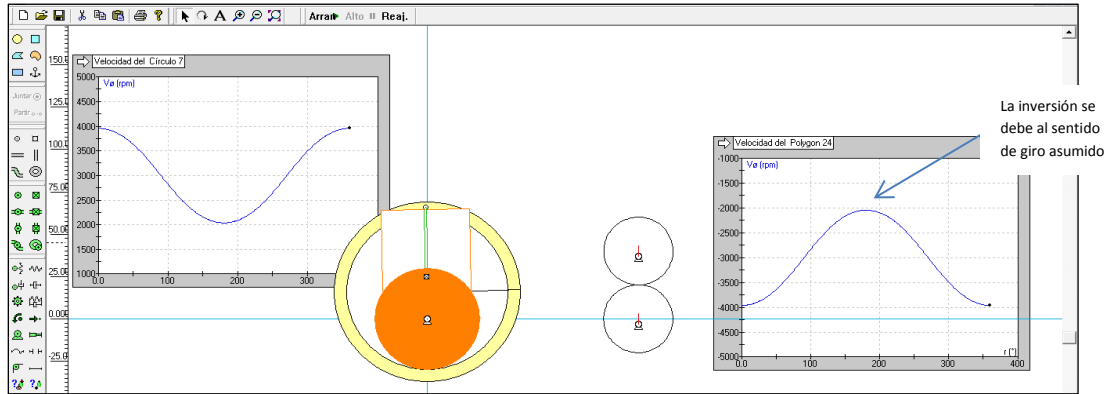


Figura 9 Pantalla de resultados del simulador WORKING MODEL 2D

En Figura 10, se pueden ver resultados del simulador Working Model 4D, con colisión entre engranes, más real que el sistema 2D.

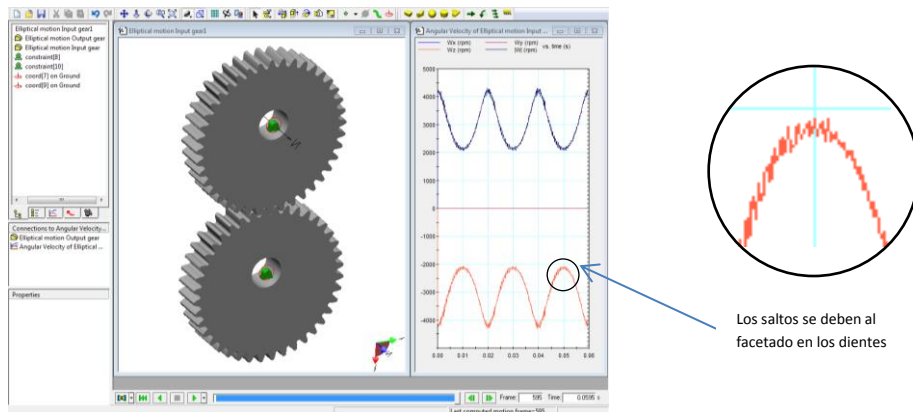


Figura 10 Pantalla de resultados del simulador WORKING MODEL 4D

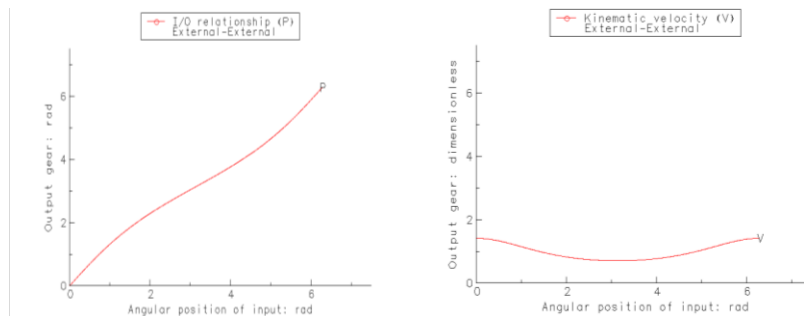


Figura 11 Algunas pantallas de resultados del programa DELGEAR



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

En la Figura 11, se muestran algunas de las salidas gráficas y de datos generadas por el sistema Delgear, desde los datos geométricos tabulados.

Por último, se trabajó sobre maqueta electrónica en CAD 3D, para proyectar el montaje definitivo, de manera de adaptar la transmisión a la distancia entre ejes aro-rotor, montando un par adicional de engranes de relación 1:1, que se adaptan a la condición de geometría y al sentido de giro, ya que un solo par de engranes hubiera invertido el sentido de giro haciendo inaplicable el sistema (Figura 12).

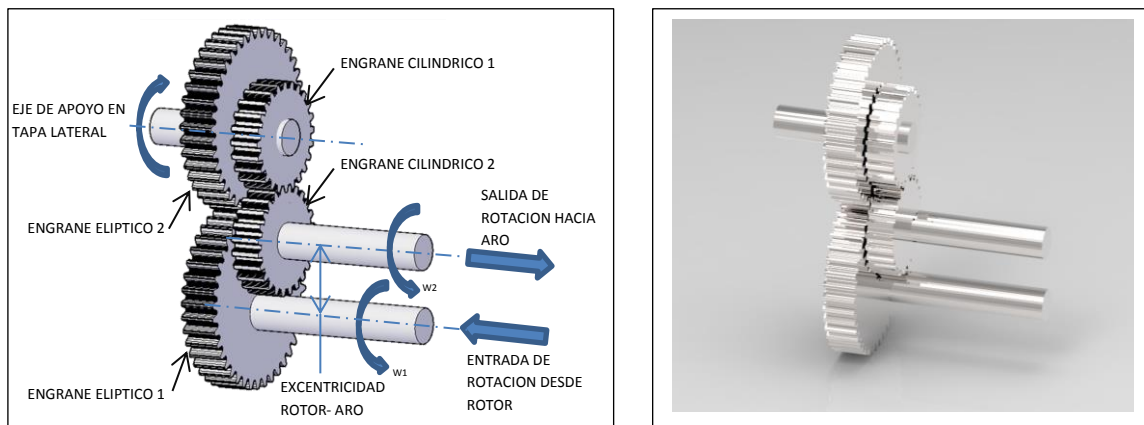


Figura 12 Modelo del conjunto de transmisión

## 5. CONCLUSIONES

Es de destacar, el uso de los engranajes no-circulares como un buen recurso de control cinemático-mecánico, para obtener salidas de velocidad de naturaleza variable en forma periódica. En el caso particular abordado en el presente trabajo, si bien los resultados de aproximación, desde el punto de vista cinemático, se ajustan muy bien al modelo de base, y desde el punto de vista mecánico, al tratarse de un sistema de transmisión por engranajes, que inclusive podrían ser de dentado helicoidal, presentaría buenas características de compacidad, resistencia, bajo desgaste, suavidad de marcha, y eficiencia, que como se sabe son inherentes a este tipo de sistemas de transmisión, sin embargo, su aplicación en este tipo de motor aún resulta discutible comparado con otros sistemas. Básicamente, esto se debe a que la capacidad de ensamblaje, o la compatibilidad mecánica, entre ambos mecanismos (el de transmisión y el de base), resulta tecnológicamente complicada, esto se debe principalmente, a que la geometría del mecanismo base, (en el prototipo MRVII), requiere de una distancia demasiado estrecha, entre los centros de entrada y salida del movimiento, reduciendo demasiado el tamaño de los engranajes, lo que obliga



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

al uso de bieletas conectoras a dichos centros, que no harían más que aumentar la complejidad del sistema, en detrimento de la simplicidad de un sistema mecánico, cuya principal ventaja, es su economía en piezas móviles.

También se destaca que entre las distintas formas de abordar la solución, sin duda que la obtenida bajo la aplicación comercial Delgear, es superior al otorgar la posibilidad de cargar la curva matriz y determinar automáticamente que elipses usar, pudiendo optar incluso por engranajes no-circulares de diferente geometría que las elipses, y además suministrar un grado de detalle constructivo, con salidas directas en formatos .STL, o .SAT, susceptibles de direccionarse a sistemas CAM.

## 6. REFERENCIAS:

- [1] Morán, Verdur, Aguilera, Mercuri, Rossi (2000). "Modelación y Simulación del Motor Rotativo VERDUR". 9º Congreso Chileno de Ingeniería Mecánica y IV Congreso Nacional de Energía, COCIM-CONAE 2000.
- [2] Morán, Verdur, Aguilera, Rossi, Mercuri. "Desarrollo de un motor rotativo original". INNOVA 2000, X Congreso Internacional de Innovación Tecnológica, V Jornadas Internacionales de Innovación Tecnológica y IV Feria Internacional de Innovación Tecnológica. Año 2000.
- [3] Morán, Verdur, Aguilera, Rossi, Mercuri. "Motor Rotativo Verdur". 8º Congreso Chileno de Ingeniería Mecánica, IV Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica. Año 1999.
- [4] Kuczewski, M. "Designing Elliptical Gears Machine Design". Apr 7, 1988, Vol. 60 No 7,
- [5] Blommfield, B. "Design guide when you need noncircular gears. Gear Design and Application" (Ed N. P. Chironis), pp 158 –165. Mc Graw Hill. New York: 1967.
- [6] Dooner, D. B; Seiring, A. "The Kinematic Geometry of Gearing: A Concurrent Engineering Approach. John Wiley and Sons", Wiley Series in Design Engineering. New York: 1995.