



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECÁNICA  
DE LAS  
INGENIERÍAS

## FoDAMI

## PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS DE MÍNIMO JERK PARA UM ROBÔ CILÍNDRICO ACIONADO PNEUMATICAMENTE

Leonardo Missiaggia<sup>1</sup>, Eduardo André Perondi<sup>\*2</sup>

<sup>1</sup> Instituto Federal Sul-rio-grandense Campus Camaquã  
Rua Ana Gonçalves da Silva, 901. Camaquã/RS - Brasil  
E-mail: missiaggia@camaqua.ifsul.edu.br

<sup>\*2</sup> Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)  
Rua Sarmento Leite, 425. Porto Alegre/RS - Brasil  
E-mail: eduardo.perondi@ufrgs.br

### RESUMO

Este trabalho consiste na elaboração de uma estratégia para a geração de trajetórias com valores mínimos de *jerk* para um robô cilíndrico de cinco graus de liberdade acionado pneumáticamente. Como resultado da aplicação do método desenvolvido obtêm-se as trajetórias no espaço das juntas que resultam no movimento adequado do efetuador do robô em função do critério de otimização adotado. Para a obtenção das trajetórias das juntas do robô, a partir de uma dada trajetória desejada para o efetuador, resolveu-se o problema de cinemática inversa através de uma abordagem algébrica. A fim de gerar trajetórias entre os pontos no espaço de trabalho do robô propõe-se a utilização de um algoritmo de aproximação de pontos por meio de *splines* compostas por polinômios de sétimo grau. Essa escolha garante a continuidade da função de posição, bem como de suas três primeiras derivadas, sendo essa uma condição necessária para a implantação de importantes leis e estratégias de controle. Propõe-se uma metodologia para a geração de *splines* que permite a interpolação dos pontos de passagem da trajetória de duas formas: no espaço dos atuadores ou no espaço tridimensional. A interpolação por ambas as formas fornecem ao controlador as curvas de referência para posição, velocidade, aceleração e *jerk* dos atuadores. Para a demonstração da aplicação do método no seguimento de trajetórias, são utilizadas como referência curvas tridimensionais cujos valores numéricos são comparados com os resultados obtidos pelos dois métodos de interpolação propostos. Uma vez calculadas as trajetórias em cada uma das juntas através da cinemática inversa, utiliza-se as transformações homogêneas da cinemática direta do robô para obter a trajetória do efetuador e verificar a funcionalidade do modelo resultante.

**Palavras Chaves:** *planejamento de trajetória; cinemática inversa; manipulador robótico pneumático; interpolação por splines.*



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERIA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

## 1. INTRODUÇÃO

Diversos estudos têm sido propostos a fim de gerar trajetórias de robôs industriais em função de diferentes aplicações e exigências. Por exemplo, o controle de servoposicionadores pneumáticos através da estratégia em cascata [1] tem como uma das exigências a continuidade da trajetória e de suas derivadas até a terceira ordem. Além disso, sabe-se que a continuidade da derivada da aceleração e valores baixos para ela proporcionam trajetórias suaves, reduzindo a variação brusca de esforços nos atuadores, evitando desgaste prematuro das juntas e minimizando vibrações excessivas no manipulador [2]. Assim, neste trabalho propõe-se o desenvolvimento de estratégias para a geração de trajetórias com a continuidade da função de posição e de suas três primeiras derivadas para um manipulador robótico cilíndrico acionado pneumaticamente. Propõe-se ainda uma estratégia que permita a otimização da trajetória através da minimização dos valores da terceira derivada da função de posição.

## 2. GERAÇÃO DE TRAJETÓRIAS A PARTIR DE SPLINES

Para a geração de trajetórias - formadas por um determinado número de pontos ou nós - a serem percorridas pelo efetuador, são utilizadas funções tipo *splines* determinadas de acordo com a metodologia proposta em [3], através da qual, para obter uma trajetória a partir de funções *spline* de ordem qualquer assume-se, inicialmente, que os nós que a compõem são igualmente espaçados no tempo, tal que  $t_i=i$  ( $i = 0, \dots, N$ ), onde  $N$  é o número de segmentos polinomiais que compõem a trajetória e  $M$  é um número inteiro e positivo. Define-se uma spline de grau  $M-1$  como uma função  $y(t)$  que satisfaz o critério composto pelas equações (1) a (3):

$$y(t)=y_i(t) , t \in [t_{i-1},t_i], (i=1,\dots,N) \quad (1)$$

$$y_i(t)=x_i(t-t_{i-1}) \quad (2)$$

$$x_i(t)=\sum_{k=0}^{M-1} a_{ik}t^k , t \in[0,T] \quad (3)$$

onde  $T$  é o comprimento normalizado de cada segmento da função. A spline  $y(t)$  consiste na união de  $N$  segmentos contínuos  $y_i(t)$  ( $i=1,\dots,N$ ). Cada  $x_i(t)$  consiste de um segmento normalizado da spline de  $t=0$  até  $t=T$ . Esses segmentos normalizados são então deslocados no tempo para formar os segmentos de  $y_i(t)$ , os quais são unidos para formar a função spline  $y(t)$  de comprimento  $NT$ . Os parâmetros  $a_{ik}$  ( $k=0,\dots,M-1$ ) são os coeficientes do  $i$ -ésimo segmento da spline. A função resultante  $y(t)$  bem como suas derivadas  $y'(t)$ , ...,  $y^{(R)}(t)$  são contínuas entre  $t_0$  e  $t_N$ , desde que  $R=(M/2)-1$ ,



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERIA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

sendo  $R$  o número de derivadas de  $y(t)$  possíveis de serem efetuadas continuamente. É importante destacar que o número de coeficientes  $a_{ik}$  que devem ser determinados para definir um polinômio de grau  $M-1$  é igual a  $M$  e, por esse motivo, em [3]  $M$  é definida como a ordem de uma função polinomial de grau  $M-1$ . Ainda, em [3] é proposta uma função que permite o ajuste da *spline* resultante condicionada às especificidades da aplicação e da parametrização realizada. Para tanto, após definidos os critérios que atendem aos requisitos específicos para a aplicação, determina-se, dentre todas as funções contínuas que satisfazem o critério formado pelas equações (1) a (3), a que minimiza o valor da função  $J$ , expressa pela Eq. (4):

$$J = \sum_{i=0}^N p_i (y_i - f_i)^2 + \int_{t_0}^{t_N} \{ \alpha_1 [y'(t)]^2 + \dots + \alpha_R [y^{(R)}(t)]^2 \} dt \quad (4)$$

Na Equação (4),  $y_i \equiv y(t_i)$  e os valores  $p_i$  permitem controlar o ajuste da curva em cada um dos nós, enquanto que os parâmetros  $\alpha_i$  possibilitam o controle da magnitude relativa de cada uma das derivadas da função. Na prática, os parâmetros de controle  $p_i$  são geralmente constantes para todo o intervalo de dados, sendo também os espaçamentos entre os pontos da função considerados fixos, de forma que  $t_i - t_{i-1} = h$ . No algoritmo utilizado, é requerida a continuidade da função  $y(t)$  e de suas  $R$  primeiras derivadas em todos os nós da função, com exceção do primeiro e do último ponto. Assim, considerando  $y_i \equiv y(t_i)$ ,  $y'_i \equiv y'(t_i)$ , ...,  $y_i^{(R)} \equiv y^{(R)}(t_i)$ , é possível obter, a partir do critério especificado pelas equações (1) a (3),  $M$  equações de restrição da forma:

$$y_{i-1}^{(r)} = x_i^{(r)}(0) \quad (r=0, \dots, R) \quad (5)$$

$$y_i^{(r)} = x_i^{(r)}(T) \quad (r=0, \dots, R) \quad (6)$$

Os pontos especificados para a formação da trajetória de cada atuador do manipulador são aproximados por *splines* formadas a partir de segmentos polinomiais de sétimo grau, visando a permitir a aplicação de estratégias de controle que necessitam de trajetórias com derivadas contínuas até ordem 3. Para esse tipo de spline tem-se, portanto,  $M=8$  e  $R=3$ . Considerando para a criação dessas splines que  $T=1$  seja o comprimento normalizado dos segmentos entre os nós, é possível determinar as oito restrições como apresentadas nas equações (5) e (6) que escritas na forma matricial resultam na Equação (7).

Cada segmento normalizado da *spline* possui, portanto, 8 coeficientes. Considerando que hajam  $N$  segmentos de polinômios na função spline, tem-se  $8N$  variáveis independentes a serem determinadas.



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

$$\begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y'_{i-1} \\ y'_i \\ y''_{i-1} \\ y''_i \\ y'''_{i-1} \\ y'''_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & 30 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24 & 60 & 120 & 210 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \\ a_{i6} \\ a_{i7} \end{bmatrix} \quad (i=1, \dots, N) \quad (7)$$

A otimização da função custo é vista como uma otimização em relação a estes 8N coeficientes, sujeitos às restrições de continuidade de  $y(t)$ ,  $y'(t)$ ,  $y''(t)$  e  $y'''(t)$  nos nós; e, desde que os coeficientes sejam funções de  $y_i$ ,  $y'_i$ ,  $y''_i$  e  $y'''_i$  ( $i=1, \dots, N$ ), o problema pode ser reformulado como uma otimização sem restrições referente a estes  $4(N+1)$  parâmetros. Portanto, a minimização da função custo pode ser resolvida por:

$$\frac{\partial J}{\partial y_i^{(r)}} = 0, \quad (i=1, \dots, N), \quad (r=0, \dots, 3) \quad (8)$$

Reescrevendo a função custo (Equação (4)) na forma de uma soma de equações integrais menores e fazendo com que o espaçamento entre os nós seja representado por um período fixo  $h$  (quando a spline  $y(t)$  é modificada de seu comprimento normalizado  $NT$  para o comprimento  $Nh$ ) a derivada  $r$  é multiplicada por um fator  $(T/h)^r$ . Assim, a função custo pode ser reescrita da seguinte forma:

$$J = \sum_{i=0}^N p_i (y_i - f_i)^2 + \sum_{k=1}^N \int_0^T \left\{ \left(\frac{T}{h}\right) \alpha_1 [y_k'(t)]^2 + \left(\frac{T}{h}\right)^3 \alpha_2 [y_k''(t)]^2 + \left(\frac{T}{h}\right)^5 \alpha_3 [y_k'''(t)]^2 \right\} dt \quad (9)$$

Assumindo ainda que  $y_k(t)$  consiste de uma função de  $y_i$  somente para  $k=i$  e  $k=i+1$ , combinando as equações (8) e (9) pode-se reescrever o critério de minimização através das equações (10) a (12):

$$2p_0 (y_0 - f_0) \delta_r + \frac{\partial J_1}{\partial y_0^{(r)}} = 0, \quad (r=0, \dots, 3) \quad (10)$$

$$2p_i (y_i - f_i) \delta_r + \frac{\partial (J_i + J_{i+1})}{\partial y_i^{(r)}} = 0, \quad (r=0, \dots, 3), \quad (i=1, \dots, N-1) \quad (11)$$

$$2p_N (y_N - f_N) \delta_r + \frac{\partial J_N}{\partial y_N^{(r)}} = 0, \quad (r=0, \dots, 3) \quad (12)$$

onde  $\delta_r=1$  se  $r=0$  e  $\delta_r=0$  se  $r \neq 0$ . Utilizando um software matemático de manipulação simbólica foram resolvidas as equações (10) a (12) resultando em  $4(N+1)$  equações para um total de  $4(N+1)$



valores de  $y_i$ ,  $y'_i$ ,  $y''_i$  e  $y'''_i$  para serem determinados. Uma vez obtidos estes valores, eles foram utilizados na Eq. (7) para a determinação dos coeficientes ótimos para a spline segundo os critérios definidos através da ponderação dos coeficientes  $p_i$  e  $\alpha_i$ .

### 3. O ROBÔ CILÍNDRICO ACIONADO PNEUMATICAMENTE

As juntas do robô de 5 GDL com acionamento pneumático, utilizado para demonstrar a aplicação da metodologia de geração de trajetórias proposta, são configuradas como RPP:RR. Assim, o braço do manipulador é composto por uma junta rotacional {R} em sua base, enquanto que a segunda e a terceira juntas são prismáticas ortogonais {P}. O punho possui duas juntas rotacionais que conferem os movimentos de arfagem e rolagem ao efetuador. As coordenadas associadas às juntas são representadas por  $\theta_i$  (juntas rotacionais), e  $d_i$  (juntas prismáticas). Na Figura 1 (a) é apresentado um esquema geral do sistema e na Figura 1 (b) é apresentado o espaço de trabalho cilíndrico do manipulador.

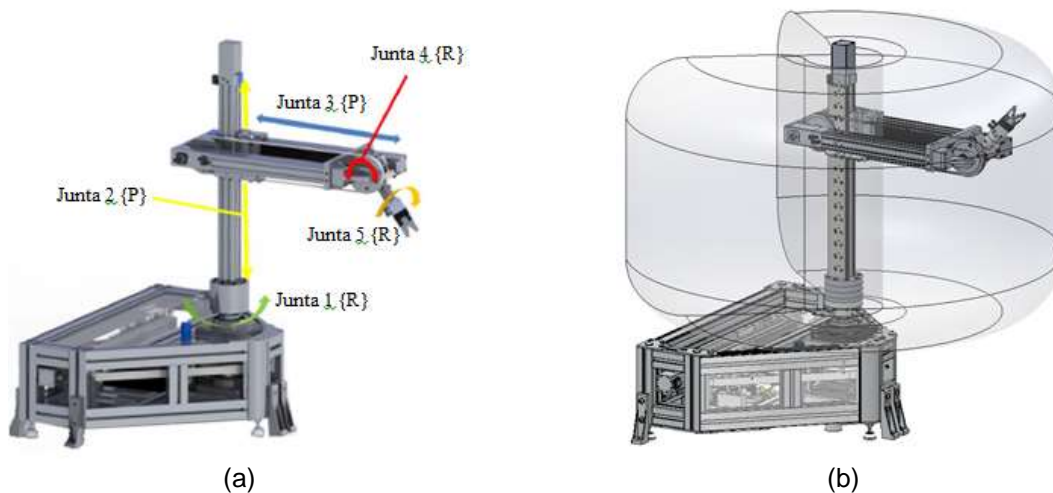


Figura 1 (a) Configuração das juntas do robô e (b) o espaço de trabalho cilíndrico.

### 4. CINEMÁTICA DIRETA DO MANIPULADOR

O manipulador pneumático em estudo está representado na Figura 2 através da sua estrutura simplificada da cadeia cinemática obtida em [4], seguindo-se o procedimento de Denavit-Hartenberg. Na Figura 2 (a) podem ser visualizadas as variáveis das juntas que definem a posição do punho e do efetuador do robô, enquanto que a Figura 2 (b) apresenta uma descrição da cadeia cinemática, destacando o referenciamento do punho e do efetuador com relação à base. Através dessa representação são obtidos os parâmetros de DH, conforme apresentado na Tabela 1:

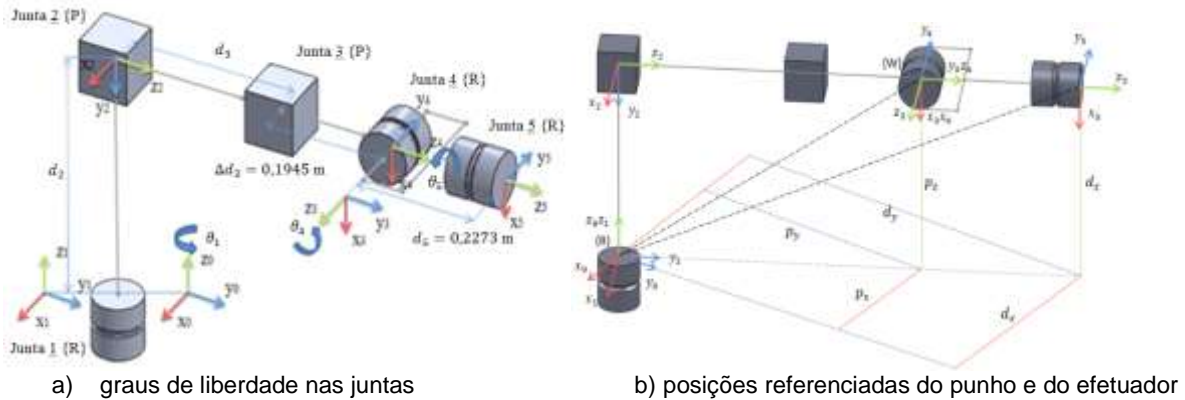


Figura 2 Representações simplificadas da cadeia cinemática do robô (adaptada de [4])

Tabela 1 Parâmetros de Denavit-Hartenberg do robô pneumático.

Elos	$\alpha_i$ (rad)	$a_i$ (m)	$\theta_i$ (rad)	$d_i$ (m)
1	0	0	$\theta_1$	0
2	$-\pi/2$	0	0	$d_2$
3	$\pi/2$	0	$\pi/2$	$d_3 + \Delta d_3$
4	$-\pi/2$	0	$\theta_4$	0
5	0	0	$\theta_5$	$d_5$

Assim é possível obter a matriz de transformação que determina a rotação e a posição do sistema de coordenadas do efetuador do robô em relação à origem do sistema de coordenadas da base:

$$T_0^5 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

onde  $d_x$ ,  $d_y$  e  $d_z$  são as coordenadas que determinam a posição da origem do sistema de coordenadas localizado no efetuador do robô (Figura 2 (a)) enquanto que os termos  $r_{ij}$  determinam a rotação desse sistema de coordenadas em relação ao da base.

## 5. CINEMÁTICA INVERSA DO MANIPULADOR

A solução da cinemática inversa de um manipulador consiste em determinar as variáveis das juntas do robô em termos da posição e orientação do efetuador [5]. A partir da Eq. (13) e da representação apresentada na Fig. 2 (b) é possível descrever a posição da origem do sistema de coordenadas do punho {W} com relação ao da base {B} relacionada com a posição da origem do sistema de coordenadas do efetuador [6] como:



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x - d_5 r_{13} \\ d_y - d_5 r_{23} \\ d_z - d_5 r_{33} \end{bmatrix} \quad (14)$$

onde,  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$  são as coordenadas da origem do sistema de coordenadas do punho do robô {W}.

Substituindo  $r_{13}$ ,  $r_{23}$  e  $r_{33}$  na Eq. (14), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x - d_5(-\text{sen } \theta_1 \cos \theta_4) \\ d_y - d_5(\cos \theta_1 \cos \theta_4) \\ d_z - d_5 \text{sen } \theta_4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

A transformação da junta 3 (associada ao punho) para a junta 0 (associada à base) resulta:

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} 0 & -\text{sen } \theta_1 & \cos \theta_1 & -(d_3 + \Delta d_3) \text{sen } \theta_1 \\ 0 & \cos \theta_1 & \text{sen } \theta_1 & (d_3 + \Delta d_3) \cos \theta_1 \\ -1 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

As três primeiras linhas da quarta coluna da matriz expressa na Eq. (16) relacionam a posição da origem do pulso {W} com relação à origem da base {B}. Para casos em que  $d_y \geq 0$ , pode-se assumir que  $\cos \theta_1 = d_y / \sqrt{d_x^2 + d_y^2}$  e, substituindo na Eq. (15) os respectivos termos da Eq. (16) que representam a posição da origem do pulso são obtidas as seguintes equações que relacionam as variáveis de junta  $\theta_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$  com a posição e a orientação do efetuador:

$$\theta_1 = -\text{arc sen } \frac{d_x}{\sqrt{d_x^2 + d_y^2}}; \quad d_2 = d_z - d_5 \text{sen } \theta_4; \quad d_3 = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} - \Delta d_3 - d_5 \cos \theta_4 \quad (17)$$

Por possuir a estrutura do pulso composta por 2 GDL, a orientação do efetuador do robô é dada diretamente pelos ângulos  $\theta_4$  e  $\theta_5$ , que são considerados dados de entrada que são conhecidos, definindo a orientação do efetuador.

## 6. PROCESSO DE GERAÇÃO DE TRAJETÓRIAS

Neste trabalho são propostas e comparadas duas metodologias para a geração de trajetórias aplicadas ao robô pneumático de 5 GDL em estudo. Elas consistem em um conjunto de procedimentos que podem, com algumas modificações, ser aplicados a manipuladores de diferentes configurações.

### 6.1. Interpolação no espaço dos atuadores

A interpolação no espaço dos atuadores permite a geração da trajetória otimizada para cada atuador em função dos parâmetros de controle fornecidos pelo programador como, por exemplo, o



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERIA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

intervalo de tempo dos segmentos entre dois nós subsequentes ( $h$ ) e o ajuste da curva aos pontos-chave ( $p$ ). Essa parametrização consiste no estágio inicial do processo de geração da trajetória. Em seguida, os pontos-chave ou nós que compõem a trajetória são especificados a partir do espaço de trabalho tridimensional do manipulador, sendo que para cada um desses pontos é necessário conhecer as suas coordenadas em relação à base do manipulador e a orientação do efetuador. Assim, para cada nó será associado um vetor da forma  $p_i = [d_x, d_y, d_z, \theta_4, \theta_5]$ . A seguir, com a aplicação das equações da cinemática inversa, apresentadas na Seção 5, são obtidos os vetores de posição dos nós no espaço das juntas, os quais são posteriormente transformados para posições no espaço dos atuadores, onde é realizada a geração das trajetórias através das *splines* de sétimo grau apresentadas na Seção 2. Assim, de posse dos vetores que determinam a trajetória de cada atuador, com a utilização das equações que compõem a cinemática direta, é reproduzida e avaliada a trajetória tridimensional resultante que será executada pelo efetuador.

## 6.2. Interpolação no espaço de trabalho do robô

O processo de interpolação no espaço tridimensional possui diversas etapas em comum com o processo descrito na Seção 6.1. O início ocorre da mesma forma, com a informação dos pontos pelo programador, porém, em seguida já é realizada a interpolação através de *splines* de sétimo grau. Essa interpolação é feita uma vez para cada plano, considerando como dados de entrada as coordenadas dos pontos-chave tomadas em relação aos eixos que definem o plano em questão. Assim são obtidos três vetores, cada um com coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  obtidas através das *splines*. Através dessas coordenadas define-se um conjunto de pontos que determinam o caminho no espaço de trabalho que o efetuador do robô deve seguir. As coordenadas desses vetores são então transformadas para valores nas juntas através das equações da cinemática inversa. Em seguida, os valores de posição são convertidos para o espaço dos atuadores onde se obtém as curvas contínuas das suas três primeiras derivadas. Por fim são utilizadas as equações da cinemática direta para verificar o resultado do processo.

## 7. RESULTADOS DE SIMULAÇÕES

Para exemplificar o processo de geração de trajetórias e demonstrar os resultados obtidos com as metodologias desenvolvidas, é proposto um estudo de caso no qual o efetuador do robô percorre um conjunto de 13 pontos dispostos ao longo de uma linha reta em seu espaço de trabalho. As coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  dos pontos-chave para a geração das trajetórias foram obtidos a partir da equação de uma reta entre os pontos  $p_0 = (0,5; 0,45; 0,25)$  e  $p_{12} = (-0,5; 0,45; 0,25)$ , fazendo  $\theta_4$  partir de 0, variar até  $-\pi/4$  rad e retornar a 0. O valor de  $\theta_5$  foi mantido nulo durante toda trajetória.



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERIA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

Foram consideradas ainda como restrições para a definição da trajetória, a necessidade da curva ser percorrida em um tempo de 9 segundos e apresentar valor de desvio máximo de 10  $\mu\text{m}$  nos nós dos atuadores. A partir do tempo de execução e do número de segmentos entre os nós ( $N=12$ ) é possível determinar o valor para o parâmetro  $h$ , que resulta em  $h=9/12=0,75$  s. Uma vez determinado o valor do parâmetro  $h$ , podem ser realizadas simulações variando-se o valor de  $p$  a fim de encontrar a trajetória que satisfaça as condições inicialmente especificadas.

A Figura 3 apresenta os nós da trajetória retilínea proposta e o resultado das interpolações realizadas no espaço dos atuadores (curva em vermelho) e no espaço de trabalho do robô (curva em verde).

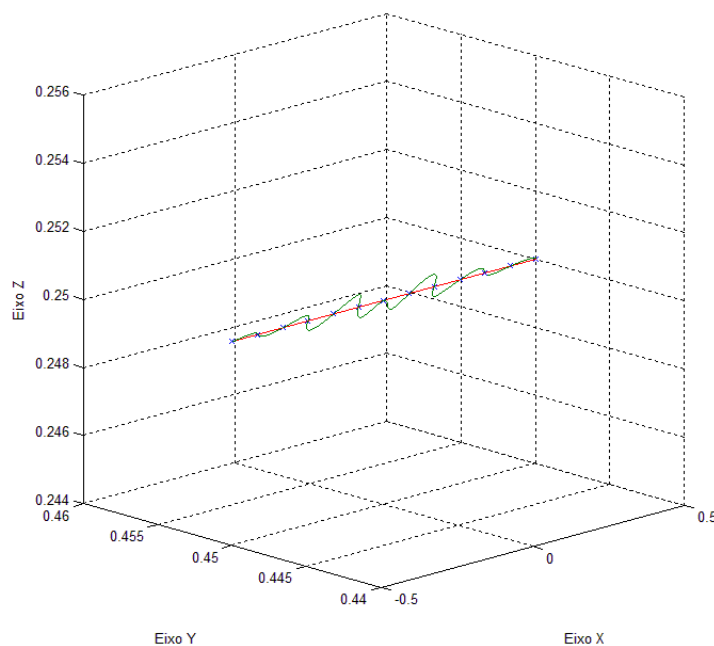


Figura 3. Trajetória resultante dos diferentes processos de interpolação

É possível observar que a trajetória obtida através da interpolação no espaço de trabalho do robô resulta em uma curva mais próxima de uma reta, apresentando, portanto, melhor desempenho dentre as duas formas de interpolação no que diz respeito ao desvio entre a trajetória e os pontos-chave. O desvio máximo apresentado por ambos processos propostos foi avaliado utilizando a mesma parametrização ( $p = 11 \cdot 10^6$  e  $h = 0,75$  s), sendo que o desvio máximo medido no espaço tridimensional resultou em 1,38  $\mu\text{m}$  para a trajetória obtida através da interpolação no espaço dos atuadores e em 0,0003  $\mu\text{m}$  para a trajetória elaborada diretamente no espaço tridimensional.

Verificou-se ainda que o processo de interpolação no espaço tridimensional resultou em valores reduzidos de jerk, medidos nos atuadores conectados as juntas do robô. A Figura 4 mostra as



curvas comparativas de jerk nos atuadores, onde as curvas em verde resultam do processo de interpolação no espaço dos atuadores e as curvas em vermelho do processo realizado no espaço tridimensional. Comparando as curvas em uma mesma escala nota-se que o jerk resultante do processo de interpolação no espaço de trabalho mantém-se próximo de zero durante toda a trajetória.

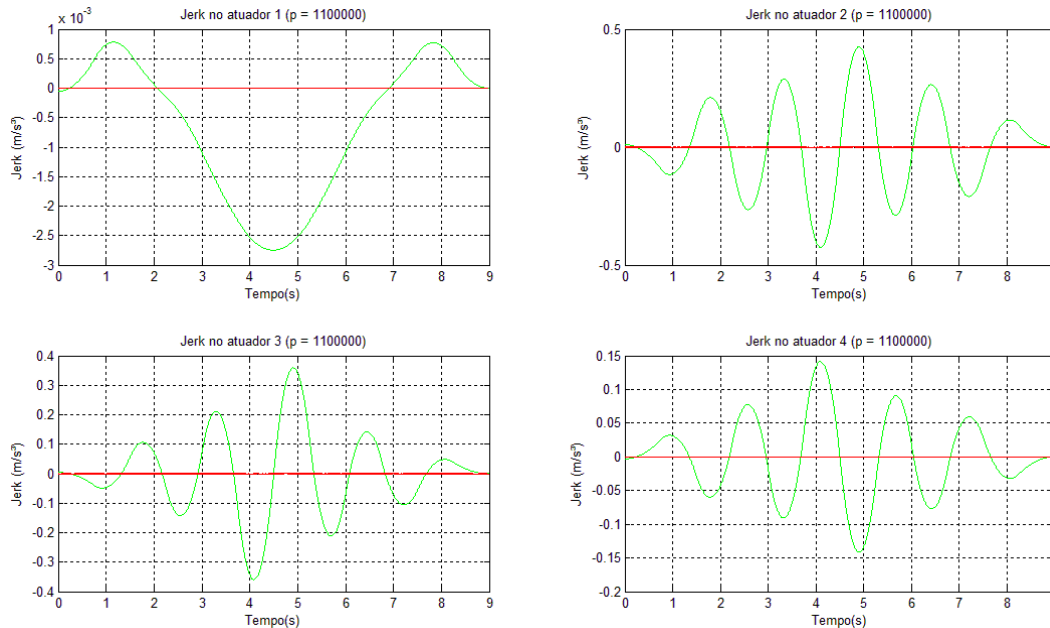


Figura 4. Jerk nos atuadores do robô

A Tabela 2 apresenta os valores máximos do jerk nos atuadores resultantes dos dois processos através da qual identifica-se que a interpolação no espaço tridimensional apresenta melhores resultados também quando avaliados em relação à minimização do jerk.

Tabela 2 Valores máximos de jerk nos atuadores resultantes das diferentes trajetórias.

Atuador	Jerk máximo (m/s³)	
	Interpolação nos atuadores	Interpolação no espaço 3D
1	0,00078	0
2	0,42505	$1,3 \cdot 10^{-8}$
3	0,35919	$1,2 \cdot 10^{-8}$
4	0,14134	$4 \cdot 10^{-9}$
5	0	0

## 8. CONCLUSÃO

A aproximação de pontos no espaço dos atuadores utilizando *splines* formadas a partir de polinômios de sétimo grau com a minimização do *jerk* demonstrou ser útil para a obtenção de



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECÁNICA  
DE LAS  
INGENIERÍAS

FoDAMI

trajetórias suaves no espaço de trabalho do manipulador. Os parâmetros de controle das splines propostas em [3], permitiram ajustar facilmente as trajetórias às especificidades da tarefa simulada, proporcionando trajetórias com valores reduzidos de *jerk* e de desvio de posição tridimensional nos pontos-chave. A proposição de diferentes processos de geração de trajetória permitiram sua comparação e a escolha daquele que, dentre estes, apresentou o melhor resultado. Ambos os processos elaborados atenderam as restrições impostas inicialmente para a obtenção da trajetória, respeitando o tempo total de execução e o desvio máximo permitido nos pontos-chave da interpolação. Em contrapartida, verificou-se que o processo de interpolação no espaço de trabalho do robô apresentou valores menores de desvio nos nós e de *jerk* nos atuadores, sendo considerado superior em desempenho em relação ao processo de interpolação no espaço dos atuadores. Além disso, as trajetórias obtidas neste trabalho, por garantirem a continuidade da função de posição e das suas três primeiras derivadas, apresentam características desejáveis para trajetórias executadas por servoposicionadores pneumáticos, atendendo os requisitos necessários à implementação de estratégias de controle em cascata que vêm proporcionando bons resultados no controle desse tipo de atuador. De uma forma geral, testes realizados demonstraram resultados satisfatórios para a geração de trajetórias nas quais ao início do processo são conhecidos os pontos de passagem da curva e o tempo de execução da tarefa, proporcionando trajetórias otimizadas com valores mínimos de *jerk* observando o limite de desvio máximo nos nós, o qual é especificado pelo usuário ou programador por meio do processo de geração de trajetória proposto.

## 9. REFERÊNCIAS

- [1] Perondi, E. A., Controle Não-linear em Cascata de um Servoposicionador Pneumático com Compensação do Atrito, Tese de Doutorado, PPGEM, UFSC, 2002.
- [2] Piazzzi, A.; Visioli, A., Global Minimum-Jerk Trajectory Planning of Robot Manipulators, IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 47, n°. 1, 2000.
- [3] Simon, D., Data Smoothing and Interpolation Using Eighth-order Algebraic Splines, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 52, n°. 4, 2004.
- [4] Rijo, M. G. Q., Desenvolvimento da Base e Controle do Grau de Liberdade Rotacional de um Robô Cilíndrico com Acionamento Pneumático, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013.
- [5] Craig, J. J., Introduction to Robotics: Mechanics and Control, Prentice Hall; 3ª ed., 2005.
- [6] Spong, M. W.; Vidyasagar, M., Robot Dynamics and Control, John Wiley & Sons, Inc., 1989.