

## **MODELOS DE FRICCIÓN EN UN MECANISMO PENDULAR FLEXIBLE**

**Fernando S. Buezas\*<sup>1,2</sup>, Carlos P. Filipich<sup>3,4</sup> y Marta B. Rosales<sup>2,3</sup>**

*\*<sup>1</sup> Departamento de Física - Universidad Nacional del Sur  
Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Argentina - e-mail: fbuezas@gmail.com*

*<sup>2</sup> CONICET, Argentina*

*<sup>3</sup> Departamento de Ingeniería - Universidad Nacional del Sur  
Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Argentina - e-mail: mrosales@criba.edu.ar*

*<sup>4</sup> Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada. Universidad Tecnológica Nacional. FRBB, 11 de Abril 461, (8000) Bahía Blanca, Argentina - e-mail: cfilipich@yahoo.com.ar*

### **RESUMEN**

En varios mecanismos, e.g. robóticos, se estudia el problema de la dinámica de brazos articulados flexibles. El problema de la fricción en dicha articulación podría causar inestabilidades que produzcan ruidos molestos y desgasten prematuramente este tipo de dispositivos. En este trabajo se presenta un modelo de un péndulo sometido a grandes rotaciones y deformaciones en su plano. Es considerada la fricción estática y dinámica tipo coulombiana en el pivote de donde se sostiene por contacto seco el cuerpo pendular. También se considera un modelo de fricción tipo viscoso. La formulación del problema se realiza dentro de la Mecánica del Continuo en 2D en la referencia puramente lagrangeana donde son utilizados los dos tensores de tensiones de Piola – Kirchoff con ecuaciones constitutivas lineales o no lineales. Este problema es resuelto por el método de Elementos Finitos. Se utiliza un software de uso general que construye el modelo de elementos finitos a partir de la introducción de las ecuaciones diferenciales a derivadas parciales gobernantes (FlexPDE). El trabajo concluye con un estudio de la potencia disipada para los distintos modelos de fricción.

**Palabras Claves:** Contacto, Fricción, Deformación finita, Inestabilidad, Mecánica no lineal.

## 1. INTRODUCCIÓN

El problema de contacto y fricción se encuentra en muchas ramas de la Ingeniería Mecánica como pueden ser procesos de conformado de metales, entre láminas metálicas y rodillos en la laminación en caliente, etc. Otro tipo de problemas son las uniones articuladas y en particular los mecanismos utilizados en robótica que cuentan con brazos articulados flexibles. El problema de la fricción en dicha articulación podría causar inestabilidades que produzcan ruidos molestos y desgasten prematuramente este tipo de dispositivos. Es importante considerar la flexibilidad de la unión y la fricción en el estudio del problema dinámico de la misma [1,2].

En este trabajo se presenta un modelo de un péndulo [3] sometido a grandes rotaciones y deformaciones en su plano. Es considerada la fricción estática y dinámica tipo coulombiana en el pivot de donde se sostiene por contacto seco el cuerpo pendular. Por otro lado se tiene en cuenta la flexibilidad del eje. La formulación del problema se realiza dentro de la Mecánica del Continuo en dos dimensiones en la referencia puramente *lagrangeana* donde son utilizados los dos tensores de tensiones de Piola – Kirchoff con ecuaciones constitutivas lineales o no lineales. Este problema es resuelto por el método de Elementos Finitos. Se utiliza un software de uso general que construye el modelo de elementos finitos a partir de la introducción de las ecuaciones diferenciales a derivadas parciales gobernantes (FlexPDE). El trabajo concluye con un estudio de la energía para los distintos modelos sin y con fricción.

## 2. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

El planteo de las ecuaciones gobernantes se realiza en el marco de la mecánica del continuo en la representación *lagrangeana* o material dando algunas ventajas respecto del planteo *euleriano* o espacial para problemas de mecánica de sólidos. Por ejemplo, si el problema del continuo está dado en la configuración *euleriana*, además de plantear las ecuaciones de movimiento (Ecs. de Cauchy) se tendrá que resolver en forma acoplada la conservación de la masa. No es ésta la principal dificultad de tal enfoque, ya que si el cuerpo realiza desplazamientos y deformaciones finitas en el espacio, el planteo de las ecuaciones de contorno (posición geométrica del borde) es un problema matemáticamente inconsistente ya que la posición misma es una de las incógnitas del movimiento y por otro lado es necesario conocerlas para el planteo de las condiciones

de borde. Sin embargo, si el problema se da en la configuración *lagrangeana* o material solo se tendrá que resolver el problema de movimiento:

$$\nabla \cdot P + \rho_0 b = \rho_0 A \quad (1)$$

donde  $P$  es el primer tensor de tensiones de Piola – Kirchoff,  $\rho_0 = \rho(X, t_0)$  es la densidad inicial, y  $A = \partial V / \partial t$  es el campo de aceleraciones dado como una derivada parcial del correspondiente campo de velocidad. Las condiciones de contorno son impuestas en el contorno inicial (cuya posición es dato ya que es el propio campo material), quedando el planteo del problema de contorno, junto con las condiciones iniciales y las ecuaciones de movimiento cerrado consistentemente. Tanto la posición del contorno como cualquier parte del cuerpo serán conocidos una vez resuelto dicho problema diferencial. El planteo del problema del movimiento del continuo en la forma material es análogo al usado en la mecánica de partículas y cuerpos rígidos. El segundo tensor de Piola - Kirchoff simétrico, viene dado por  $P = F S$  donde  $F$  es el tensor gradiente de deformaciones. Reemplazando en la Ecuación (1)

$$\nabla \cdot (FS) + \rho_0 b = \rho_0 A \quad (2)$$

En este trabajo se usan materiales tipo St. Venant—Kirchhoff como constitutiva  $S = \lambda \text{tra}(E) + 2\gamma E$  con  $E$  el tensor deformación finita (de Green).

### 3. MODELO DE FRICCIÓN DE COULOMB

Este modelo fue introducido por Amontons en 1699 y luego fue desarrollado por Coulomb en 1785 [4]. Sin embargo el carácter global, por tratarse de cuerpos rígidos, daba a este modelo una aproximación muy burda. Sin embargo cuando se aplica a cuerpos deformables, este modelo resulta mucho más realista, pudiéndose reproducir fenómenos como el llamado “*stick and slip*”. La fuerza de rozamiento que un cuerpo ejerce sobre otro, es siempre menor o igual a un factor  $\mu$  por la fuerza normal a la superficie de contacto (llamada fuerza de contacto entre los dos cuerpos). Esta fuerza de fricción es además colineal con dicha superficie de contacto y en sentido contrario a la velocidad con que los dos cuerpos deslizan.

$$F_T \leq \mu F_N \begin{cases} \text{si } F_T < \mu F_N \Rightarrow \dot{u}_t = 0 \\ \text{si } F_T = \mu F_N \Rightarrow \dot{u}_t = -\lambda F_T \end{cases} \quad (3)$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de fricción,  $\lambda$  un número real y  $\dot{u}_t$  es la componente tangencial de la velocidad. Como se puede observar, la ley de rozamiento tiene que ser expresada no solo en términos de la fuerza normal, sino también de la velocidad ya que depende de la evolución previa. La fricción estática estará contenida en la anterior ley Ecuación (3) (ver Figura 1)

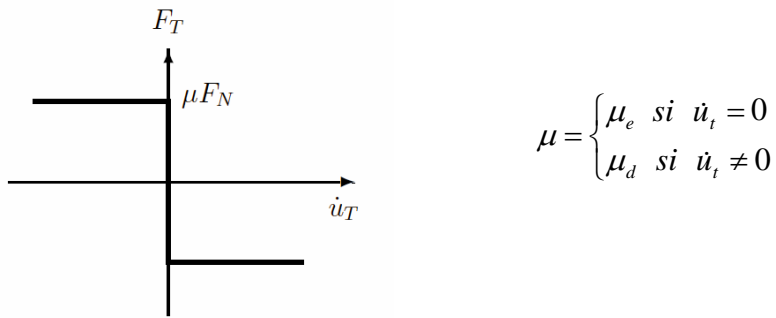


Figura 1. Gráfico de la Ley de Fricción.

### 3.1. Regularización del problema de Coulomb

La ley de fricción formulada en el apartado anterior es de carácter no regular, ya que no existe una forma funcional unívoca que relacione  $F_T = F_T(\dot{u}_T)$  para todos los valores de la velocidad. Por ejemplo cuando la velocidad es nula no está definida la fuerza de fricción. Para esta situación la dependencia funcional de dicha fuerza de fricción es con respecto a otras cantidades cinemáticas; de hecho será igual y opuesta a la fuerza que tienda a hacer deslizar un cuerpo sobre el otro. Sin embargo esta ley se puede regularizar, aproximándola con una función similar a un escalón. Desde el punto de vista numérico esta aproximación será válida tomando un  $\varepsilon$  lo suficientemente pequeño (Figura 2).

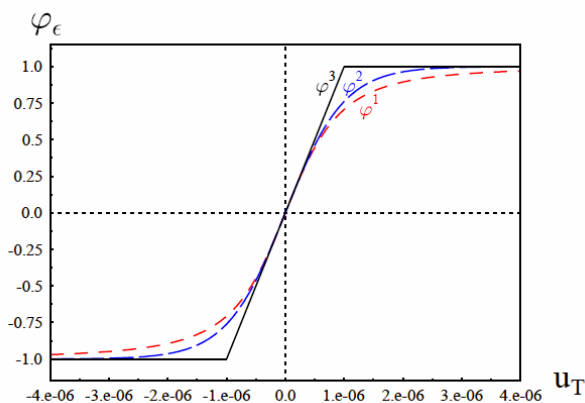
$$F_T = -\mu \varphi_\varepsilon(\dot{u}_T) |F_N| \quad (4)$$

Dicha regularización puede realizarse con distintas funciones [4], e.g. Raíz

Cuadrada:  $\varphi_\varepsilon^1(\dot{u}_T) = \frac{\dot{u}_T}{\sqrt{\dot{u}_T^2 + \varepsilon^2}}$ , Tangente Hiperbólica  $\varphi_\varepsilon^2(\dot{u}_T) = \tanh \frac{\dot{u}_T}{\varepsilon}$ , definida

a trozos (la utilizada en este trabajo)  $\varphi_\varepsilon^3(\dot{u}_T) = -1$  si  $\dot{u}_T < -\varepsilon$ ,  $= \frac{\dot{u}_T}{2\varepsilon}$  si  $-\varepsilon < \dot{u}_T < \varepsilon$

$= +1$  si  $\dot{u}_T > \varepsilon$ .



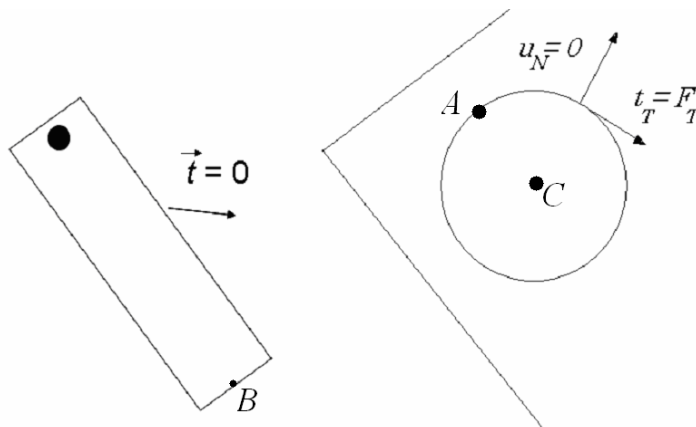
**Figura 2.** Tres regularizaciones de la ley de fricción.

#### 4. CONDICIONES DE BORDE PARA EL PÉNDULO

El modelo derivado de la teoría de la mecánica del continuo el cuerpo será tratado como un modelo 2D. Las condiciones de borde impuestas sobre el péndulo son las siguientes. En la superficie exterior el vector tensión es nulo y en el pivote la componente normal del desplazamiento y la componente tangencial de la tensión también serán nulas. En el pivote del péndulo vale  $u_N = 0$  y  $t_T = F_t$  (Figura 3). Ya que la fuerza de fricción depende de la fuerza normal en el pivote (que es desconocida) se reformula el problema para que todas las condiciones de borde queden en término de las tensiones: se supone que a cada punto del pivote (eje) le corresponde una fuerza normal proporcional al desplazamiento  $F_N = k u_n$ . Luego dada una  $k$  lo suficientemente grande se podrá aproximar el problema anterior. Entonces,  $t_N = -k u_n$  y  $t_T = F_t$ .

#### 5. Planteo de la energía

La variación de energía del péndulo (modelo elástico no-lineal) puede ser encontrada luego de plantear la energía total,  $E = T + U_e + U_g$  donde  $T = \frac{1}{2} \int \rho_0 \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} dVol$ ,  $U_g = g \int \rho_0 y dVol$ ;  $\dot{U}_e = \int \frac{\rho}{\rho_0} tr \left( \mathbf{S} \frac{D\mathbf{E}}{Dt} \right) dVol$ ,  $g$  es la aceleración gravitatoria e  $y$  es la componente material a lo largo de la altura del vector posición. Todas las integrales fueron realizadas con respecto a la configuración *lagrangiana* no deformada con lo cual las derivadas materiales son coincidentes con las parciales, i.e.  $\frac{D\mathbf{E}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ .



*Figura 3. Esquema de las condiciones de borde.*

## 6. RESULTADOS NUMÉRICOS

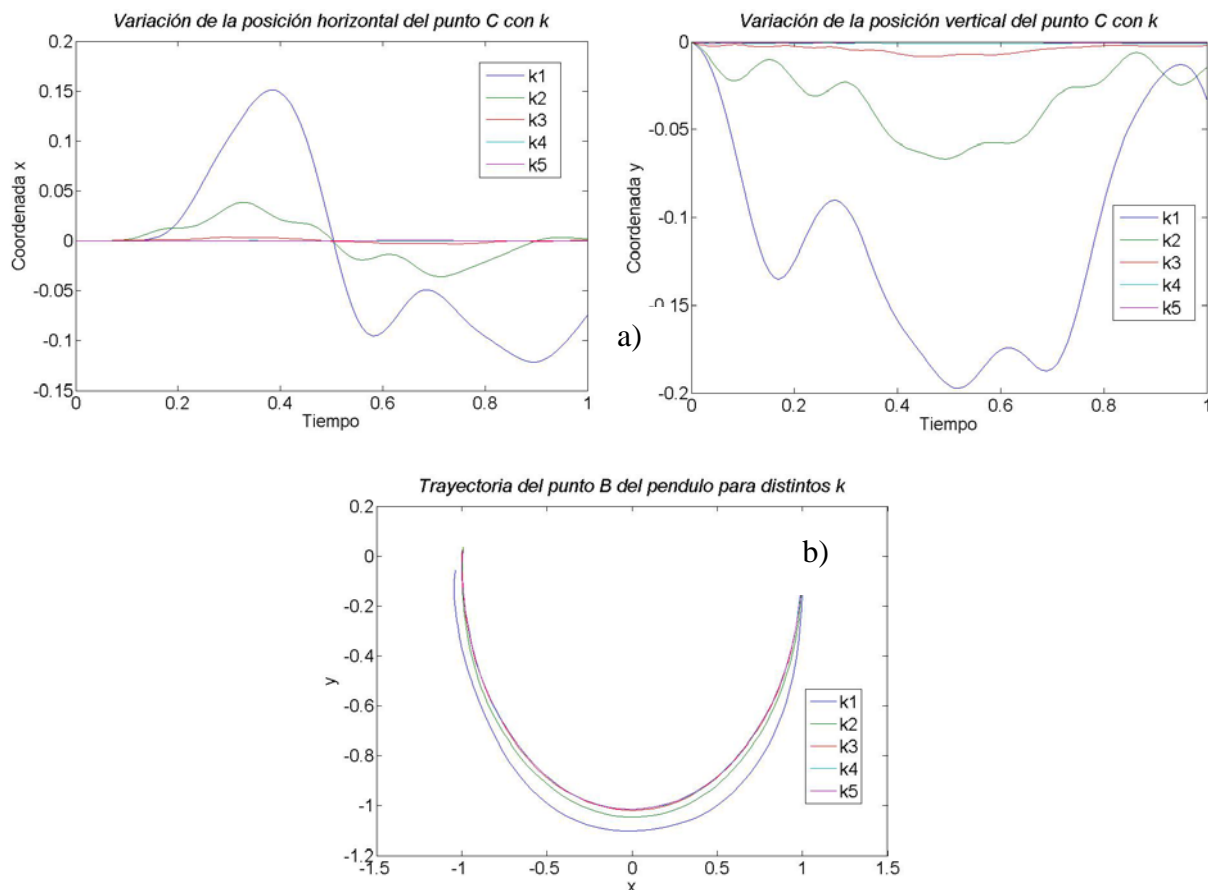
Fue desarrollado un ejemplo para ilustrar la influencia de los parámetros involucrados, principalmente la rigidez del eje y la fricción. Se trata de un péndulo plano de longitud  $L = 1$  m, ancho  $d = 0.15$  m, material con  $E = 6 \cdot 10^6$  N/m<sup>2</sup>,  $\nu = 0.3$ , girando alrededor de un eje de  $R = d/4$  que se supondrá con distintas flexibilidades a través de valores de rigidez  $k$  (N/m/m). También se estudiarán variaciones en la fricción entre péndulo y eje. Las simulaciones serán realizadas con FlexPDE, un entorno para resolver problemas con un modelo de elementos finitos y rutinas numéricas. Se utilizó un modelo 2D con 132 elementos cuadráticos. El péndulo es liberado desde la posición horizontal en reposo.

### 6.1. Influencia de la flexibilidad del eje.

La respuesta en el tiempo del péndulo en movimiento fue hallada para distintos valores de la rigidez del eje con  $k = 0.1E, E, 10E, 100E, 1000E$  (donde  $E$  es el valor del módulo de elasticidad). Esto es, el eje varía de más flexible a más rígido. Para evaluar la influencia de este parámetro se muestran en la Figura 4a las variaciones en el tiempo de las coordenadas  $x$  e  $y$  correspondientes al punto C (ver Figura 3).

Puede observarse que si el eje es muy flexible ( $k_1$ ) el punto sufre oscilaciones notables. A medida que se rigidiza el eje ( $k_5$ ), el punto tiende a mantenerse en reposo. El efecto de la flexibilidad es también visible en la Figura 4b que representa las trayectorias del

punto B (en el extremo libre del péndulo) correspondientes aproximadamente a medio período del modelo rígido análogo. Puede verse que a mayor flexibilidad del eje el punto B tiene una trayectoria más baja, como era de esperar.



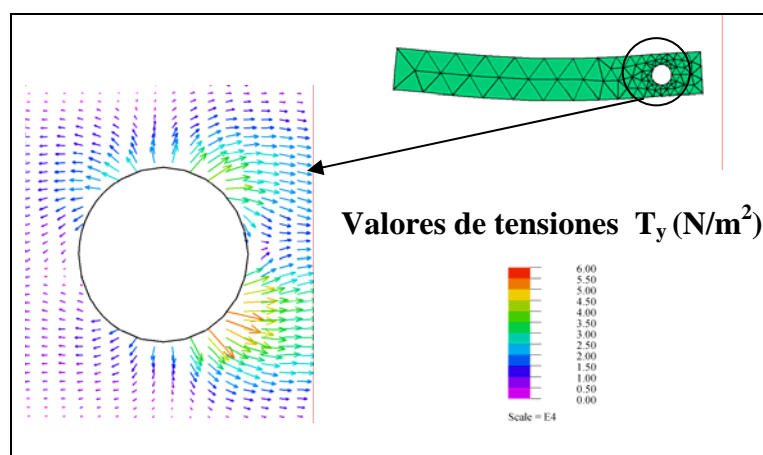
**Figura 4.**  $k_1 = 0.1E, k_2 = E, k_3 = 10E, k_4 = 100E, k_5 = 1000E$ . a) Coordenadas  $x$  e  $y$  del punto C (eje) en el tiempo. b) Trayectorias del punto B (extremo libre del péndulo).

Otro resultado interesante que permite evaluar el comportamiento de la junta es un mapeo de las tensiones en una región cercana al eje, en un instante. En la Figura 5 se muestran los vectores tensión de Piola – Kirchoff correspondientes al plano cuya normal es el eje  $y$ , para el instante  $t = 1s$ ,  $k_5 = 1000E$ , en una zona alrededor de la junta.

## 6.2. Influencia de la fricción de la junta.

La fricción entre el material del péndulo y el eje es tenida en cuenta con el modelo de fricción seca (modelo de Coulomb). Se consideran dos coeficientes, uno estático  $\mu_e = 0.7a$  y uno dinámico  $\mu_d = 0.5a$ , siendo  $a$  un parámetro que puede valer  $a=0.1$ ,

0.25, 0.5, 0.75, 1. Durante el movimiento las superficies en contacto alternarán entre fricción estática y dinámica dependiendo de las condiciones en cada instante.



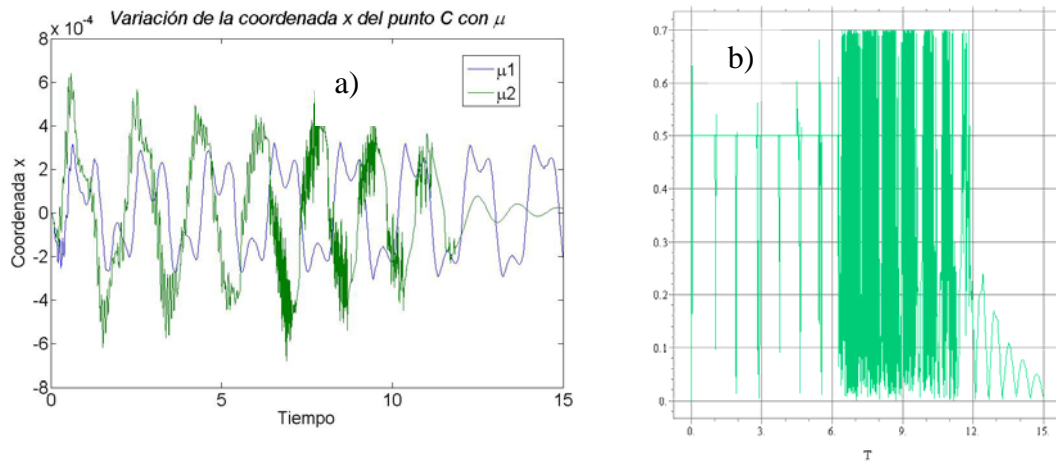
**Figura 5.** Valores y direcciones de tensiones Piola – Kirchoff en una región cercana a la junta para  $k_5 = 1000E$  en el instante  $t = 1s$ .

En la Figura 6a se muestran las coordenadas  $x$  del punto C para dos valores del parámetro  $a$ , en todos los casos con  $k_5 = 1000E$ . Dado que el período del péndulo rígido es de aproximadamente 1 s, puede observarse que cada segundo se produce una inestabilidad (“stick and slip” en inglés) en el movimiento debido a una alternancia entre el rozamiento estático y dinámico que se hace más evidente cuanto mayor es el valor de los coeficientes o sea del valor del parámetro  $a$ . Se advierte que luego de 6 segundos se aumenta la inestabilidad, coincidiendo con una disminución en la velocidad pendular.

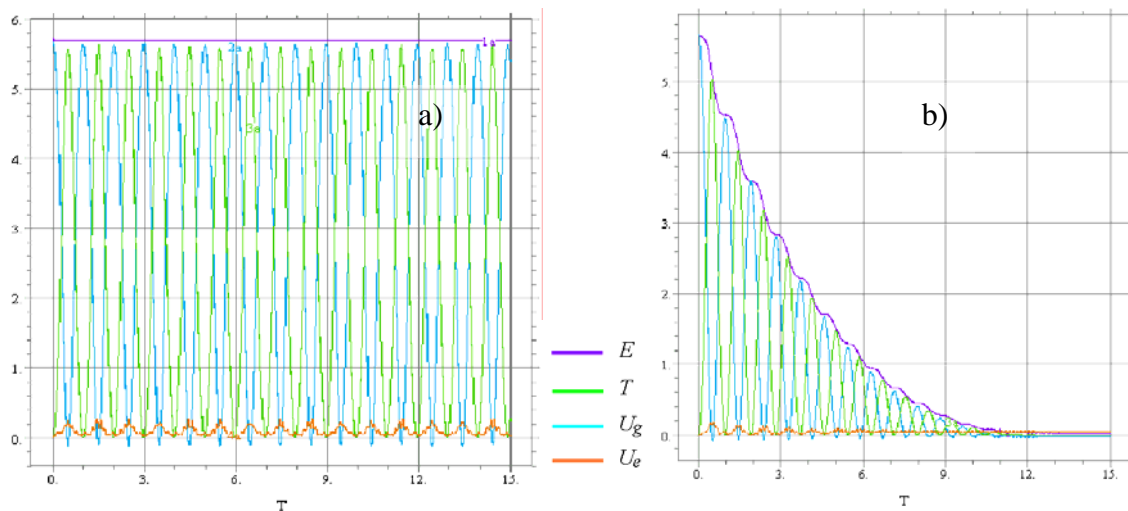
La Figura 6b muestra los valores instantáneos de la relación (Fuerza de fricción)/(Fuerza normal) en el punto A (ver Figura 3). Es notable la inestabilidad a partir de los 6 segundos o sea la alternancia entre fricción estática y dinámica.

## 7. Análisis de energía.

La Figura 7 incluyen los diagramas de variación de energía para el péndulo sin rozamiento ( $k_5 = 1000E$ ) y con rozamiento para el mismo  $k$  y  $a_5 = 1$ . Es de notar la conservación de la energía total  $E$  en el primer caso. En forma similar que en el caso rígido, la energía cinética  $T$  va en contrafase con la energía potencial gravitatoria  $U_g$ .



**Figura 6.**  $k_5 = 1000E$ . a) Variación temporal de la coordenada  $x$  del punto C (eje).  $a_1 = 0.1$  y  $a_5 = 1$ .; b) Relación (Fuerza de fricción)/(Fuerza normal) en el punto A vs. Tiempo.  $a_5 = 1$ .



**Figura 7.** Energía (en kJ) en función del tiempo para a) movimiento sin fricción, b) movimiento con fricción ( $a_5 = 1$ ),  $k_5 = 1000E$ .

Una pequeña cantidad de la energía se intercambia con la energía elástica  $U_e$ . Dado que el sistema, en este caso, es conservativo, este análisis es útil para controlar la calidad de la solución numérica. En el otro caso, péndulo con fricción, se observa la disipación de la energía total.

## 8. CONCLUSIONES

En este trabajo se plantearon las ecuaciones del continuo gobernantes del problema del movimiento de un péndulo plano flexible con un eje no puntual flexible y con fricción.

El planteo se realiza en la referencia *lagrangeana* que brinda un enfoque elegante y más compacto que un tratamiento *euleriano*. Se realizaron simulaciones numéricas utilizando un software que utiliza un modelo de elementos finitos para la resoluciones del sistema gobernante que es altísimamente no lineal. Fue modelado el péndulo flexible con distintas flexibilidades en el eje sin y con fricción seca, teniendo en cuenta coeficientes estáticos y dinámicos en el rozamiento. En este último caso pudo reproducirse exitosamente el fenómeno de inestabilidad por fricción, llamado en inglés, *stick and slip*, responsable de ruidos como el emitido por una bisagra sin aceite, una rueda rozando en el pavimento al resbalar, la rueda de los trenes con la vía, etc. En definitiva, se cuenta con una herramienta que permite analizar efectivamente un problema por demás complejo y realizar estudios paramétricos como el presente y posteriores estudios cualitativos y cuantitativos, con la potencia de haber sido derivada de principios rigurosos.

## 9. REFERENCIAS

1. T. Hardeman, R. Aarts And B. Jonker. *Modelling and Identification of Robots with Joint and Drive Flexibilities*. Iutam Symp. Vibr. Control Nonlinear Mechanisms & Struct. Springer. The Netherlands. 173–182. (2005).
2. M. Cocu, E. Pratt and M. Raous. *Formulation and approximation of quasistatic frictional contact*, *Int. J. Engng. Sc.*, **34**, 783-798 (1996).
3. Yu. Vetyukov, J. Gerstmayr and H. Irschik. *The comparative analysis of the fully nonlinear, the linear elastic and consistently linearized equation of motion of the 2D elastic pendulum*. *Comp. & Struct*, **82**, 863-870 (2004).
4. M. RAOUS. *Friction and adhesion: models, formulations, numerical methods and applications*. Seminars. Dpt of Civil Eng., Universita Roma 2 Tor Vergata, Italia, (2006).

## Agradecimientos

Los autores de este trabajo desean agradecer al CONICET, a la ANCyT y a la SGCyT de la Universidad Nacional del Sur, todas instituciones argentinas, por el apoyo financiero recibido para la realización de este trabajo.