

## **Estudio teórico del efecto del desplazamiento del plano que contiene a las palas con respecto al centro de masas en la dinámica del vuelo de un desacelerador aerodinámico de alas rotatorias**

Joaquín Piechocki, Vicente Nadal Mora<sup>1</sup>, Ángel Sanz - Andrés<sup>2</sup>

*Becario CIC y docente. Área Departamental Aeronáutica, Facultad de Ingeniería,  
Universidad Nacional de La Plata.*

*Calle 116 e/47 y 48, (1900) La Plata, Buenos Aires, Argentina.*

*Email: Joaquin.piechocki@ing.unlp.edu.ar*

<sup>(1)</sup>*Área Departamental Aeronáutica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata  
Calle 116 e/47 y 48, (1900) La Plata, Buenos Aires, Argentina.*

<sup>(2)</sup>*Instituto de Microgravedad Ignacio Da Riva, Escuela Técnica Superior de Ingenieros  
Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid  
Plaza Cardenal Cisneros, (3 – 28040) Madrid, España*

### **Resumen:**

La desaceleración de cuerpos que caen en atmósferas resulta de vital interés para la investigación y exploración aeroespacial, así como también para la medición de parámetros atmosféricos. El pararrotor es un desacelerador de alas rotatorias que vuela en régimen de autorrotación. Su desempeño está supeditado al conocimiento de la dinámica del vuelo en función de los parámetros aerodinámicos del dispositivo.

El caso general de la dinámica del vuelo del pararrotor, donde el plano que contiene a las palas pasa por el centro de masas del cuerpo, ha sido desarrollado en [1, 2]. En virtud de que este plano puede no pasar por el centro de masas, se realiza el presente desarrollo a fin de conocer teóricamente el efecto de este desplazamiento en la dinámica del vuelo. A las ecuaciones de la dinámica del cuerpo rígido previamente desarrolladas se agrega la distancia entre el plano que contiene a las palas y el centro de masas.

Los resultados muestran que la distancia entre el centro de masas del dispositivo y el plano que contiene a las palas puede o no modificar la estabilidad del funcionamiento del pararrotor en condiciones de vuelo libre, dependiendo de la magnitud de la relación entre la distancia mencionada y la distancia del centro de presiones al eje de revolución del pararrotor.

**Palabras Claves:** Pararrotor, estabilidad, dinámica, desacelerador aerodinámico, sonda.

**Nomenclatura**

$A$ ,	matriz de coeficientes de la linealización del sistema de ecuaciones del movimiento,	$I_i$ ,	momentos principales de inercia,
$A_{ij}$ ,	coeficientes de fila $i$ y columna $j$ de la matriz $A$ ,	$M_i$ ,	componentes de los momentos de las fuerzas exteriores en la dirección $i$ ,
$B_i$ ,	matriz de coeficientes constantes para una función de la $i$ ésima variable,	$\bar{M}$ ,	momento generado por las fuerzas exteriores sobre el cuerpo,
$CD$ ,	coeficiente de resistencia aerodinámica de la pala,	$n_i$ ,	matriz de transformación para la obtención del módulo de los vectores en la dirección de la pala $i$ ,
$CM$ ,	centro de masas del pararrotor,	$r_{ij}$ ,	componente $j$ de la posición de la pala $i$ al respecto del centro de masas del cuerpo,
$CA_i$ ,	centro aerodinámico en ejes cuerpo de la pala $i$ ,	$S$ ,	área de una sola pala,
$CL$ ,	pendiente de la curva de sustentación de la pala,	$U$ ,	velocidad del pararrotor en dirección al eje vertical inercial,
$\bar{C}m_i$ ,	componente $i$ de momentos adimensionalizados,	$Vn_i$ ,	velocidad normal a la pala $i$ ,
$\bar{e}D_i$ ,	versor en la dirección de la resistencia de la pala $i$ ,	$\bar{V}_r$ ,	Velocidad relativa de la pala $i$ ,
$E_i$ ,	Matrices de coeficientes para la función diferencial de la variable $x_2$ en el $i$ ésimo lugar,	$Vt$ ,	velocidad del pararrotor con respecto a los ejes inerciales,
$\bar{e}L_i$ ,	versor en la dirección de la sustentación de la pala $i$ ,	$\bar{V}_{tc}$ ,	velocidad del pararrotor con respecto a los ejes inerciales en coordenadas propias del cuerpo,
$\bar{e}Lc_i$ ,	vector en la dirección a la sustentación, no normalizado, de la pala $i$ ,	$\omega_i$ ,	velocidad angular en dirección del eje $i$ en coordenadas ejes cuerpo,
$\bar{e}D_i$ ,	versor en la dirección de la resistencia de la pala $i$ ,	$\omega_0$ ,	velocidad angular de referencia,
$\bar{F}L_i$ ,	fuerza de sustentación sobre la pala $i$ ,	$x_i$ ,	variable $i$ del sistema de ecuaciones de movimiento adimensionalizadas, $w_i/w_0$ ,
$F_{lij}$ ,	componente $j$ de la sustentación de la pala $i$ ,	$\alpha_i$ ,	ángulo de ataque de la pala $i$ ,
$\bar{F}D_i$ ,	resistencia generada por la pala $i$ ,	$\beta_i$ ,	ángulo de paso de las pala $i$ ,
$F_{dij}$ ,	componente $j$ de la resistencia de la pala $i$ ,	$\delta_\beta$ ,	diferencia de paso entre las palas,
		$\theta$ ,	ángulo de nutación,
		$\rho$ ,	densidad del aire,
		$\varphi$ ,	ángulo de rotación propia del cuerpo,
		$\psi$ ,	ángulo de precesión del cuerpo,
		$\phi$ ,	ángulo de incidencia del flujo,
		$\Theta$ ,	$U/(\omega_3 * r_{11})$

## 1. INTRODUCCIÓN

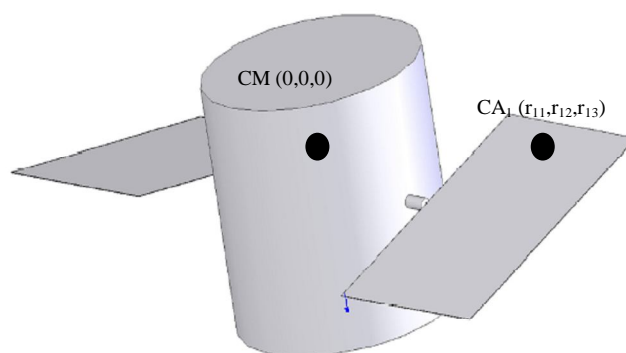
El pararrotor es un dispositivo desacelerador basado en la autorrotación de alas rotantes. La autorrotación es la rotación continua de un cuerpo inmerso en un flujo axial sin otras fuentes externas de energía más que la propia acción de la corriente de fluido y de la gravedad. Cuando el cuerpo se desplaza en un fluido, las palas rotan y, como consecuencia de este movimiento, se generan fuerzas aerodinámicas que actúan en oposición a su movimiento de translación principal. Su desempeño y utilización práctica está supeditada al conocimiento de su dinámica del vuelo en función de los parámetros aerodinámicos y geométricos del dispositivo.

El problema que se aborda en el presente trabajo complementa los estudios realizados en [1, 2] sobre la estabilidad del comportamiento dinámico del pararrotor. En estos estudios se caracterizó la estabilidad del pararrotor de acuerdo a una serie de simplificaciones que permitieron acceder a expresiones útiles para el diseño general de estos dispositivos. En el presente trabajo se analiza el efecto del desplazamiento del centro de masas con respecto al plano de las palas, en la estabilidad del sistema.

La metodología adoptada ha sido plantear las ecuaciones de la dinámica del pararrotor en forma completa, para luego simplificarlas según los términos de orden superior. Posteriormente se ha estudiado la estabilidad dinámica del sistema considerando el efecto que resulta del desplazamiento del centro de masas al respecto del plano que contiene a las palas.

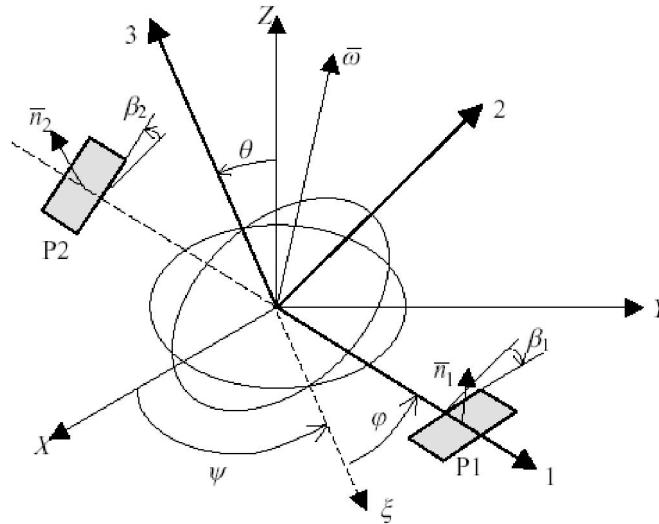
## 2. MODELO MATEMÁTICO

El sistema a estudiar corresponde a un dispositivo de vuelo rotatorio en régimen de autorrotación compuesto por un cuerpo cilíndrico con alas de pequeño alargamiento compuestas por placas planas, como se indica en la Figura 1.



**Figura 1.** Esquema del pararrotor estudiado. Posición del centro de masas (CM) y posición del centro de presiones de la pala 1 (CA1) en el sistema ejes cuerpo

Considérese un cuerpo que cae a velocidad uniforme,  $U$ , según la vertical y girando con velocidad  $\bar{\omega}$ . El sistema ejes cuerpo, solidario al pararrotor, se designa por 1,2,3, con direcciones  $e_1, e_2, e_3$  y origen situado en el centro de masas. El sistema de referencia inercial es  $X, Y, Z$ , cuyos ejes poseen las direcciones  $i, j, k$ . El eje de simetría 3 es eje principal de inercia. La geometría del pararrotor está definida en la Figura 2. Los ángulos de Euler definen la orientación de la terna ejes cuerpo respecto de la inercial.



**Figura .2** Definición de la geometría del pararrotor.  $\psi$ , precesión;  $\Theta$ , nutación;  $\Phi$ , rotación propia.  
( $X, Y, Z$ ): sistema de referencia inercial. (1,2,3): sistema de referencia fijo al cuerpo

El desarrollo matemático comprende:

- El planteo de las ecuaciones de la dinámica del pararrotor.
- El planteo de las expresiones de fuerzas y momentos aerodinámicos de forma completa, introduciendo el factor correspondiente al desplazamiento de centro de masas al respecto del plano formado por las palas.
- La comparación entre el nuevo sistema de ecuaciones y el obtenido en [2].
- El análisis de la estabilidad del nuevo sistema.

### 2.1. Ecuaciones de la dinámica del pararrotor

Las ecuaciones de la dinámica rotacional del pararrotor pueden expresarse como:

$$\frac{M_1}{I_1} = \frac{d(\omega_1)}{dt} - \left( \frac{I_2 - I_3}{I_1} \right) \cdot \omega_3 \cdot \omega_2 \tag{1}$$

$$\frac{M_2}{I_2} = \frac{d(\omega_2)}{dt} + \left( \frac{I_1 - I_3}{I_2} \right) \cdot \omega_3 \cdot \omega_1 \tag{2}$$

$$\frac{M_3}{I_3} = \frac{d(\omega_3)}{dt} - \left( \frac{I_1 - I_2}{I_3} \right) \cdot \omega_2 \cdot \omega_1 \tag{3}$$

## 2.2. Ecuaciones de fuerzas y momentos

Se consideran una serie de simplificaciones, las cuales restringirán el problema a un determinado campo de aplicación dado: los movimientos de los ejes cuerpo cercanos a la

situación estable, donde el eje 3 del cuerpo se encuentra próximo a la vertical inercial (eje Z).

La velocidad de caída en coordenadas ejes cuerpo será el producto de la matriz de rotación asociada a la transformación de Euler adoptada y la velocidad relativa de los ejes cuerpo al respecto de los inerciales.

### 2.2.1 Velocidades relativas

La velocidad del fluido relativa a la pala 1 será:

$$\overline{Vr}_1 = - \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{bmatrix} + \overline{Vtc} = \begin{bmatrix} r_{12} \cdot \omega_3 - r_{13} \cdot \omega_2 + \theta \cdot \sin(\phi) \cdot U \\ r_{13} \cdot \omega_1 - r_{11} \cdot \omega_3 + \theta \cdot \cos(\phi) \cdot U \\ r_{11} \cdot \omega_2 - r_{12} \cdot \omega_1 + U \end{bmatrix} \quad (4)$$

Considerando que  $r_{21}$ ,  $r_{22}$  y  $r_{23}$  corresponden a la posición del centro aerodinámico de la pala 2 respecto al centro de masas, y que éstas son geoméricamente idénticas a las correspondientes a la pala 1, se tiene, para la pala 2:

$$\overline{Vr}_2 = - \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -r_{11} \\ -r_{12} \\ r_{13} \end{bmatrix} + \overline{Vtc} = \begin{bmatrix} -r_{12} \cdot \omega_3 - r_{13} \cdot \omega_2 + \theta \cdot \sin(\phi) \cdot U \\ r_{13} \cdot \omega_1 + r_{11} \cdot \omega_3 + \theta \cdot \cos(\phi) \cdot U \\ -r_{11} \cdot \omega_2 + r_{12} \cdot \omega_1 + U \end{bmatrix} \quad (5)$$

### 2.2.2 Velocidades normales

Considerando los vectores unitarios normales a cada plano de las palas, las componentes de las velocidades normales a las superficies de las palas responderán a las siguientes expresiones:

$$Vn_1 = n_1 \cdot Vr_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(\beta_1) \\ \cos(\beta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{12} \cdot \omega_3 - r_{13} \cdot \omega_2 + \theta \cdot \sin(\phi) \cdot U \\ r_{13} \cdot \omega_1 - r_{11} \cdot \omega_3 + \theta \cdot \cos(\phi) \cdot U \\ r_{11} \cdot \omega_2 - r_{12} \cdot \omega_1 + U \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$Vn_2 = n_2 \cdot Vr_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\beta_2) \\ \cos(\beta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r_{12} \cdot \omega_3 - r_{13} \cdot \omega_2 + \theta \cdot \sin(\phi) \cdot U \\ r_{13} \cdot \omega_1 + r_{11} \cdot \omega_3 + \theta \cdot \cos(\phi) \cdot U \\ -r_{11} \cdot \omega_2 + r_{12} \cdot \omega_1 + U \end{bmatrix} \quad (7)$$

Considerando pequeños ángulos de paso de las palas, se tiene:

$$Vn_1 = r_{11} \cdot \omega_3 \cdot \left[ \frac{\beta_1 \cdot r_{13} \cdot \omega_1}{r_{11} \cdot \omega_3} - \beta_1 + \frac{\beta_1 \cdot U \cdot \theta \cdot \cos(\phi)}{r_{11} \cdot \omega_3} + \frac{\omega_2}{\omega_3} - \frac{r_{12} \cdot \omega_1}{r_{11} \cdot \omega_3} + \frac{U}{r_{11} \cdot \omega_3} \right] \quad (8)$$

$$Vn_2 = r_{11} \cdot \omega_3 \cdot \left[ -\frac{\beta_2 \cdot r_{13} \cdot \omega_1}{r_{11} \cdot \omega_3} - \beta_2 - \frac{\beta_2 \cdot U \cdot \theta \cdot \cos(\phi)}{r_{11} \cdot \omega_3} - \frac{\omega_2}{\omega_3} + \frac{r_{12} \cdot \omega_1}{r_{11} \cdot \omega_3} + \frac{U}{r_{11} \cdot \omega_3} \right] \quad (9)$$

**2.2.3 Versores**

Se consideran una serie de vectores normalizados en las direcciones de la sustentación y de la resistencia, para a posteriori asignarles las magnitudes de sendas fuerzas aerodinámicas. El vector sustentación será normal al plano formado por la velocidad relativa y el eje de la envergadura de la pala que se esté considerando. Vale decir que estos versores serán:

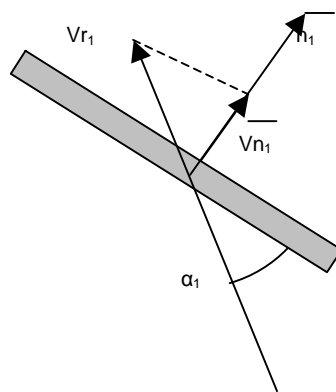
$$\overline{eL_1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \overline{Vr_1}}{\left| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \overline{Vr_1} \right|} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ r_{11} \cdot \omega_3 \cdot \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} - \frac{r_{12}}{r_{11}} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_3} + \frac{U}{r_{11} \cdot \omega_3} \right) \\ r_{11} \cdot \omega_3 \cdot \left( 1 - \frac{r_{13}}{r_{11}} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_3} - \frac{U \cdot \theta \cdot \cos(\phi)}{r_{11} \cdot \omega_3} \right) \end{bmatrix}}{\frac{\left| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \overline{Vr_1} \right|}} = \frac{\overline{eLc_1}}{\left| \overline{Vr_1} \right|} \tag{10}$$

$$\overline{eL_2} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \overline{Vr_2}}{\left| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \overline{Vr_2} \right|} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ r_{11} \cdot \omega_3 \cdot \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} - \frac{r_{12}}{r_{11}} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_3} - \frac{U}{r_{11} \cdot \omega_3} \right) \\ r_{11} \cdot \omega_3 \cdot \left( 1 + \frac{r_{13}}{r_{11}} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_3} + \frac{U \cdot \theta \cdot \cos(\phi)}{r_{11} \cdot \omega_3} \right) \end{bmatrix}}{\frac{\left| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \overline{Vr_2} \right|}} = \frac{\overline{eLc_2}}{\left| \overline{Vr_2} \right|} \tag{11}$$

Los versores resistencia tendrán la dirección de la velocidad relativa a cada pala:

$$\overline{eD_i} = \frac{\overline{Vr_i}}{\left| \overline{Vr_i} \right|} \tag{12}$$

**2.2.4 Ángulos de ataque**



**Figura 3.** Determinación del ángulo de ataque para la pala 1

Los ángulos de ataque para las palas i=1,2 serán:

$$\sin(\alpha_i) = \frac{n_i \cdot \overline{Vr_i}}{\left| \overline{Vr_i} \right|} \tag{13}$$

Si los ángulos de ataque son pequeños, puede aproximarse  $\sin(\alpha_i)$  por  $\alpha_i$ .

### 2.2.5 Fuerzas aerodinámicas

Las fuerzas de sustentación y resistencia se obtienen reemplazando a partir de:

$$\overline{FL}_i = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot CL \cdot \alpha_i \cdot |\overline{Vr}_i|^2 \cdot \overline{eL}_i = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot CL \cdot |Vn_i| \cdot \overline{eLc}_i \quad (14)$$

$$\overline{FD}_i = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot CD \cdot |\overline{Vr}_i|^2 \cdot \overline{eD}_i \quad (15)$$

### 2.2.6 Momento respecto al centro de masas

El momento generado por las fuerzas aerodinámicas de ambas palas expresados, en función de las componentes de cada vector, está dado por:

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} fl_{11} \\ fl_{12} \\ fl_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} fd_{11} \\ fd_{12} \\ fd_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -r_{11} \\ -r_{12} \\ r_{13} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} fl_{21} \\ fl_{22} \\ fl_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -r_{11} \\ -r_{12} \\ r_{13} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} fd_{21} \\ fd_{22} \\ fd_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\overline{M} = r_{11} \cdot \begin{bmatrix} -\left( fl_{12} \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} - fl_{13} \cdot \frac{r_{12}}{r_{11}} + fd_{12} \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} - fd_{13} \cdot \frac{r_{12}}{r_{11}} \right) + \left( -fl_{22} \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} - fl_{23} \cdot \frac{r_{12}}{r_{11}} - fd_{22} \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} - fd_{23} \cdot \frac{r_{12}}{r_{11}} \right) \\ -\left( fl_{13} + fd_{13} - fd_{11} \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} \right) + \left( fl_{23} + fl_{23} + fd_{21} \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} \right) \\ -\left( -fl_{12} + fd_{11} \cdot \frac{r_{12}}{r_{11}} - fd_{12} \right) - \left( fl_{22} - fd_{21} \cdot \frac{r_{12}}{r_{11}} - fd_{22} \right) \end{bmatrix} \quad (17)$$

### 2.3. Simplificación de las expresiones de momentos

Se evalúan los órdenes de magnitud de las ecuaciones de momentos. Se toma a la unidad como orden 0. Entonces se tiene:

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\theta$ es de orden 1                             | 5. CD es de orden 1  |
| 2. $\beta_1$ y $\beta_2$ son de orden 1               | 6. los parámetros geométricos y aerodinámicos de ambas palas son idénticos, salvo su ángulo de paso. |
| 3. $\Theta = U/(\omega_3 \cdot r_{11})$ es de orden 1 |  |
| 4. $r_{12}/r_{11}$ es de orden 1                      |  |

Se desarrollan las expresiones de los momentos y se retienen términos hasta de orden 2 a partir de la Ecuación (17). Se define al coeficiente de momentos,  $Cm_i$ , como:

$$\frac{M_i}{I_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot \omega_3^2 \cdot r_{11}^3}{I_i} \cdot Cm_i = K \cdot Cm_i \quad (18)$$

que para los ejes  $j=1,2,3$ , responde a:

$$Cm_1 = CL \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} \cdot \left[ (\beta_1 + \beta_2) \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} + (\beta_1 - \beta_2) \cdot \Theta - 4 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \Theta \right] + CL \cdot \frac{r_{12}}{r_{11}} \cdot \left[ -\beta_1 + \beta_2 + 2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \right] + CD \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} \cdot \left[ 2 - 4 \cdot \frac{\omega_1}{\omega_3} \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} \right]$$

$$Cm_2 = -CL \cdot \left[ -\beta_1 + 2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} - 2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_3} \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} + \beta_2 - 2 \cdot \beta_2 \cdot \frac{\omega_1}{\omega_3} \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} \right] - 2 \cdot CD \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} + 2 \cdot CD \cdot \frac{r_{12}}{r_{11}} \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} \quad (20)$$

$$Cm_3 = CL \cdot \left[ (\beta_1 - \beta_2) \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} - (\beta_1 + \beta_2) \cdot \Theta + 2 \cdot \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \Theta + 2 \cdot \Theta^2 \right] + 2 \cdot CD \cdot \left[ \frac{\omega_1}{\omega_3} \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} \right] \quad (21)$$

Considerando que el parámetro  $r_{13}/r_{11}$  es de orden 1, se tiene:

$$Cm_1 = CL \cdot \frac{r_{12}}{r_{11}} \cdot \left[ -\beta_1 + \beta_2 + 2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \right] + 2 \cdot CD \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} \quad (22)$$

$$Cm_2 = -CL \cdot \left[ -\beta_1 + 2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} - 2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_3} \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} + \beta_2 - 2 \cdot \beta_2 \cdot \frac{\omega_1}{\omega_3} \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} \right] - 2 \cdot CD \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} + 2 \cdot CD \cdot \frac{r_{12}}{r_{11}} \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} \quad (23)$$

$$Cm_3 = CL \cdot \left[ (\beta_1 - \beta_2) \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} - (\beta_1 + \beta_2) \cdot \Theta + 2 \cdot \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^2 + 2 \cdot \Theta^2 \right] \quad (24)$$

Si  $r_{13}=0$  (el eje que contiene a los centros aerodinámicos pasa por el centro de masas), y considerando sólo el orden mayor de cada una de las ecuaciones, se tienen las ecuaciones halladas en [2]:

$$Cm_1 = CL \cdot \frac{r_{12}}{r_{11}} \cdot \left[ -\beta_1 + \beta_2 + 2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \right] \quad (25)$$

$$Cm_2 = -CL \cdot \left[ -\beta_1 + 2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} + \beta_2 \right] \quad (26)$$

$$Cm_3 = CL \cdot \left[ (\beta_1 - \beta_2) \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} - (\beta_1 + \beta_2) \cdot \Theta + 2 \cdot \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^2 + 2 \cdot \Theta^2 \right] \quad (27)$$

#### 2.4. Análisis de la estabilidad del pararrotor

Se parte de las ecuaciones de la dinámica del pararrotor (Ecuaciones (1) a (3)). Se considera, de acuerdo con lo desarrollado en [2], que  $\omega_3$  es constante en el entorno de una solución de equilibrio ( $\omega_3 = \omega_0$ ), en consecuencia, las Ecuaciones (1) y (2) quedan desacopladas de la Ecuación (3). Se toman como variables a  $x_1 = \omega_1/\omega_0$  y a  $x_2 = \omega_2/\omega_0$ . Por otro lado, se considera:

$$T = \omega_0 \cdot t \longrightarrow \frac{dx}{dt} = \omega_0 \cdot \frac{dx}{dT}$$

El sistema, entonces, queda:

$$\frac{M_1}{I_1 \cdot \omega_0^2} = \frac{dx_1}{dT} - \left( \frac{I_2 - I_3}{I_1} \right) \cdot x_2 \quad (28)$$

$$\frac{M_2}{I_2 \cdot \omega_0^2} = \frac{dx_2}{dT} + \left( \frac{I_1 - I_3}{I_2} \right) \cdot x_1 \quad (29)$$

Reemplazando en las ecuaciones anteriores los coeficientes de momentos (Ecuaciones (19) y (20)), se observa que el sistema simplificado, que reúne las simplificaciones asumidas para la

expresión de los momentos y el desacoplamiento de las rotaciones sobre el eje 3, presenta una no linealidad asociada al parámetro  $r_{13}/r_{11}$ . Esto puede observarse al expresarse el sistema en la forma:

$$\frac{dx_1}{dt} = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (30)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = E_1x_1x_2 + E_2x_1 + E_3 \cdot x_2 + B_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (31)$$

donde  $A_{ij}$  y  $E_i$ , son expresiones de valor constante que acompaña las variables del sistema de ecuaciones, y  $B_i$  son los términos constantes para cada ecuación diferencial.

Para analizar la estabilidad del sistema de ecuaciones en las cercanías de un punto de equilibrio se linealizan [4] las Ecuaciones (30) (31), según:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_{1eq}, x_{2eq}) + \frac{\partial f_i(x_{1eq}, x_{2eq})}{\partial x_1} (x_1 - x_{1eq}) + \frac{\partial f_i(x_{1eq}, x_{2eq})}{\partial x_2} (x_2 - x_{2eq}) \quad (32)$$

donde  $i=1,2$

Para analizar la estabilidad del sistema en un entorno del punto de equilibrio se evalúan los autovalores de la matriz A, conformada por:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (33)$$

para un sistema con dos grados de libertad, donde  $A_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ .  $A_{21}$ ,  $A_{22}$  son las constantes que multiplican a  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente en la ecuación (31) linealizada (32).

El sistema lineal será marginalmente estable sí y sólo sí la parte real de los los autovalores de A son menores que cero, o iguales a cero si es un autovalor de multiplicidad 1. El sistema lineal será asintóticamente estable sí y sólo sí los autovalores de A son menores que cero (la parte real) [6]. Si  $r_{13}/r_{11}$  es de orden 0, la matriz A está dada por:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot r_{11}^3}{l_1} \cdot \left( -4 \cdot CD \cdot \left( \frac{r_{13}}{r_{11}} \right)^2 \right) & \left( \frac{l_2 - l_3}{l_1} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot r_{11}^3}{l_1} \cdot \left( CL \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} \cdot ((\beta_1 + \beta_2) - 4 \cdot \Theta) + 2 \cdot CL \cdot \frac{r_{12}}{r_{11}} \right) \\ - \left( \frac{l_1 - l_3}{l_2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot r_{11}^3}{l_2} \cdot \left( x_{2eq} \cdot \left( 2 \cdot CL \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} \right) + 2 \cdot CL \cdot \beta_2 \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} \right) & \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot r_{11}^3}{l_2} \cdot \left( x_{1eq} \cdot \left( 2 \cdot CL \cdot \frac{r_{13}}{r_{11}} \right) + 2 \cdot (-CL - CD) \right) \end{bmatrix} \quad (34)$$

Mientras que si  $r_{13}/r_{11}$  es de orden 1 es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \left( \frac{l_2 - l_3}{l_1} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot r_{11}^3}{l_1} \cdot \left( 2 \cdot CL \cdot \frac{r_{12}}{r_{11}} \right) \\ - \left( \frac{l_1 - l_3}{l_2} \right) & \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot r_{11}^3}{l_2} \cdot \left( 2 \cdot (-CL - CD) \right) \end{bmatrix} \quad (35)$$

En esta última se ve que no aparece el término  $r_{13}/r_{11}$ , y la matriz A es la obtenida para el caso en que la posición de los centros aerodinámicos está en la misma cota que el centro de masas del pararrotor, congruente con lo desarrollado en trabajos anteriores [1][2][3].

### 3. Conclusiones

Para pequeños desplazamientos del centro de masas del eje que contiene a las palas, la estabilidad del pararrotor (del modelo del sistema linealizado) no se ve afectada por este parámetro, respecto del caso en que este eje pase por el centro de masas, bajo las hipótesis del modelo y las simplificaciones realizadas según los órdenes de magnitud de cada término. Sin embargo, esta distancia sí influye en la estabilidad del equilibrio del dispositivo, si es del orden de la distancia desde el centro de presiones de las palas al eje de revolución del pararrotor. La forma en que influye este término en la estabilidad no ha sido desarrollada en el presente.

El parámetro  $r_{13}/r_{11}$  podría utilizarse como parámetro de control del sistema, al igual que la diferencia entre los ángulos de paso de las palas, según se analizó en [2].

### 4. Referencias

- [1] Nadal Mora, V. *Comportamiento aerodinámico de sondas atmosféricas en entornos aeroportuarios*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, España, 2005.
- [2] Nadal Mora, V., Sanz Andrés, Ángel. *Stability Analysis of a Free Falling Pararotor*, Journal of Aircraft, Vol. 43, No. 4, pp. 980-986, 2006.
- [3] Nadal Mora, V., Sanz Andrés, A. and Cuerva, A. *Model of the aerodynamic behavior of a pararotor*, Journal of Aircraft, Vol. 43, No. 6, pp. 1893-1903, 2006.
- [4] Chi-Tsong Chen, *Linear System Theory and Design*, 3rd Edition, Oxford University Press, 1999.