



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

## DINÂMICA DO BRAÇO ROBÓTICO SUJEITA A EXCITAÇÃO VERTICAL NA BASE POR UM MOTOR NÃO IDEAL

Enrique Leal da Silva <sup>\*1</sup>, Jorge Luis P. Felix <sup>2</sup>

<sup>\*1</sup> Universidade Federal do Pampa-UNIPAMPA – Graduando

<sup>2</sup> Universidade Federal do Pampa-UNIPAMPA, PPEng – Orientador  
Campus Alegrete - Engenharia Mecânica  
Av. Tiaraju, 810, Alegrete-RS.

Email: enrique.leal.94@hotmail.com, jorge.felix@unipampa.edu.br.

### RESUMO

Nas últimas décadas, o estudo do pêndulo duplo tem se desenvolvido bastante para projetos de robótica, dependendo do tipo de configuração, e assim, tem realizado um papel importante na solução de muitos problemas na engenharia. Os fenômenos não lineares na passagem de ressonância de um braço robótico são baseados no comportamento dinâmico de um pêndulo duplo excitado verticalmente na sua base por um frequência oscilante harmônica constante (tipo ideal) e uma frequência variável baseada em um motor shaker eletrodinâmico (tipo não ideal). Neste trabalho, analisaram-se numericamente os intervalos dos parâmetros pelo qual o sistema se encontra no estado periódico e caótico devido a interação dinâmica entre a fonte de excitação e o braço robótico. Aliás, para a análise qualitativa do comportamento dinâmico utilizou-se as ferramentas da dinâmica não linear e caótica: a série temporal, retrato de fase e curva de ressonância no ambiente computacional MATLAB®.

**Palavras-Chave:** Braço Robótico, Motor não ideal, Pêndulo duplo, Shaker Eletrodinâmico.



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

## 1. INTRODUÇÃO

As novas tecnologias na área da robótica têm crescido muito no âmbito científico atual, principalmente em trabalhos de engenharia. O sistema físico de pêndulos é o protótipo ideal para desenvolvimento de um braço robótico. Na literatura clássica sempre foi utilizada uma excitação harmônica na base de um pêndulo simples ou duplo que gera comportamentos dinâmicos seja periódicos ou caóticos.

O braço robótico tem várias aplicações na indústria em que uma ação repetitiva é muito executada, substituindo tarefas manuais por um sistema automatizado industrial. É muito utilizado também, em linhas de montagem de fábricas de automóveis.

Considera-se neste trabalho que o pêndulo duplo é, basicamente, a união de dois pêndulos simples ligados por uma junta adicional e seu movimento é configurado por dois ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , com dois graus de liberdade. Ele ajuda a descrever o desempenho do braço, pois a moldagem do pêndulo demonstra o comportamento dinâmico do sistema.

A simplificação da dinâmica do sistema necessita levar em conta a fonte de energia ou a excitação que será utilizada, seja ela ideal ou não ideal, a fim de obter resultados que influenciem na resposta do sistema [2]. Conceitua-se que fonte de energia não ideal é aquela que ocorre interação do motor com a estrutura e a fonte de energia ideal ou excitação harmônica, como o shaker eletrodinâmico, considerou-se aqui como isenta de qualquer interação com a estrutura [11].

As oscilações forçadas geradas por um pêndulo duplo dependem da frequência angular natural e da frequência gerada pela força externa. Os fenômenos de ressonância acontecem quando essas duas frequências estão coincidindo. Todas as estruturas mecânicas possuem uma ou mais frequências angulares naturais, se a estrutura é submetida a uma força externa cuja frequência coincide com uma dessas frequências angulares naturais as oscilações podem fazer com que a estrutura se rompa [4]. Os fenômenos de ressonância acontecem quando um sistema físico recebe energia por meio de excitações de frequência igual a uma de suas frequências naturais de vibração. Assim, o sistema físico passa a vibrar com amplitudes cada vez maiores.

Sistemas caóticos são sistemas não lineares em que a ordem dos acontecimentos e a frequência são imprevisíveis, seus movimentos e suas trajetórias podem ser alterados constantemente devido a qualquer tipo de perturbação na condição inicial, tornando-as completamente aleatórias [1]. Em sistemas mais complexos, determinados resultados podem ser "instáveis" no que diz respeito à evolução temporal como função de seus parâmetros e variáveis.



Neste trabalho estuda-se o comportamento das vibrações e energia do sistema do braço robótico, seja periódico ou caótico, modelado matematicamente através de um pêndulo duplo, e assim, entender e encontrar os intervalos de estado.

## 2. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

As equações de movimento do pêndulo duplo são modeladas por equações diferenciais, baseadas no modelo de *Danuta* [9]. Para excitação na base considerou-se um shaker eletrodinâmico de *Xu* [12]. Para o caso de excitação harmônica considerou-se  $\ddot{X}_a = F_0 \cos(\omega t)$ , onde  $F_0$  e  $\omega$  são a amplitude e a frequência constantes da excitação respectivamente. Para o caso não ideal considerou-se  $\ddot{X}_a = F_0 \cos(\omega t - a_0 \cos(b_0 \omega t))$ , onde  $a_0$  e  $b_0$  são constantes.

O protótipo do braço robótico é mostrado na Figura 1. A Figura 1(a) mostra o esquema do shaker cuja plataforma se move na direção vertical  $X_a$  e suporta o pêndulo duplo. A Figura 1(b) mostra o esquema do pêndulo duplo com excitação harmônica na base.

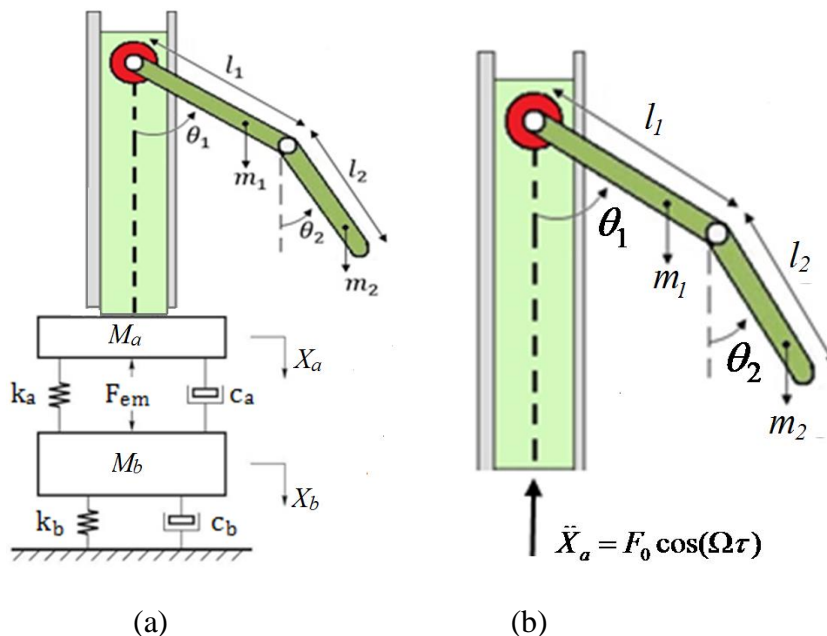


Figura 1 Sistema Braço Robótico com excitação (a) Não ideal; (b) ideal (Harmônica)



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

O movimento de cada braço do pêndulo duplo é representado pelos descolamentos angulares  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , e a equação de movimento do sistema é representadas pelas seguintes equações diferenciais de segunda ordem não linear:

$$(m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + (m_1 + m_2)gl_1 \sin\theta_1 + c_1 \dot{\theta}_1 - c_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) = (m_1 + m_2)l_1 \ddot{X}_a \sin\theta_1 \quad (1)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + m_2 gl_2 \sin\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 gl_2 \sin\theta_2 + c_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) = m_2 l_2 \ddot{X}_a \sin\theta_2 \quad (2)$$

Onde  $m_1$  e  $m_2$  são as massa das hastes;  $l_1$  e  $l_2$  são os comprimentos das hastes;  $c_1$  e  $c_2$  são as constantes de amortecimento do sistema;  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\ddot{X}_a$  a excitação vertical.

O protótipo do shaker eletrodinâmico real de Xu [12] e seu esquema do circuito interno são mostrados na Figura A1 do apêndice A, pois neste trabalho não foi considerado o circuito completo.

A seguir, foram utilizadas algumas mudanças de variáveis para deixar as Equações (1) e (2) em forma adimensional:

$$\tau = \omega_1 t, \quad \omega_1^2 = \frac{g}{l_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l_2}, \quad a = \frac{l_1}{l_2}, \quad b = \frac{m_1}{m_2}, \quad \mu_1 = \frac{c_1}{(m_1 + m_2)l_1^2}, \quad \mu_2 = \frac{c_2}{(m_1 + m_2)l_1^2}, \quad \mu_3 = \frac{c_2}{m_2 l_2^2},$$
$$H = \frac{1}{(b+1)a}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_1}, \quad \ddot{S} = \frac{\ddot{X}_a}{l_1} = F_0 \cos(\Omega \tau).$$

Adaptando as Equações (1) e (2) com as considerações acima, obtêm-se:

$$\ddot{\theta}_1 + H \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) = -H \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - \omega_1^2 \sin\theta_1 - \mu_1 \dot{\theta}_1 + \mu_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - \ddot{S} \sin\theta_1 \quad (3)$$

$$a \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \ddot{\theta}_2 = -a \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - \omega_2^2 \sin\theta_2 - \mu_3(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - \omega_2^2 \sin\theta_2 - \ddot{S} \sin\theta_2 \quad (4)$$

Para as simulações numéricas, transformam-se as Equações (3) e (4) em um sistema de primeira ordem usando as variáveis de estado, definidas assim:  $x_1 = \theta_1$        $x_2 = \dot{\theta}_1$        $x_3 = \theta_2$        $x_4 = \dot{\theta}_2$ .

Finalmente,



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{\Delta} \left[ -Hx_4^2 \operatorname{sen}(x_3 - x_1) - \omega_1^2 \operatorname{sen}x_1 - \mu_1 x_2 + \mu_2 (x_4 - x_2) - \ddot{S} \operatorname{sen}x_1 \right] \\
&\quad - \frac{H \cos(x_3 - x_1)}{\Delta} \left[ -ax_2^2 \operatorname{sen}(x_3 - x_1) - \omega_2^2 \operatorname{sen}x_3 - \mu_3 (x_4 - x_2) - \omega_2^2 \operatorname{sen}x_3 - \ddot{S} \operatorname{sen}x_3 \right] \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{-a \cos(x_3 - x_1)}{\Delta} \left[ -Hx_4^2 \operatorname{sen}(x_3 - x_1) - \omega_1^2 \operatorname{sen}x_1 - \mu_1 x_2 + \mu_2 (x_4 - x_2) - \ddot{S} \operatorname{sen}x_1 \right] \\
&\quad + \frac{1}{\Delta} \left[ -ax_2^2 \operatorname{sen}(x_3 - x_1) - \omega_2^2 \operatorname{sen}x_3 - \mu_3 (x_4 - x_2) - \omega_2^2 \operatorname{sen}x_3 - \ddot{S} \operatorname{sen}x_3 \right]
\end{aligned} \tag{5}$$

Onde  $\Delta = 1 - aH \cos^2(\theta_2 - \theta_1)$ .

## 2.1. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para realizar as simulações numéricas foi utilizado o integrador de Runge-Kutta de quarta ordem com passo adaptativo. Nesse caso, foi utilizada a Equação (5) para desenvolvimento dos gráficos de retrato de fase, série temporal e curva de ressonância no ambiente de MATLAB®. Para as simulações foram

empregadas às condições iniciais de  $\left[ \frac{5\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0 \right]$ . A Tabela 1 apresenta os parâmetros usados nas simulações que foram analisadas.

Tabela 1 Parâmetros utilizados nas simulações

	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	H	a	b	$\omega_1$	$\omega_2$	$\Omega$	$F_0$
<b>Simulação 1</b>	0.6	0.6	0.2	0.44	1.263	0.79	0.9	0.4	1	0.5
<b>Simulação 2</b>	0.2	0.2	0.2	0.5	1	1	0.5	0.5	1	0.6
<b>Simulação 3</b>	0.6	0.6	0.2	0.44	1.263	0.79	0.9	0.4	1	0.2
<b>Simulação 4</b>	0.2	0.2	0.2	0.44	1.263	0.79	0.9	0.4	0.5	0.5



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

Os resultados numéricos foram demonstrados em forma de série temporal, que é definido por uma sequência de observações de uma variável ao longo do tempo e pela forma de retrato de fase que é uma representação geométrica de todas as trajetórias de um sistema dinâmico no plano.

A Figura 2 e a Figura 3 mostram o comportamento estável do sistema na análise da excitação harmônica (ideal), onde os quesitos escolhidos foram parâmetros de massa e comprimento diferentes para cada haste como no trabalho de *Firmo* [3], e também, valores de massa e comprimento iguais no caso da Simulação 2, onde alguns parâmetros de amortecimento e frequência correspondem ao trabalho de *Danuta* [9]. A Simulação 1 mostra um comportamento dinâmico com tendência a um ciclo limite que se desenvolve quase que periodicamente com valores dos parâmetros da Tabela 1.

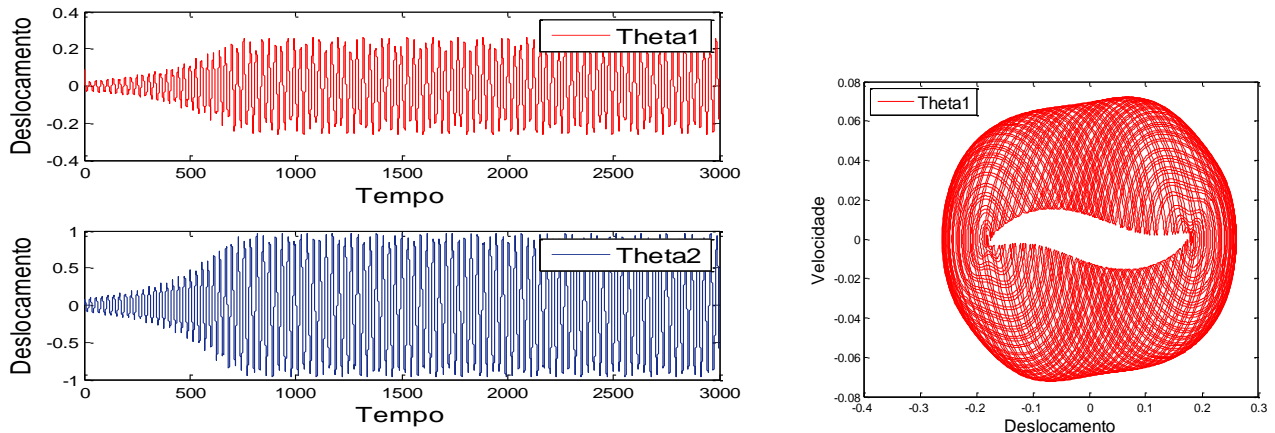


Figura 2 Resultados da Simulação 1

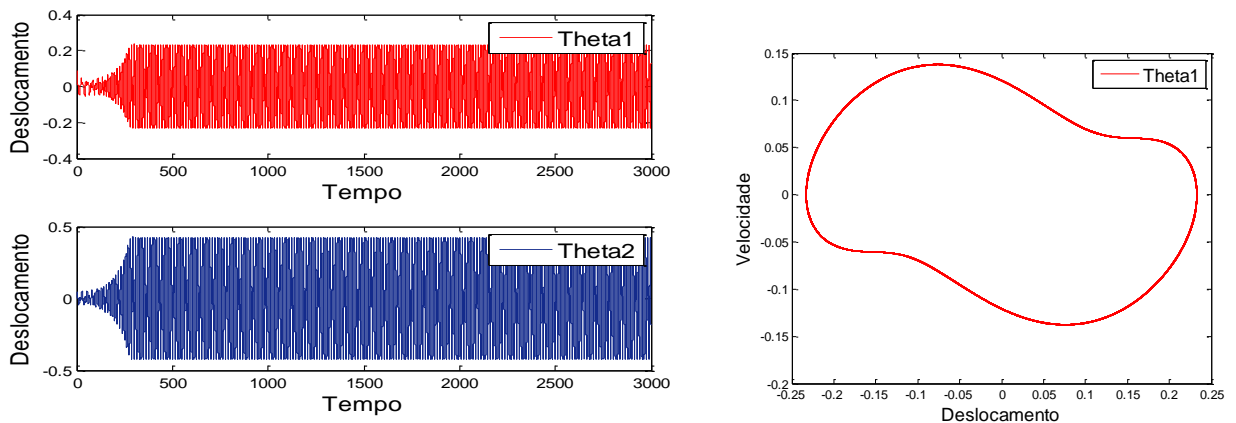


Figura 3 Resultados da Simulação 2



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

O caso da excitação não ideal proposto neste trabalho é uma ideia com o objetivo de analisar o desenvolvimento do protótipo e fazer uma comparação com a dinâmica do sistema excitado na base por uma excitação harmônica (ideal). Para analisar as simulações do caso não ideal, utilizou-se a excitação  $\ddot{X}_a = F_0 \cos(\omega t - a_0 \cos(b_0 \omega t))$  onde  $a_0 = 2.0$  e  $b_0 = 0.01$  são valores constantes.

Na Figura 4 foram usados os dados da Simulação 3 mostrado na Tabela 1, com força inicial de excitação diferente das simulações anteriores para analisar como se comportaria a fonte de excitação não ideal no sistema. As influencias de cada parâmetro demonstram um comportamento quase periódico, entretanto, o retrato de fase tem tendências instáveis nesse caso não ideal.

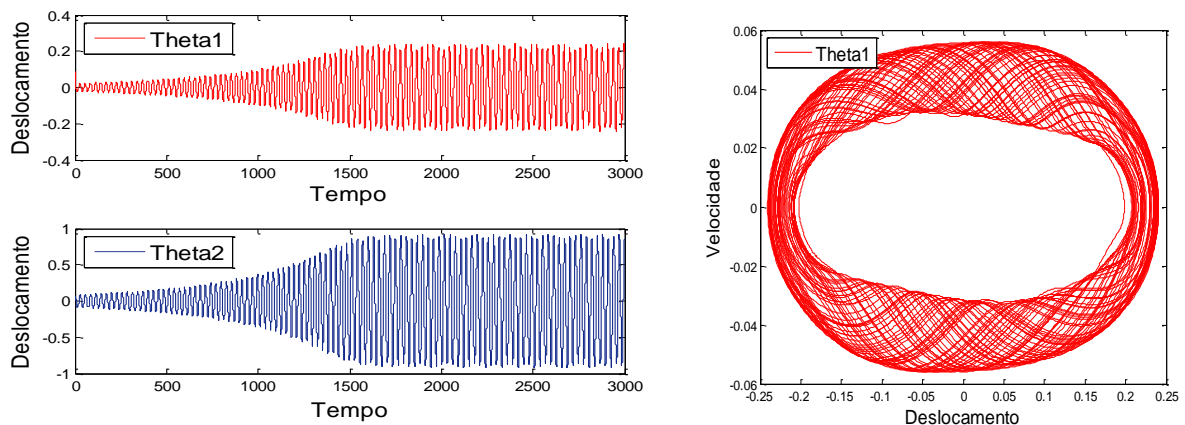


Figura 4 Resultados da Simulação 3

A Figura 5 têm analisa uma mudança de parâmetros na parte do amortecimento na excitação não ideal que revelou um resultado com tendências caóticas, onde sua trajetória e sua dinâmica são bem aleatórias.

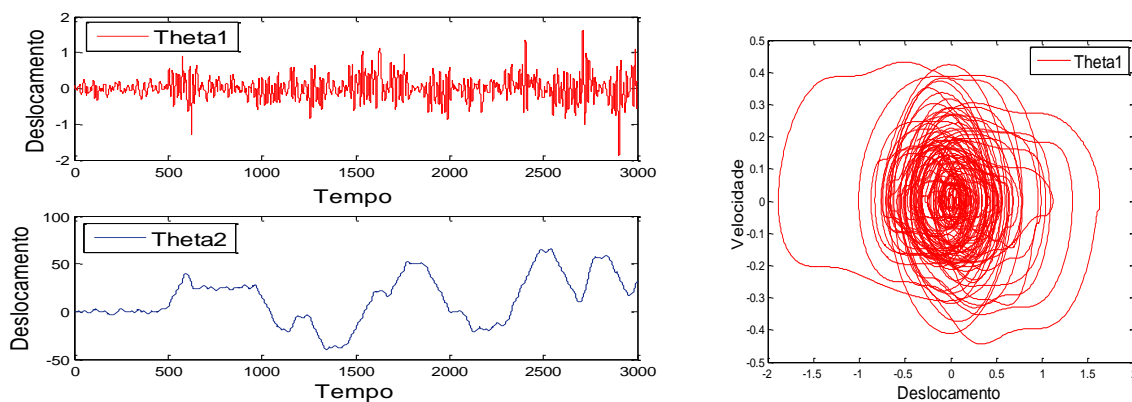


Figura 5 Resultados da Simulação 4



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

A seguir, a Figura 6 mostra a curva de ressonância de amplitudes versus a frequência adimensional de excitação usando os dados da Tabela 1 para a Simulação 1. Amplitudes são obtidas como os valores máximos de cada serie temporal no estado permanente na passagem de ressonância ( $\Omega \approx 0.4$ ). A frequência de excitação foi variando no intervalo  $0.1 \leq \Omega \leq 1.0$ .

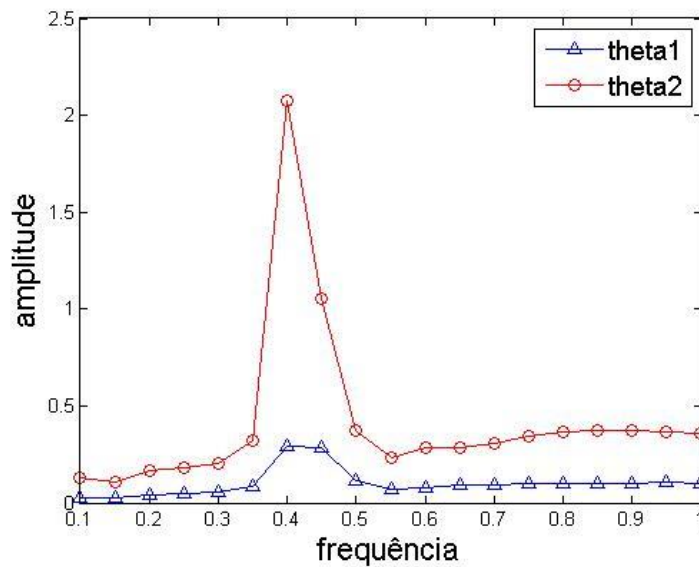


Figura 6 Curva de Ressonância para  $\theta_1$  e  $\theta_2$

### 3. CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentaram-se os resultados numéricos do desempenho dinâmico de um braço robótico modelado por um pêndulo duplo. Foram ensaiadas numericamente duas fontes de excitação na base do protótipo, a harmônica (ideal) e a não ideal. As influências no sistema de cada excitação foram comparadas e avaliadas a fim de obter resultados mais definidos, entretanto, notou-se a fragilidade do desempenho do sistema na diferença de dados utilizados nas variáveis. Foram utilizadas as ferramentas da dinâmica não linear nas simulações numéricas para descrever o comportamento dinâmico do pêndulo duplo.



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

## 4. REFERÊNCIAS

- [1] CARVALHO, TAÍSA F., MIKOLAICZIK, Wagner R., SALA, José A., PINHEIRO, Lincoln B. L. G., “Pêndulo Caótico” – I ECTEC IFF Campus Erechim, 2013.
- [2] CÉZAR, É. S., FELIX, J.L.P., “Controle de Um Oscilador Não ideal Modelado Com Mateiras Não Lineares e Inteligentes” Revista Jr. ICCEEg, 2013.
- [3] FIRMO, D. “Construção e Caracterização de um Pendulo Duplo Caótico”. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, 2007.
- [4] Halliday & Resnick. Fundamentos de Física: Gravitação, Ondas e Termodinâmica, 8ª Edição. Editora: LTC
- [5] JANKOWSKI K., “Dynamics of double pendulum with parametric vertical excitation”. Master’s Thesis, Technical University of Lodz, 2011.
- [6] J. L. P. FELIX, E. L. Silva, J. M. Balthazar, A. M. Tusset, A. M. Bueno, R. M. L. R. F. Brasil, “On nonlinear dynamics and controls of a chaotic robotic arm and their sensibility analyses” CSNDD, 2014.
- [7] LIANG, Y., Feeny, B.F.: Parametric identification of a chaotic base-excited double pendulum experiment. *Nonlinear Dyn.* 52, 181–197, 2008.
- [8] SADO D. and K. Gajos, “Note on chaos in three degree of freedom dynamical system with double pendulum”, *Meccanica* 38, 719–729, 2003.
- [9] SADO D., BALTHAZAR, J.M., FELIX, J.L.P., “On Chaotic Dynamics of a Double Pendulum Arm Excited by a Nonlinear Shaker based RLC Circuit” – DETC2013, Portland, OR,USA, August 4-7, 2013.
- [10] SHINBROT, T., Grebogi, C., Wisdom, J., e Yorke, J. A. “Chaos in a double pendulum”. *American Journal of Physics*, 60(6):491–499, 1991.
- [11] SIMONS, G. “Uma investigação sobre a aplicabilidade da teoria de sistemas não-ideais a fundações de máquinas reais” Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da USP, 2002.
- [12] XU X., PAVLOVSKAIA E., WIERCIGROCH M., ROMEO F., LENCI S., “Dynamic Interactions Between Parametric Pendulum and electro-dynamical shaker” – *ZAMM*, 87, nº2, pp. 172-186, 2007.

## Agradecimentos

Os autores agradecem a FAPERGS (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul) pelo auxílio financeiro e pela bolsa de iniciação científica.



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

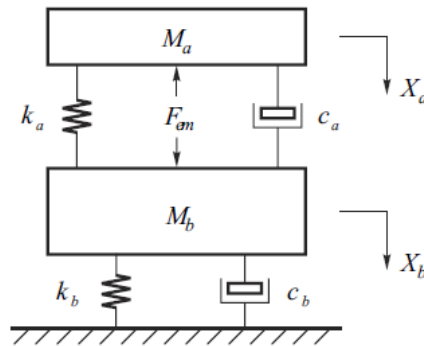
FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

# FoDAMI

## APÊNDICE A



(a)



(b)

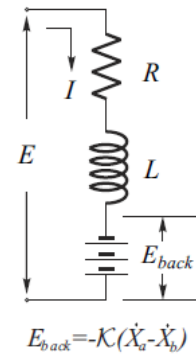


Figura A1 (a) Shaker Eletrodinâmico [12]; (b) esquema de esforços e sistema elétrico do shaker

As equações de movimento deste shaker são representadas por:

$$M_a \ddot{X}_a + c_a (\dot{X}_a - \dot{X}_b) + k_a (X_a - X_b) = M_a g - F_{em} \quad (6)$$

$$M_b \ddot{X}_b + c_b \dot{X}_b + c_a (\dot{X}_b - \dot{X}_a) + k_b X_b + k_a (X_b - X_a) = M_b g - F_{em} \quad (7)$$

$$L \dot{I} + RI + E_{back} = E(t) \quad (8)$$

$$E_{back} = -\kappa (\dot{X}_a - \dot{X}_b) \quad (9)$$

$$F_{em} = \kappa I \quad (10)$$