

Incremento de la vida en fatiga de una rueda de bicicleta mediante la modificación de la geometría de rayado.

Lisandro A. Rodríguez¹

**¹ Departamento de Ingeniería – Universidad Nacional del Sur
Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Argentina. e-mail: fwankel@yahoo.com.ar*

RESUMEN

Tras un estudio de la posición y la forma de fractura de los rayos cortados en ruedas traseras de bicicleta, se hizo evidente que dichas fallas encontraban su origen en la interacción de tres puntos diferentes. Estos involucraban, distribución inadecuada de tensiones en el material, fatiga en corrosión, y fundamentalmente, un diseño erróneo en la geometría tradicional del rayado. Se realizó un estudio matemático de la estructura bajo cargas de torsión, que se implementó a través de un algoritmo codificado en MATLAB, mediante el cual se estudio la distribución de tensiones en las diferentes geometrías, actuales y propuestas. Dicho software confirmó totalmente la redistribución de tensiones intuitiva para el caso de torsión. No se estudió en profundidad ninguno de los tres modos fundamentales de deformación del anillo, por no influir en la redistribución óptima del rayado; solo se hace una observación cualitativa de los mismos y su efecto.

Se introdujeron modificaciones en el rayado y en el material; que fueron sometidas a extensas pruebas de campo; verificando aparentemente, la certeza de al menos dos de las hipótesis aquí desarrolladas.

Se realizó una búsqueda entre los modelos comerciales en plaza y se encontró que dos compañías atacaron el problema en modelos de muy alta gama; con soluciones eficaces, pero costosas y no del todo eficientes. En otros casos se halló que la solución propuesta es totalmente equívoca.

¹ Técnico aeronáutico. Estudiante de ingeniería mecánica.

1. INTRODUCCION

Definición: llamaremos "rayado" a la forma de distribuir los rayos en el collar de orificios de la masa. Cuando hablamos de la simetría del mismo nos referimos por tanto a ésta distribución y no a la simetría general de la estructura.

La sabiduría popular, explica que los rayos derechos de la rueda trasera de bicicleta son los primeros en cortarse¹; sino los únicos; "...*estos los rayos están más tensos, porque la cara derecha está más planchada*". Este razonamiento es correcto en tanto el rayado sea igual y simétrico en ambas caras; pero no indica cualitativamente que ocurre, ni cuantitativamente "cuanto ocurre". Además ya no es válido si se modifica el diseño geométrico del rayado.

Las variables que definen la vida en fatiga de los rayos, son numerosas y de compleja interacción. Las subdividimos en; la geometría general, que define la distribución de cargas entre rayos; la local, que define los esfuerzos en el material y la mecánica de fractura; las propiedades mecánicas propias del material, que afectan a los puntos anteriores [8].

Partiendo de un análisis intuitivo se concluyó que el rayado tradicional era inadecuado para ruedas traseras. Así mismo se propusieron modelos diferentes de rayado, para equalizar las tensiones máximas entre los rayos de caras diferentes y/o para aumentar el torque transmitido a igual tensión máxima. En el 2001 se hizo una evaluación cualitativa del problema y se aislaron las variables y relaciones fundamentales. Posteriormente se operaron cambios en la geometría del rayado y en el material de un modelo particular (figura 7); mostrando las pruebas de campo, una extensión indefinida de la vida útil.

Posteriormente, se realizó un estudio matemático detallado para determinar la influencia cuantitativa de cada variable geométrica; con la intención de determinar la adecuada modificación de diseño. Finalmente los códigos utilizados para el cálculo de tensiones se adaptaron para diseñar ruedas óptimas de forma automática

Desgraciadamente, un accidente ocurrido en 2005 dio por finalizadas las pruebas de campo.

2. CONDICIONES DE CARGA

Existen tres condiciones fundamentales de carga:

- C1- Cargas de torsión; oscilantes, dependientes de la condición de operación y la preparación del ciclista.
- C2- Tensiones estáticas, internas; asimétricas, producto de la asimetría estructural (figura1).
- C3- Cargas, de peso e impacto, transversales al eje. Superponen una alternancia a las anteriores.

Las dos primeras, son las de mayor influencia en el desbalance de las tensiones entre los rayos de ambas caras; mas aun, son las únicas sobre las que se tiene control através de la configuración geométrica.

Las cargas tipo C1 se tornan muy importantes en trepadas, sprints, y por supuesto aumentan con doctrinas viciosas de pedaleo.

Descartar las tipo C3 simplifica y esclarece la mecánica de la estructura. Mediante cálculos realizados con un bloque suplementario en el algoritmo principal, programado en MATLAB se demostró que no influyen substancialmente en la optimización del rayado; pero sí en la estimación de su vida útil.

1 De hecho, es la mitad dextrógira derecha.

3. FACTORES GEOMETRICOS GENERALES

3.2. Geometría general (tipos de rayado)

Las configuraciones geométricas posibles para una masa de geometría clásica prefijada son:

- R1- Estructura actual, simétrica total. (Figura 1). (Rayos rojos y azules (negros y verdes) pertenecen a la misma cara).
- R2- Estructura asimétrica entre caras (propuesta), y simétrica radial en las mismas. (figuras 2 y 3)
- R3- Conjugada entre caras. (figura 4)

R2 representa a la modificación estudiada. R3 es un caso imposible. Aunque equilibrada estáticamente, implica el desplazamiento axial de la masa bajo cargas de torsión. La figura 5 representa los pares de rayos paralelos conjugados de una cara, y las posiciones que pueden ocupar para mantener la simetría en la distribución de pares. La posición P3 es limite; P4 implica una superposición con la P2. La figura 6 muestra lo que ocurre cuando se supera la línea de centros en la colocación de los rayos de una misma cara. Desde el punto de vista de las cargas sería bueno poder alcanzar esta configuración. Eventualmente, el análisis de ésta configuración demuestra que hay una inversión benéfica en la derivada segunda de las tensiones respecto a la torsión de la masa, en comparación con los otros casos. (Véase parte 3).

Lamentablemente hay interferencia espacial entre los rayos de la misma cara y misma orientación.

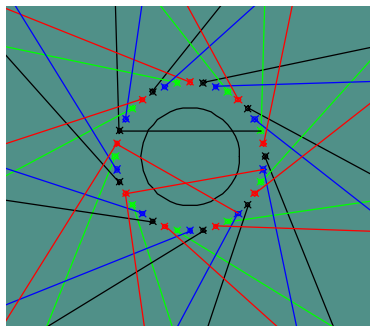


Figura 1. Distribución original.

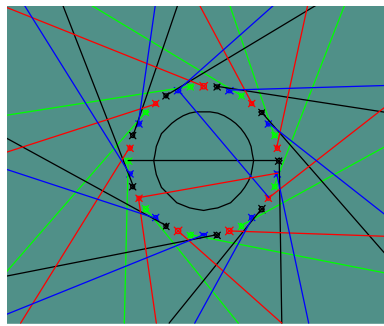


Figura 2. Extensión izquierda

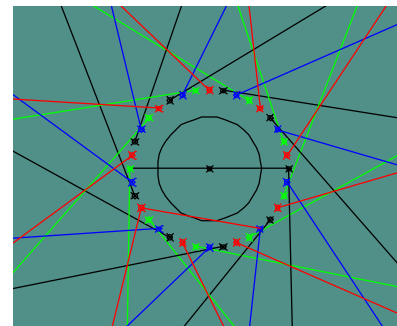


Figura 3. Extensión izquierda más reducción derecha.

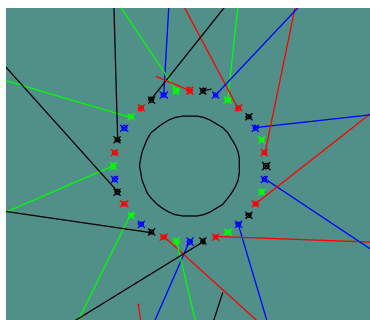


Figura 4. Conjugada entre caras.

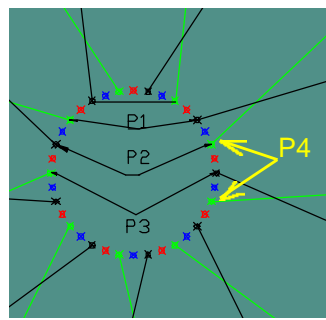


Figura 5. Posiciones permitidas.

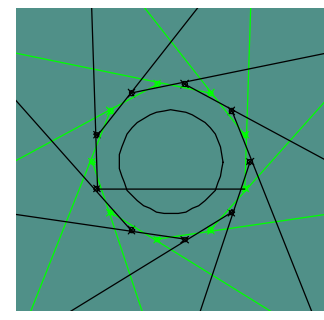


Figura 6. Interferencia espacial.

3.3 Análisis de distribución de tensiones.

Haremos algunas simplificaciones, para aislar los aspectos de nuestro interés: el comportamiento bajo cargas de torque.

Primeramente, supondremos que el anillo permanece indeformable ($C3 = 0$) y que no existen desplazamientos axiales (se cumple R1 o R2, y la sección de la llanta es simétrica).

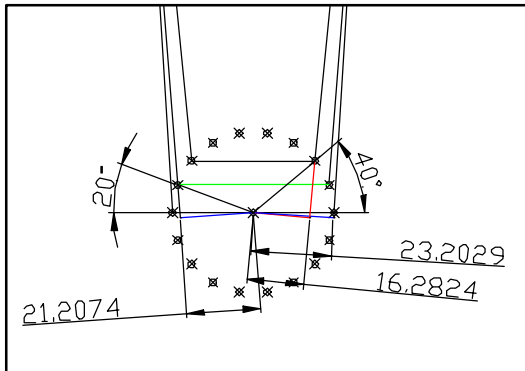


Figura 7. Dimensiones del modelo actual.

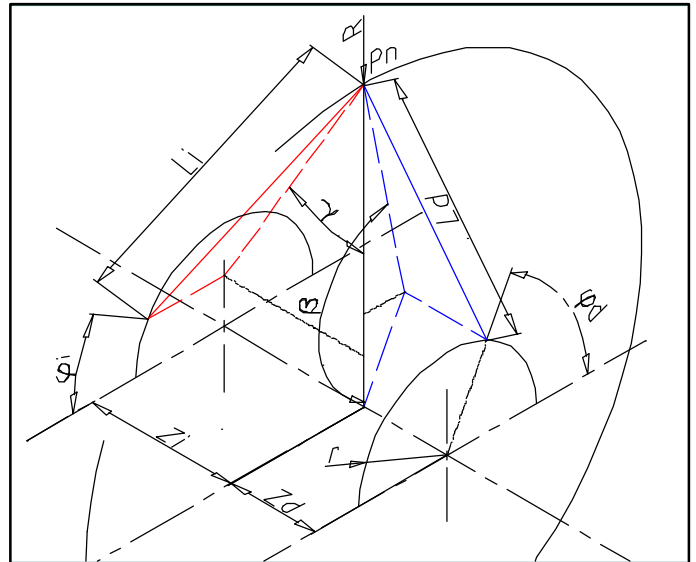


Figura 8. Esquema geométrico general.

No tendremos en cuenta cuestiones referentes a la inestabilidad elástica espacial del anillo. Una rueda rayada con la adecuada relación entre el modulo del anillo y el de los rayos es una estructura inherentemente estable, en tanto no se alcance el punto plástico, o las fuerzas externas induzcan al anillo a desplazarse lateralmente una longitud apreciable; tal que este se salga de los planos definidos que pasan por los collares de la masa.

3.3.1. Equilibrio en ausencia de torque

La condición de análisis más simple ocurre cuando, $\sum \vec{F}_{ext} = 0$

Entonces, podemos rotar y agrupar todos los rayos de una cara en un solo par P.C. entre caras. La figura 8 muestra el esquema geométrico utilizado en este análisis.

Veremos que:

$$\sum \vec{F}_{Zi} + \sum \vec{F}_{Zd} = 0 \quad (1);$$

$$\left\langle \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{Z}}{|\mathbf{Z}|} \right\rangle = \left\langle \frac{\mathbf{L}}{|\mathbf{L}|} \cdot \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{Z}}{|\mathbf{Z}|} \right\rangle = \langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{Z} \rangle \cdot \frac{|\mathbf{F}|}{|\mathbf{L}| \cdot |\mathbf{Z}|} \xrightarrow{\mathbf{Lz}=\mathbf{Z}} \frac{|\mathbf{F}_d|}{|\mathbf{F}_i|} = \frac{|\mathbf{L}_d| \cdot |\mathbf{Z}_i|}{|\mathbf{L}_i| \cdot |\mathbf{Z}_d|} ;$$

Con $\vec{\mathbf{L}}(\varphi, r, Z) = \left(\vec{\mathbf{P}}_n, \vec{\mathbf{P}}_r \right) = \begin{bmatrix} -r_k \cdot \cos(\mathbf{j}_k) \\ R - r_k \cdot \text{sen}(\mathbf{j}_k) \\ -Z_k \end{bmatrix} ; \quad (1) \rightarrow$

$$\frac{\sum |\mathbf{F}_d|}{\sum |\mathbf{F}_i|} = \frac{\sqrt{r_d^2 - 2 \cdot R \cdot r_d \cdot \sin(\mathbf{j}_d) + R^2 + Z_d^2}}{\sqrt{r_i^2 - 2 \cdot R \cdot r_i \cdot \sin(\mathbf{j}_i) + R^2 + Z_i^2}} \cdot \mathbf{h} \quad (2)$$

Esta ecuación esta graficada en la figura 9, para una rueda rodado 26M.T.B y $r_d = r_i$. Se observa el enorme desbalance que existe, aún en las tensiones naturales internas, y el efecto de modificar Φ_d . Los dimensiones utilizadas son las propias del modelo experimental. Figura 7.

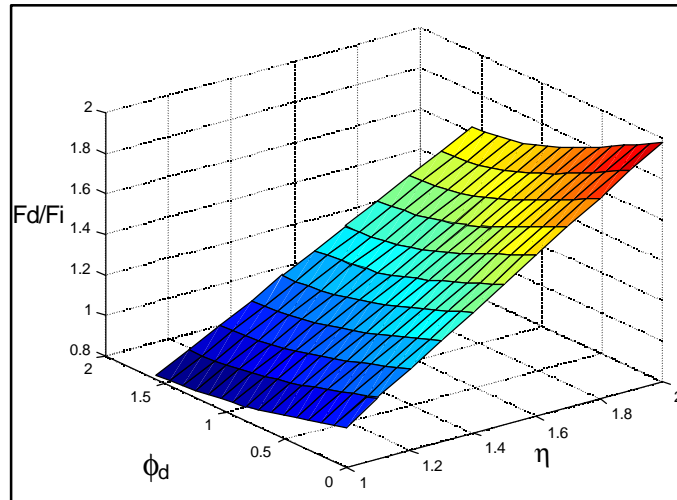


Figura 9. Cociente de tensiones en función de las variables de la geometría. Para cargas de torque y pretensiones

3.3.2. Torsión

Primeramente; Si $\sum \vec{\mathbf{M}}_{ext} \neq 0 \rightarrow \frac{\|\mathbf{F}_{Lm}\|}{\|\mathbf{F}_{Dm}\|} \neq 1$

Pero la torsión no induce desplazamientos ni axiales ni radiales para las configuraciones simétricas en la cara. De hecho, la experiencia muestra incluso, que no se presenta inestabilidad hasta alcanzar la fluencia plástica en los rayos y el anillo.

La formula (1) sigue siendo valida en caso de torsión; donde $d\phi \rightarrow 0$ y P_n es fijo. Pero la distribución de torques no. Veamos que:

$$|\mathbf{F}_r| = \frac{E \cdot S}{\|\mathbf{L}_o(\mathbf{j}_o)\|} \cdot \Delta \|\mathbf{L}(\mathbf{j})\| + |\mathbf{F}_{r0}(\mathbf{j}_o)| \rightarrow \partial \left(\frac{\|\mathbf{F}_{Di}\|}{\|\mathbf{F}_{Dd}\|} \right) \neq 0 \text{ en el caso más usual; ya que}$$

$L_{0i} \neq L_{0d}$ y $\Phi_{i0} \neq \Phi_{d0}$.

Finalmente; lo correcto, en lugar de intentar mantener $\frac{\|\mathbf{F}_{Di}\|}{\|\mathbf{F}_{Dd}\|}$ acotado de forma arbitraria es hacer

$$\int_{\Delta\phi} \frac{\|\mathbf{F}_{ri}\|}{\|\mathbf{F}_{rd}\|} d\phi \Rightarrow 1 \quad (3)$$

en el intervalo de servicio. La solución a este problema se encuentra en:

$$\partial \left(\frac{E \cdot S}{L_{0i}} \cdot \frac{\partial L_{ri}}{\partial \mathbf{j}} \right) \leq \partial \left(\frac{E \cdot S}{L_{0d}} \cdot \frac{\partial L_{rd}}{\partial \mathbf{j}} \right) \quad (4)$$

Pero solo podremos explotar esta ecuación si consideramos la posibilidad de φ_0 y $\Gamma_d \neq \Gamma_i$

3.3.3. Torsión máxima.

El máximo torque por unidad de tensión en **L**, ocurre cuando:

$$\frac{d \left(\mathbf{F}_{xy} \cdot |\mathbf{r}| \cdot \sin \mathbf{b} \right)}{d\mathbf{b}} = 0 \rightarrow \beta = \pi/2 \rightarrow \varphi = \arccos(r/R).$$

Esta será la condición preferencial para los rayos izquierdos. Es donde usualmente se minimiza simultáneamente (1), (3) y $\sum (\mathbf{F}_L)^2 + (\mathbf{F}_D)^2$.

Aquí aparece algo sumamente interesante. Mientras las derivadas primeras de **L** en función de φ pueden igularse en el estado inicial, las derivadas segundas no (para la masa en cuestión). Por lo que varían las primeras y aparece una traslación en Z. Esto, sin embargo se da con deformaciones importantes, lejos del rango elástico.

Otro aspecto importante que aparece del análisis, es que la condición de torque máximo absoluto no se da reduciendo arbitrariamente la carga sobre los rayos derechos (acción tomada por algunas firmas comerciales). Además, la ecualización de tensiones en los rayos no se da cuando el torque capaz de ser transmitido es máximo, ni; obviamente; cuando se descargan totalmente los derechos.

3.3.4. Análisis general

Considerar la deformación total del sistema implica anular una integral de energía potencial [1] en un numero grande de variables, con varias restricciones, o anular la sumatoria de fuerzas internas y externas en el sistema.

Para el análisis general, se contemplo:

- G1- Minimización de energía elástica (ecuación (5), en la que se descarta el trabajo de corte y el de tracción). Mediante un método de desplazamientos acotados. Aplicando gradientes conjugados y una implementación del método Δ^2 de Aitken [9]; o un nuevo método, de convergencia cuadrática [10]. Operando sobre un Spline o una serie trigonométrica.
- G2- La aplicación de los métodos clásicos de un paso[5,6]; con replanteo de la geometría. (Se supone valido el principio de superposición y el teorema de Castigliano).
- G3- La comparación (5) dada por las fuerzas, con su equivalente dado por el cambio de la geometría (interpolando "A" con un polinomio); y la minimización de la diferencia. Se halló una expresión sumamente simple para el caso donde $Q \ll M$ (no es éste caso) y el problema es lineal.

$$U = \oint_a \frac{M_a^2}{2 \cdot E \cdot I} + \frac{F^2}{2 \cdot S_a \cdot I} + \frac{k \cdot Q^2}{2 \cdot S_a \cdot G} ds + \sum_{m=1}^n \frac{D_r \cdot \Delta L_r}{2} \quad (5)$$

En cualquier caso, el problema radica en estimar y plantear eficientemente, la adecuada función interpolante para la curva del anillo ("A").

A diferencia de los métodos clásicos de energía o fuerzas, todos los nombrados contemplan fenómenos no lineales y la no-conformidad con el teorema de Castigliano. Por otro lado, los procedimientos clásicos de la literatura (fundamentalmente aeronáutica y naval) [1-6], plantean la solución (en forma automatizada) considerando, entre otros, la conservación de la forma y que $U_M \gg (U_Q, U_F)$; caso que es totalmente contrario al actual y razón por la que hubo que derivar nuevamente las ecuaciones.

Los esquemas habituales hallados en la literatura [1-6] asumen que las deformaciones son pequeñas y no influyen en la forma de acción de las fuerzas externas; algo que no es aplicable en este caso.

Entre los métodos para el análisis de anillos mas comúnmente hallados en obras de cálculo estructural están, el método de Mohr [6], del centro de momentos de H. Müller [3,4]; variante del anterior; y los métodos variacionales; planteados en su versión general por E. Lundquist [2]. Los primeros han de implementarse junto con algún método de relajación, para el caso de una rueda rayada; donde las fuerzas actuantes sobre el anillo están dadas por los rayos.

Los resultados de una implementación de G1 se muestran en la figura 10.

4. IMPLEMENTACION DE LOS CALCULOS.

Las ecuaciones aquí presentadas junto con todas las derivadas de 4 y las expresiones para las tensiones en el material se codificaron en MATLAB. Para el modelo disponible se encontró, según las configuraciones de la figura 7, que a igual tensión máxima, los torques máximos son:

Tabla 1

Variante de la geometría	Diferencia en el torque admisible
Standard → extendida	100.3%
Standard → reducida	77%
Reducida → reducida	70%

Finalmente se agregó un bloque suplementario de código, que aplica una variante de G1 en series trigonométricas con coordenadas polares y material elástico. "A" puede modelarse con solo

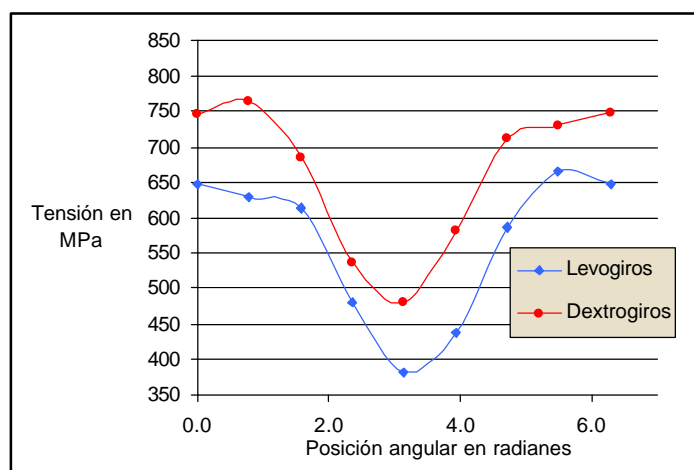


Figura 10. Tensiones en los rayos de una rueda con cargas transversales y de torsión.

dos términos; descartando el modo alto para el numero actual de rayos. La sucesión para Δ^2 , en este caso, se substituyó por el método de Newton con diferencias finitas centradas, con control de paso.

Cabe aclarar la sorprendente estabilidad que mostró el código, aun en la zona donde los rayos pasan a tensión cero. Los resultados extraídos de este código se muestran en la figura 10, para los rayos de una cara, en una rueda de geometría normal, deformada por cargas transversales y sometida a una fuerte carga de torsión. Nótese la simetría entre las curvas alrededor de π .

5. FACTORES GEOMETRICOS LOCALES.

5.1. configuración geométrica.

El tipo de rayo aquí estudiado es el de ganchillo y se representa en la figura 11; donde también se muestra en azul, la forma típica de las fracturas. Su diámetro es de 2mm.

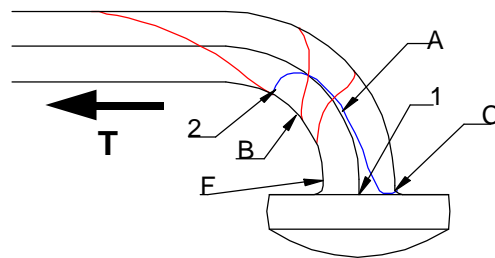


Figura 11. Geometría del extremo de anclaje.

5.2. Mecánica de fractura.

La mecánica de fractura de un rayo es realmente singular. En primer lugar, rara vez se observa una rotura por fatiga en el extremo del niple. Estas ocurren en el extremo que va en la masa. Las figuras 12-15 muestran la típica forma de rotura de los rayos. Observando la forma del extremo (figura 11), podríamos concluir en primer momento que las presiones aplicadas en F, para compensar



Figura 12.



Figura 13.



Figura 14.



Figura 15

T, producirán elevadas tensiones de tracción en B; tanto por tracción directa, como inducidas por flexión. Como el radio de curvatura es pequeño, las tensiones inducidas por flexión pueden ser notablemente elevadas [5-7], y podríamos esperar la iniciación de una grieta en esta zona. Sin embargo, la práctica muestra que esto no siempre ocurre. Estudiando la forma de fractura de las figuras 12-15 es claro que la grieta se inició en la superficie, en una zona próxima a A (véase el material "trabajado" en la figura 14). La razón de ello es que existen fuertes tensiones de contacto [6] en B, que desplazan el punto de máxima deformación en tracción fuera de dicha zona. Probablemente la grieta comience entre A y B de acuerdo con el modelo de Henke-Von Mises, propagándose hacia 1 y 2 simultáneamente; pero ahora, según el modelo de máximo corte. Cosa que

parecerían indicar las fotografías. Según estas, la grieta llegó y se propagó más rápido, hacia y en 1; donde es de esperarse una concentración de tensiones en el cuello C. La posterior fractura del rayo a lo largo del material interior remanente, hacia 2, ocurrió de forma instantánea; como lo muestra la superficie del material en la figura 13. La figura 15 muestra una pequeña área de trabajo cerca de B; pero es claro que desde aquí no se propagó la grieta que produjo la rotura final. Generada esta pequeña grieta, queda ahora una zona de material alejada de la superficie y donde puede mostrarse que las tensiones de contacto son máximas.

Hay que hacer notar que durante la fabricación, se inducen tensiones remanentes de tracción muy nocivas en B. La forma de trabajar del rayo puede atenuar notablemente su efecto; al menos en la zona de contacto. En rayos que en el comienzo de su vida operativa recibieron una fuerte sobrecarga, estas tensiones quedan fuertemente contrarrestadas; habiéndose encontrado algunos en los que la grieta esta cerca de A. Este comportamiento, por lo demás, es bastante aleatorio; dada la confección de rayos y masas.

6. MATERIAL

El material influye de manera notable en la vida de los rayos. El rayo de la figura 12 es de acero de baja aleación galvanizado. Aquí podemos anticipar una posible fragilización por hidrogeno durante el proceso, aunque no se trate de un acero de alta resistencia. El propio galvanizado, por otro lado, es un generador de grietas superficiales en aceros de mediana resistencia. Un efecto similar, pero más marcado se da en aluminios aeronáuticos clase Alclad. [6,8]. Este no es aquí un factor determinante en las fallas.

Se ha demostrado [8] que los aceros de alta resistencia, con imperfecciones superficiales, padecen de fragilización por difusión de hidrógeno, generado en ambientes húmedos, de forma catalítica en las "singularidades superficiales"; Aunque la pieza no se encuentre solicitada!. Mas aún si lo esta; como es en el caso actual. Se sabe además, que los aceros al carbono llevados a la condición de resistencia necesaria para un rayo poseen una pequeña energía de propagación de grietas [7,8]; aunque el rayo de la foto se comporte de forma bastante tolerante. Esto se condice con la forma de la rotura final; propia de un material bastante plástico.

Siguiendo las recomendaciones clásicas [5-8] respecto a material, se substituyeron 9 rayos originales de acero al carbono martensítico; correspondientes al grupo mas solicitado; por otros de acero inoxidable austenítico tipo 17-7PH, endurecidos por acritud y posterior precipitación. Dichos rayos fueron adicionalmente pretensados y deformados cerca del extremo. Estos que ya llevaban varios años de uso en la cara derecha de una rueda trasera, no han presentado fallas al día de la fecha.

6.2. Efectos del módulo.

El análisis matemático de la estructura muestra que no hay desplazamientos axiales en tanto en las caras la geometrias locales sean simétricas y todos los rayos tengan el mismo modulo elástico (real o aparente). También muestra que reducir el modulo aparente es equivalente a alterar su posición en la masa.

Los rayos de acero inoxidable austeníticos poseen un modulo de elasticidad ligeramente menor a los martensíticos, esto conlleva cierta reducción en la tensión máxima para igual par máximo transmitido por la masa. Como estos se dispusieron solo en la mitad de una cara habrá que tolerar cierto desplazamiento en Z.

Debe aclararse que una reducción importante en el modulo de los rayos puede comprometer la estabilidad elástica de la rueda.

7. CONCLUSIONES

El análisis matemático de la estructura de una rueda rayada confirmó las deducciones intuitivas sobre la distribución de cargas estáticas y por torque y justificó completamente los resultados experimentales obtenidos. Mostró, además, que es posible ecualizar las tensiones por torsión entre las caras de una rueda común; e incluso invertir el cociente de dichas tensiones.

El abordaje del caso general con cargas transversales, complica notablemente el problema, y no aporta nada nuevo a la distribución de cargas inducidas por torque; ocultando el auténtico y fundamental motivo de las roturas. No obstante, se constató, que un anillo muy rígido, afecta adversamente a los rayos; al no suavizar la diferencia de tensiones bajo una carga transversal. Mientras que un anillo demasiado flexible anticipa inestabilidad general de la estructura.

Aunque se investigó el desempeño de rayos de material diferente, es claro que mediante una adecuada modificación de la geometría del rayado; aún en una rueda con masa y llanta comunes; puede prescindirse de materiales costosos para alcanzar un respetable tiempo de vida.

Es difícil disponer de un ejemplo práctico por la cantidad de variables desconocidas involucradas, que impiden dar valores numéricos a las tensiones existentes. En la rueda estudiada, la variación de geometría condujo a la redistribución porcentual de cargas de la tabla 1. Como se ve, con variaciones porcentuales tan grandes en las tensiones, es plausible incrementar enormemente la vida en fatiga; según se deduce de observar la curva de Wooller. [7]. Queda demostrado entonces, que es totalmente factible extender la vida en fatiga de la rueda sin recurrir a modificaciones en el diseño de las partes, y sin incrementar el costo en materiales.

Comentario:

Finalmente. A pesar de lo familiar que nos resulta ver una rueda de bicicleta y lo simple que parece a simple vista, es ésta una estructura de comportamiento sumamente complejo. Las ruedas rayadas fueron objeto de estudios matemáticos detallados de estabilidad elástica, antes de la aparición de los métodos computacionales. Estos estudios; bastante difíciles de conseguir; no hacen referencia a los efectos del torque en las tensiones de los rayos; solo tratan el problema de estabilidad elástica del anillo en el espacio, con un rayado fundamentalmente radial. Ocasionalmente, los anillos rayados son tomados en consideración en estructuras aeroespaciales; pero en estos casos no se consideran torques ni desplazamientos axiales.

La complejidad del comportamiento estructural general ante una aproximación intuitiva, ha mantenido ocultos, aproximadamente 200 años, algunos aspectos sumamente simples, evidentes e importantes, de esta estructura; como los aquí tratados. El sobredimensionamiento, la mejora en los materiales y la tradición, fueron otros factores importantes.

Varias firmas comerciales, ofrecen en sus modelos de gama muy alta, ruedas "especiales", para solucionar los problemas originados por la excentricidad axial de la masa trasera.

Y varios de estos sofisticados modelos distan de ser óptimos. Incluso se halló una llanta de fibra de carbono con rayos de titanio netamente mal diseñada.

REFERENCIAS

- [1] Eugene Lundquist, Walter Burke.: *General equations for the stress analysis of rings*. NACA R-509. Langley Field: (Aug 1934).
- [2] Roy Miller, Karl Wood. *Formulas for the stress analysis of circular rings*. NACA-Tn 462. (Washington 1933).
- [3] Bruhn, E.F.: *Analysis and Design of Flight Vehicle Structures*. Tri-State Offset Company, Cincinnati, OH, 1966.
- [4] Bruhn, E.F.: *Analysis and Design of Missile Structures*. Tri-State Offset Company, Cincinnati, OH, 1967.
- [5] S. Timoshenko, D. Young.: *Elementos de resistencia de materiales*. (1961).
- [6] G. S. Pisarenko, A. Yákovlev.: *Manual de resistencia de materiales*. Editorial MIR (1979).
- [7] Climax Molybdenum Co.: *Three keys to satisfaction*. (NY. 1961).
- [8] USAF.: *Air force materials symposium*. Technical Papers. AFML-TR-65-29. Air Force Materials Laboratory, research & technology division. Wright-Patterson air force base, Ohio. (June 1965).
- [9] R. Burden. D. Faires.: *Numerical analysis*, 7th Ed. (2001).
- [10] Philip Nachtshiem.: *Method of conjugate radii for solving linear and nonlinear systems*. Ames Res. Cen. NASA. (Oct 1999).

APENDICE A
Lista de símbolos

"A" = curva en R^3 que define la forma del anillo bajo carga.

E = modulo de elasticidad en tracción del material.

F = fuerza (tracción)

$D_r = (E_r S)/L_0$

I = momento de inercia de la sección del anillo

k = una constante (elasticidad).

M = Momento

L = segmento que define al rayo (figura 8)

P = punto de un extremo del rayo.

PC = rayos paralelos conjugados. (figuras 5 y 6, rayos PC de la misma cara; figura 4 de caras opuestas)

Q = esfuerzo de corte

R = radio del anillo en el extremo del rayo (figura 8).

S = sección; del rayo, o anillo.

U = energía elástica de la estructura

Z = distancia axial (figura 8).

φ = ángulo en xy (figura 8).

β = ver (figura 8).

r = radio del punto de inserción del rayo en la masa.

γ = ángulo de "conicidad" (figura 8).

$\eta = Z_i/Z_d$.

subíndices

a = anillo.

d = derecha

D = dextrógiro.

ext = exteriores.

f = flexión

i = izquierda.

k = índice de elemento.

L = levógiro

r = rayo.

t = torsión

Z = en eje Z

0 = condición inicial.