

GEOMETRÍA INVERSA DE UN MANIPULADOR PARALELO 3RPS UTILIZADO PARA ORIENTAR OBJETOS EN EL ESPACIO

Rojos, E., Penisi, O., Bocca, J., Aguilar, H., Galdeano, H.

*Instituto de Mecánica Aplicada – Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional San Juan
Av. Libertador Gral. San Martín 1109 (O) (5400) San Juan, Argentina - e-mail:*

erojos@unsj.edu.ar, openisi@unsj.edu.ar

RESUMEN

Los manipuladores paralelos 3RPS son mecanismos que pueden soportar grandes esfuerzos, dado que los mismos se reparten en tres piernas, lo que los hace aptos para posicionar objetos pesados. También presentan la ventaja que se pueden controlar con relativa facilidad, esto hace que puedan ser utilizados para moverlos y posicionarlos con precisión. Algunos de estos objetos deben ser solamente orientados en determinadas direcciones, con independencia de su posición. Para poder utilizar este manipulador como mecanismo apto para orientar dichos objetos se debe conocer su geometría inversa.

Para resolver el problema de la geometría inversa se propone utilizar, además del álgebra de matrices en coordenadas homogéneas, el concepto de la normal a la plataforma móvil como elemento geométrico auxiliar que simplifica los cálculos y permite encontrar los valores que deben alcanzar las longitudes de las piernas del manipulador para que el cuerpo, solidario a la plataforma móvil, se oriente en una dirección predeterminada, independientemente de la posición.

Como resultado del trabajo, se encontrarán las ecuaciones que permitan relacionar las variables que orientan una recta cualquiera en el espacio en una (determinada) dirección predefinida, con las variables geométricas del manipulador para que la normal a su plataforma móvil coincida con la dirección deseada. Las ecuaciones encontradas se las validará experimentalmente a través de un ensayo de laboratorio. Los resultados obtenidos demostrarán la posibilidad de utilizar un manipulador paralelo 3RPS como mecanismo que permite orientar objetos en el espacio.

Palabras Claves: Manipulador Paralelo, Orientación, Geometría Inversa, Sistema de Medición.

1. INTRODUCCIÓN

Sistemas tales como, el corner reflector el cual es utilizado en aplicaciones espaciales y tienen específicamente la misión de reflejar la señal que reciben de un radar satelital de apertura sintética, éste describe órbitas alrededor de la tierra cambiando de posición permanentemente, otros como, los colectores concentradores de radiación solar que deben concentrar la energía del sol en superficies pequeñas, o los paneles solares que tienen la misión de convertir la energía radiante del sol en energía eléctrica, para que puedan cumplir con su objetivo, deben ser orientados en diferentes direcciones del espacio [1-2-3] de forma tal que estén direccionados a los objetos que se mueven en éste. Para señalar la posición de un cuerpo cualquiera que se mueva en una órbita (satélite ó sol) fuera de la superficie de la tierra se utiliza un sistema de coordenadas azimutales [8]. En trabajos anteriores [7-11] se ha demostrado, a través de la geometría directa, que el manipulador paralelo 3RPS puede orientar objetos en cualquier dirección del espacio que se encuentra por encima del plano del horizonte. En este trabajo se propone encontrar las ecuaciones matemáticas que relacionen las variables azimutales utilizadas para indicar la posición de un objeto en el espacio, con las variables articulares del manipulador. Teniendo en cuenta que los grados de libertad del mecanismo son tres, lo cual significa que se debe ingresar al mismo con tres movimientos independientes para su accionamiento, esto se hace a través de las tres juntas prismáticas de las piernas, por lo tanto las variables articulares del manipulador son las variaciones de longitud que sufren las piernas del mismo.

Para encontrar la solución se disponen de varios métodos los cuales son mencionados en [5] y darán origen a ecuaciones vectoriales de posición, las cuales son solucionadas a través de las coordenadas homogéneas y el álgebra de matrices. Ambos temas matemáticos son desarrollados con suficiente extensión en [6]. También se utiliza la relación matemática que resulta de la proyección de la normal a la plataforma móvil en dos planos diferentes.

A los efectos de validar la conversión de coordenadas y orientaciones alcanzadas, se determinará experimentalmente para una posición predeterminada del extremo de la normal a la plataforma móvil, los valores de variación de las longitudes de las piernas necesarios.

2. COMPONENTES DEL MANIPULADOR Y ANÁLISIS DE LA POSICIÓN ALCANZADA

Cada pierna del manipulador 3RPS está compuesta por una barra superior y otra inferior conectadas a través de una junta prismática. La barra superior está conectada a la plataforma móvil a través de una junta esférica y la inferior a la plataforma fija a través de una junta de revolución. Por lo tanto, se puede decir que el sistema tiene ocho barras, de las cuales una es el bastidor la otra forma parte del objeto a orientar, tres piernas compuesta por dos barras cada una, tres articulaciones de revolución, tres articulaciones prismáticas y tres articulaciones esféricas. Las uniones a las plataformas fija y móvil se hacen en puntos que determinan en el plano un triángulo equilátero, el cual puede coincidir con los objetos que deben ser orientados

[7-4-9]. En la Figura 1 se muestra un esquema del manipulador con los diferentes elementos que lo componen.

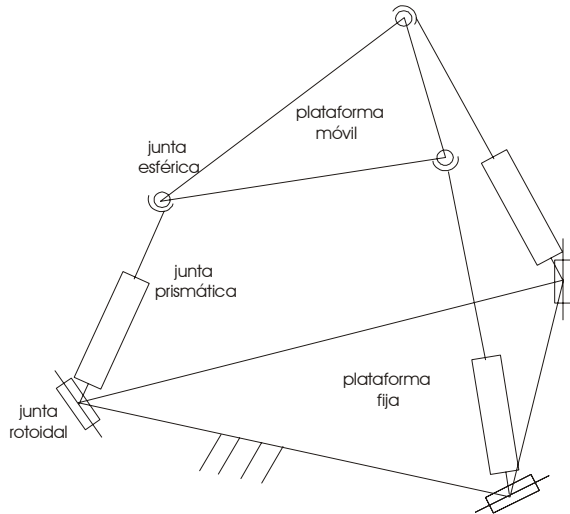


Figura 1 Manipulador paralelo 3R-P-S con los diferentes elementos que lo componen.

Para determinar la posición y la orientación de los vectores que unen diferentes puntos de la plataforma móvil, se fija una terna móvil solidaria a ésta [10-11] y otra a la plataforma fija. En la Figura 2 se indican las ubicaciones de las ternas utilizadas para el análisis de las posiciones que puede alcanzar la plataforma móvil del manipulador.

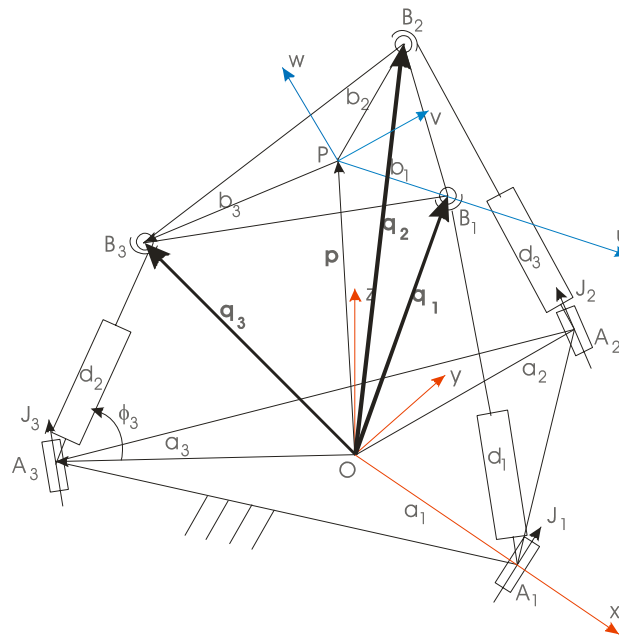


Figura 2 Sistemas de referencias ubicados en la plataforma fija (X, Y, Z) y móvil (u, v, w).

La plataforma móvil es un triángulo equilátero en cuyo centro geométrico se ubica el origen P de la terna móvil (u, v, w), y en los vértices (B₁, B₂, B₃) se encuentran las juntas esféricas; el eje u coincide con la dirección PB₁. El bastidor es también un triángulo equilátero en cuyo centro geométrico está el origen O de la terna fija (X, Y, Z) y en los vértices (A₁, A₂, A₃) se encuentran las juntas de revolución cuyos ejes están contenidos en plano X, Y. El eje X coincide con la dirección OA₁.

La posición y orientación de un vector que une el origen del sistema fijo con un vértice de la plataforma móvil \vec{q}_i queda determinada, en coordenadas cartesianas, a través de

$$\vec{q}_i = \vec{p} + [R] * \vec{b}_i \tag{1}$$

Donde \vec{p} es el vector que une el origen del sistema móvil con el fijo, $[R]$ matriz de rotación, \vec{b}_i vector que une un punto cualquiera de la plataforma móvil con la terna solidaria a ésta.

La solución de la Ecuación (1) se obtendrá a través del álgebra matricial en coordenadas homogéneas. La matriz de transformación homogénea $[T]$ está compuesta por el producto de las matrices de desplazamiento del origen de coordenadas del sistema móvil $[S]f(p_x, p_y, p_z)$, y las matrices de giro de los ejes del mismo sistema móvil, respecto del fijo $[S_1]f(\rho), [S_2]f(\gamma), [S_3]f(\Psi)$.

La matriz de desplazamiento queda definida cuando se conocen las componentes del vector desplazamiento que une el origen de la terna móvil con el de la fija para las diferentes combinaciones de movimiento de las piernas del manipulador. El valor de los ángulos de las matrices de giro se determina a través de relaciones geométricas, también para las diferentes combinaciones de movimiento de las piernas del manipulador [7].

Por lo tanto la Ecuación (1) en coordenadas homogéneas será:

$$\vec{q}_i = [T] * \vec{b}_i \tag{2}$$

La solución de la Ecuación (2) se hace en ambiente MatLab obteniéndose las diferentes gráficas de las posiciones que alcanza la plataforma móvil y su normal, ver Figura 3.

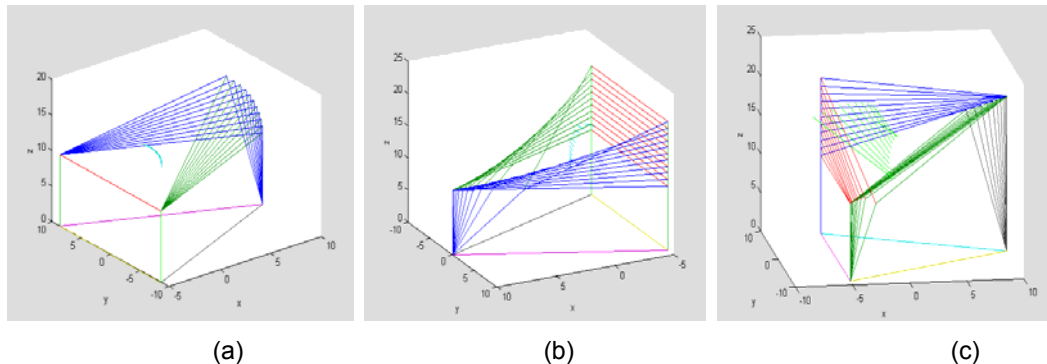


Figura 3 Posiciones que toma la plataforma móvil, a) caso A, b) caso B, c) caso C.

Las posiciones alcanzadas por la normal a la plataforma móvil correspondientes a las diferentes combinaciones de movimientos de las piernas del manipulador, se pueden resumir en tres casos. Caso A Figura 3 a) cuando se mueve una sola pierna, caso B Figura 3 b) cuando se mueven dos piernas en forma simultánea y caso C Figura 3 c) cuando se mueven dos piernas en forma no simultánea.

3. RELACIÓN ENTRE LAS DISTANCIAS QUE SEPARAN LAS PROYECCIONES DE LA NORMAL EN DIFERENTES PLANOS. Para cinemática directa e inversa.

Al moverse los actuadores del manipulador, la plataforma móvil se ubica en diferentes posiciones según se desea orientar la normal a ésta. Todas las posiciones que alcanza la normal se las puede proyectar en diferentes planos. Si la cantidad de proyecciones sobre dos planos cualquiera es la misma, el cociente entre las distancias que separan las proyecciones en los diferentes planos es constante. Como los ángulos que se utilizan para medir la posición de un objeto en el espacio están en planos horizontales y verticales, se utilizarán los mismos planos para hacer las proyecciones de la normal a la plataforma móvil. El plano vertical para la proyección puede tener cualquier dirección. El plano horizontal es siempre coincidente con el plano de la plataforma fija. La Figura 4 muestra las proyecciones en los planos mencionados.

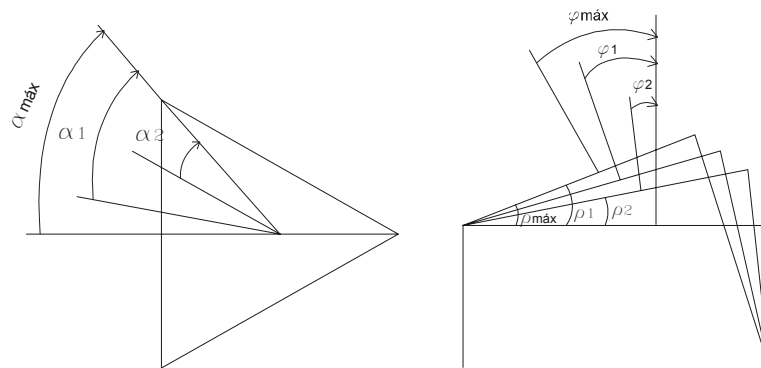


Figura 4 Proyecciones de la normal en diferentes planos, plano horizontal y vertical.

De la Figura 4 se puede obtener la siguiente relación matemática:

$$\frac{\alpha_1}{\rho_1} = \frac{\alpha_2}{\rho_2} = \dots\dots \frac{\alpha_n}{\rho_n} = cte \tag{3}$$

La Ecuación (3) permite relacionar el ángulo que recorre la proyección de la normal en el plano horizontal el cual coincide con el ángulo de acimut y el ángulo que forma la plataforma móvil con la horizontal, el cual coincide con el ángulo de elevación. La Ecuación 3 aplicada a dos posiciones, una extrema, que es la que se alcanza cuando la pierna que se mueve en segundo lugar alcanza la misma longitud que la primera, y otra posición intermedia cualquiera, toma la siguiente forma.

$$\frac{60^\circ}{\rho_{\text{máx}}} = \frac{\alpha}{\rho} \tag{4}$$

5. TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS DE POSICIÓN SATELITAL A LAS COORDENADAS ARTICULARES DEL MANIPULADOR. Para uso en cinemática inversa.

Para lograr posicionar cualquier objeto en una determinada dirección es necesario encontrar la relación entre las coordenadas de posición del mismo (elevación y acimut) y las coordenadas articulares del manipulador (variación de las longitudes de las piernas que intervienen en el movimiento). Dados los valores de ángulos de elevación que se quiere obtener en la plataforma móvil, la variación que se debe lograr en las longitudes de las piernas se obtiene a través de las siguientes ecuaciones:

$$\Delta D = g_1^{-1}(\rho) \tag{5}$$

$$\Delta D = g_2^{-1}(\rho) \tag{6}$$

La Ecuación (5) se usa para el caso A y la (6) para el caso B.

Para encontrar la relación entre el ángulo de acimut (α) deseado y las longitudes de las piernas del manipulador es necesario que se muevan dos piernas del mismo en forma no simultánea. Suponiendo que una de las piernas se encuentra totalmente extendida (A_1B_1) y la otra (A_3B_3) se ha extendido una distancia ΔD_{i+1} , como se puede ver en la Figura 5, la cual es una vista del manipulador en la dirección de la línea que une los puntos A_1 y A_3 de la plataforma fija, se determinan los valores de los ángulos ω , π , ρ , ε , a través de relaciones trigonométricas los cuales quedan como función de ΔD de las piernas que intervienen en el movimiento.

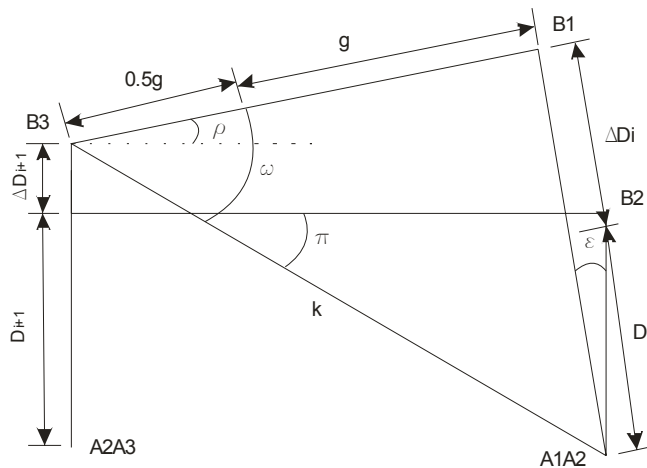


Figura 5 Movimiento de dos piernas en forma alternada.

Como se ha mencionado anteriormente, cuando la cantidad de proyecciones de la normal a la plataforma móvil sobre el plano que contiene la plataforma fija (plano horizontal) y la cantidad de proyecciones de ésta en el plano vertical cuya traza en la intersección con el plano horizontal es la recta que une los puntos A_1A_3 , es la misma, están relacionados a través de la Ecuación (4) de donde se obtiene el ángulo ρ que debe tomar la plataforma móvil respecto de la horizontal para un ángulo de acimut α deseado:

$$\rho = \frac{\rho_{\Delta Di} * \alpha}{60^\circ} \tag{7}$$

Se debe recordar que el ángulo de elevación λ es el mismo que el ángulo que forma la plataforma móvil con la horizontal ρ . El valor del ángulo $\rho_{\Delta D_i}$ que toma la plataforma móvil respecto de la horizontal depende del valor que toma la variación de longitud de la pierna que se extiende primero (ΔD_i), cuando empieza a variar la longitud la segunda pierna (ΔD_{i+1}), el ángulo ρ empieza a disminuir hasta hacerse cero cuando las dos piernas tienen la misma variación de longitud. La proyección de la normal en el plano de la plataforma fija recorre 60° por pequeña que sea la variación de la longitud de las piernas que intervienen en el movimiento.

Finalmente teniendo en cuenta nuevamente la Figura 5 se puede obtener el valor del ángulo ε a través de relaciones geométricas.

$$1,5 \cdot g \cdot (1 - \cos \rho) = (\mathbf{D}_i + \Delta \mathbf{D}_i) \cdot \sin \varepsilon \quad (8)$$

Obtenido el ángulo ε , haciendo las proyecciones del manipulador, Figura 5, en la vertical se obtienen la siguiente expresión matemática

$$\mathbf{D}_{i+1} + \Delta \mathbf{D}_{i+1} + \left[\mathbf{g} + \mathbf{g} \cdot \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) \right] \cdot \sin \rho = (\mathbf{D}_i + \Delta \mathbf{D}_i) \cdot \cos \varepsilon \quad (9)$$

De la Ecuación (9) se determina el valor de la extensión que debe tomar la pierna que se mueve ΔD_{i+1} , en función del valor de extensión ΔD_i que toma la pierna que se mantiene fija, para lograr posicionar la plataforma móvil en la dirección de acimut deseado. Una vez obtenido el acimut se puede posicionar la plataforma móvil en relación a la elevación, moviendo en forma simultánea las piernas que intervinieron en la obtención del acimut un valor ΔD dado por la Ecuación (6), con lo cual se ha logrado posicionar la plataforma móvil en acimut y elevación a través del movimiento de dos piernas del manipulador.

6. VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

6.1. Construcción del Manipulador 3RPS.

Para validar el modelo matemático que encuentra la variación de las longitudes de las piernas para una determinada orientación en el espacio de la normal a la plataforma móvil expresada en coordenadas acimutales, se ha diseñado y construido un manipulador paralelo 3RPS el cual se puede ver en la Figura 6 y Figura 7.



Figura 6 Manipulador construido



Figura 7 Parte del sistema de medición.

La plataforma fija es una base rígida construida en materiales de bajos costo. La plataforma móvil fue realizada a los efectos de validación solamente por una placa de material de bajo costo de forma triangular con un indicador de vector posición en forma perpendicular a la misma, dado que este es el que valida la posición lograda con el mecanismo. Las piernas están realizadas con caños en la parte superior y la inferior por un tornillo, de forma tal que su giro permite variar la longitud de la pierna, conformando la articulación prismática. Dicho giro se realiza a través de moto reductores que van fijados a las placas que forman la articulación de revolución ubicada en el bastidor.

6.2. Sistema de medición.

Para realizar las mediciones en el laboratorio y validar el modelo matemático, se utiliza un sistema de medición que consiste de un conjunto de transductores de distancia por cable, los cuales fueron diseñados en el IMA (Instituto de Mecánica Aplicada). Físicamente el sistema está compuesto por un tambor donde se enrolla el cable que se conectará al punto de medición, en uno de sus extremos es colocado un transductor eléctrico resistivo de varias vueltas para transformar la variación de longitud en una variación de tensión, las que se ingresan en una placa de adquisición de datos (National Instruments) para luego ser procesadas en el instrumento virtual.

A los efectos de lograr la medición de la posición de un punto se tomó una disposición triangular de tres transductores sobre un plano de referencia y se llevaron al punto deseado los tres cables, ver Figura 8.

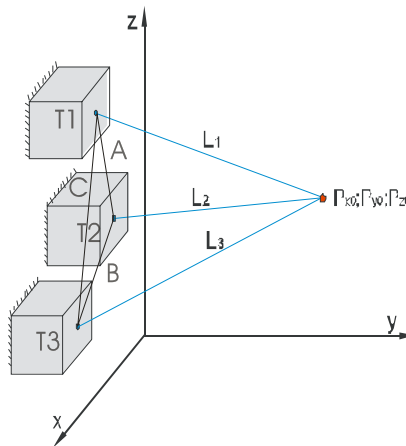


Figura 8 Diagrama de la medición de un punto en el espacio de tres dimensiones

Como las distancias A; B; C se mantienen fijas, las longitudes de las aristas L_1 , L_2 y L_3 varían con la posición de P (punto a determinar su posición), la posición de éste respecto del sistema fijo ó de referencia está dada por la Ecuación (10).

$$(P_x, P_y, P_z) = f(A, B, C, L_1, L_2, L_3) \quad (10)$$

La variación de tensión que se indica en el transductor es leída por un instrumento virtual desarrollado en ambiente Lab-view, y convertidas en distancia en un gráfico en la pantalla de la PC como se indica en la Figura 9.

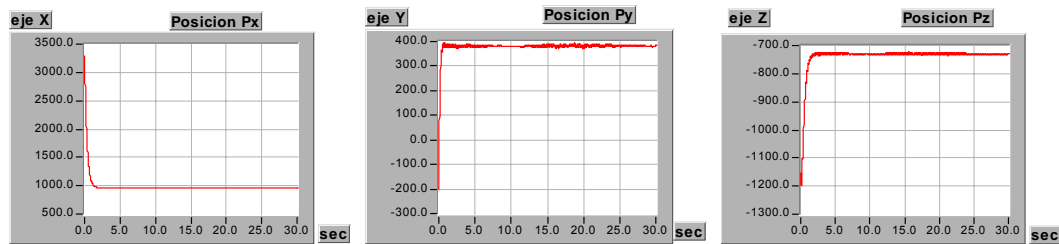


Figura 9 Gráficas de las coordenadas X, Y, Z, de uno de los puntos extremos de un segmento normal a la plataforma móvil.

6.3. Valores experimentales.

Para validar los valores obtenidos en forma analítica de las variaciones de las longitudes de las piernas correspondientes a los valores de acimut y elevación deseados, experimentalmente se varían las longitudes de las mismas según éstos valores. Con los datos obtenidos de los extremos de la normal a la plataforma móvil se determinan los valores de acimut y elevación, los cuales se vuelcan en la Tabla 1 y se los compara con los valores de partida y que son los que se quieren obtener.

Tabla 1: Comparación de valores obtenidos en forma teórica con los experimentales.

Ejemplos	Acimut deseado	Elevación deseado	Pierna1	Pierna2	Pierna3	Acimut obtenido	Elevación obtenido	Error
1	10	35	203.3	198.2	124.6	9.8	34.5	0.35
2	20	40	208.6	198.4	124.6	20.3	40.1	0.20
3	30	40	208.6	193.4	124.6	29.7	40.3	0.30

El error cometido entre los valores obtenidos en forma analítica y experimental es menor de 1° , el cual está dentro de los valores esperados. El error se puede disminuir utilizando otros materiales y mejorando el diseño mecánico, dado que el modelo de laboratorio es un prototipo de bajo costo.

7. CONCLUSIONES

Las ecuaciones analíticas que relacionan las variables azimutales con las articulares del manipulador han sido desarrolladas a través de las relaciones que surgen de las proyecciones de la normal a la plataforma móvil en diferentes planos.

Las ecuaciones obtenidas en forma teórica que relacionan las variables azimutales de ubicación de los objetos en el espacio con las variaciones de longitud de las piernas (variables articulares) que intervienen en el posicionamiento, son validadas a través del ensayo experimental.

Se demostró en forma experimental que la plataforma móvil de mueve en relación al ángulo de acimut cuando se mueven dos piernas en forma no simultánea, y en relación al ángulo de elevación cuando se mueve una sola pierna ó cuando se mueven dos piernas en forma simultánea.

El sistema de medición diseñado permitió validar analíticamente las ecuaciones encontradas, con un error menor de 1°, considerado aceptable teniendo en cuenta que los materiales utilizados para la construcción del prototipo del manipulador no son de buena calidad.

REFERENCIAS

- [1] A. Golitschek, *Alaska SAR Facility (ASF), Intern Report Alexander Golitschek's*, Geophysical Institute University of Alaska Fairbanks Fairbanks, AK 99775-7320 USA, May 13th to August 16th at the 1996.
- [2] C. McDonough, *Synthetic Aperture Radar*, Wiley-Interscience, USA, 1991.
- [3] J. Williams, *Official Calibration Plan V1.0 ASF*, Alaska, 1995.
- [4] E., Ottaviano, G., Carbone, M., Ceccarelli, Proceeding International Simposium on Multibody Systems and Mechatronics "*Workspace Analysis and Performances of a Binary Actuated Parallel Manipulator with Flexural Joints*", code M10, México September 12-14, 2002.
- [5] L., Tsai, *Robot Analysis*, John Wiley & Sons Inc., New York USA, 1999.
- [6] A., Barrientos, et all, *Fundamentos de Robótica*, McGraw-Hill Interamericana de España S.A., Madrid España, 1997.
- [7] E., Rojos, O., Penisi, F., Alba Juez, CD Artículos 7° Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, "*Aplicación de un Manipulador 3RPS para el Posicionamiento de un Corner Reflector en Aplicaciones Espaciales*", México 12-14 octubre. 2005.
- [8] J., Chassériaux, *Conversión Térmica de la Radiación Solar*, Librería Agropecuaria S.A., Buenos Aires, Argentina, 1990.
- [9] K-M, Lee, D.K., Shah, IEEE Journal of Robotics and Automation, "*Kinematic analysis of a 3-degree-of-freedom in-parallel actuated manipulator*", Vol. 4, No. 3, 1988.
- [10] O., Ibrahim, W., Khalil, 12th IFToMM World Congress, "*Kinematic and dynamic modelling of 3 RPS parallel manipulator*", Besançon, France, 2007.
- [11] E., Rojos, O., Penisi, O., Proceeding International Simposium on Multibody Systems and Mechatronics, "*Application of a 3RPS manipulator in the orientation of a corner reflector*", Paper N° 39, San Juan, Argentina, April 8 -12, 2008.