

MatLab: Una herramienta fundamental para La enseñanza de Análisis Matemático II.

Susana Teresa Imperatore

Facultad de Ingeniería.

Universidad Nacional de Lomas de Zamora.

Camino de Cintura km. 2. Llavallol. Buenos Aires. Argentina.

e-mail: susanaimperatore@speedy.com.ar

RESUMEN

MatLab recibe su nombre de **MAT**rix **LAB**oratory porque es un software orientado a la operatoria con matrices. Permite graficar funciones en 2D y en 3D y posibilita al usuario realizar cálculos complicados con números reales y con números complejos; además de crear sus propios programas. MATLAB permite el intercambio de datos con EXCEL y la resolución de problemas con SIMULINK, que es una herramienta para simular y modelar sistemas materiales del mundo real. Con MATLAB se puede controlar y supervisar máquinas y procesos de la vida diaria; por ende es una herramienta computacional indispensable para su aplicación en Ingeniería.

MatLab constituye un recurso fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de Análisis Matemático II, con un fuerte impacto en las materias del Ciclo Superior de la Carrera de Ingeniería Mecánica.

Los objetivos específicos de la aplicación de MatLab en el proceso de enseñanza-aprendizaje de Análisis Matemático II son lograr que el alumno utilizando el software especificado opere con funciones vectoriales, calcule límites y analice continuidad de una función, utilice derivadas parciales, derivada direccional y gradiente, resuelva problemas relacionados con extremos locales y restringidos; evalúe integrales múltiples en distintos sistemas de referencia y grafique curvas y superficies en 2D y en 3D.

Las clases son teórico-prácticas. Presentados los comandos necesarios, los alumnos resuelven ejercicios y problemas de aplicación en las computadoras en forma individual y/o grupal.

La evaluación consiste en la resolución de ejercicios y problemas de aplicación no estudiados con anterioridad usando MatLab, con la posibilidad de consultar material bibliográfico. El resultado de la misma condiciona la aprobación o no de Análisis Matemático II. Los resultados esperados son que se incremente el uso de MatLab y SIMULINK en las asignaturas de la carrera de Ingeniería Mecánica. La medición que cuantifique esta aplicación se realizará en la materia integradora de Proyecto de Máquinas.

Palabras Claves: MatLab – Análisis Matemático II – Aplicaciones.

1. INTRODUCCIÓN

La importancia de la aplicación de MatLab en el proceso de enseñanza-aprendizaje de Análisis Matemático II consiste en preparar al alumno para que utilizando el software especificado opere con funciones vectoriales, calcule límites y analice continuidad de una función, utilice derivadas parciales, derivada direccional y gradiente, resuelva problemas relacionados con extremos locales y restringidos; evalúe integrales múltiples en distintos sistemas de referencia y grafique curvas y superficies en 2D y en 3D.

Los objetivos específicos de la aplicación de MatLab en el proceso de enseñanza-aprendizaje de Análisis Matemático II son lograr que el alumno utilizando el software especificado opere con funciones vectoriales, calcule límites y analice continuidad de una función, utilice derivadas parciales, derivada direccional y gradiente, resuelva problemas relacionados con extremos locales y restringidos; evalúe integrales múltiples en distintos sistemas de referencia y grafique curvas y superficies en 2D y en 3D. Las clases son teórico-prácticas. Presentados los comandos necesarios, los alumnos resuelven ejercicios y problemas de aplicación en las computadoras en forma individual y/o grupal. Los resultados esperados son que se incremente el uso de MatLab y SIMULINK en las asignaturas de la carrera de Ingeniería Mecánica; por el rol fundamental que desempeña la modelización en esta rama de la Ingeniería, que estas herramientas computacionales propuestas permiten llevar a la práctica.

2. ENSEÑANDO ANÁLISIS MATEMÁTICO II CON MATLAB

Se puede utilizar MatLab para enseñar todos los contenidos de Análisis Matemático II. Para la fundamentación teórica ver [1,2].

2.1. Funciones Vectoriales

MatLab facilita el análisis de las funciones vectoriales.

2.1.1. Definiciones

- f es una función vectorial $\Leftrightarrow f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^n$
- f es un campo vectorial $\Leftrightarrow f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$
- f es un campo escalar $\Leftrightarrow f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$

2.1.2. Gráfico de funciones vectoriales

Si $n = 2$ la gráfica de una función vectorial es una curva en el plano.

Ejemplo: Graficar la función vectorial $f(t) = (3t-2; 5\sin(2t))$ para $t \in [0; 10]$.

`>> ezplot('3*t-2','5*sin(2*t)',[0,10])`

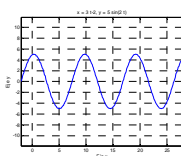


Figura 1 Curva en el plano.

Si $n = 3$ la gráfica de una función vectorial es una curva en el espacio.

Ejemplo: Graficar a función vectorial $f(t) = (3t-2; 5\sin(2t); -2t)$ para $t \in [0; 10]$.

```
>> ezplot3('3*t-2','5*sin(2*t),'-2*t',[0,10])
```

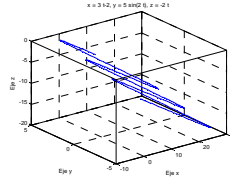


Figura 2 Curva en el espacio.

2.1.3. Límite de funciones vectoriales

Para que exista el límite de una función vectorial, deben existir los límites de todas las funciones coordenadas que la componen. Si una función coordenada no tiene límite, entonces el límite de la función vectorial no existe.

2.1.4. Límites laterales

Para calcular límites laterales se utilizan los comandos:

`limit(f,x,x0,'left')` Permite calcular el límite lateral por izquierda de la función f , para $x \rightarrow x_0$.

`limit(f,x,x0,'right')` Permite calcular el límite lateral por derecha de la función f , para $x \rightarrow x_0$.

2.1.5. Derivada de funciones vectoriales

Para que exista la derivada de una función vectorial, deben existir las derivadas de todas las funciones coordenadas que la componen. Si una función coordenada no tiene derivada, entonces la derivada de la función vectorial no existe.

2.1.6. Integración de funciones vectoriales

Para que exista la integral de una función vectorial, deben existir las integrales de todas las funciones coordenadas que la componen. Si una función coordenada no se puede integrar, entonces la integral de la función vectorial no existe.

2.1.7. Ejemplo de Aplicación

Dadas las fuerzas :

$$F_1(t) = (3t - 2, 4)$$

$$F_2(t) = (t + 4, -t)$$

$$F_3(t) = (-4t + 10, t - 4)$$

que actúan sobre un cuerpo de masa $m = 3$ sabiendo que $R(1) = (3, -1)$ y $v(1) = (5, -1)$:

- Dibujar las fuerzas en el punto $P = (3, -1)$.
 - Calcular $v(t)$.
 - Calcular $R(t)$.
 - Dibujar la trayectoria.
 - Indicar la orientación.
 - Dibujar el vector velocidad en el punto $P = (3, -1)$.
- Dibujar las fuerzas en el punto $P = (3, -1)$.

figure

```

hold on
t=3:0.01:4;
u=-1:0.04:3;
plot(t,u)
m=3:0.05:8;
n=-1:-0.01:-2;
plot(m,n)
c=3:0.06:9;
d=-1:-0.03:-4;
plot(c,d)
hold off

```

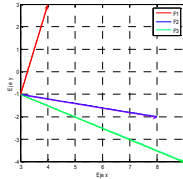


Figura 3 Dibujo de las Fuerzas,

b) Calcular $v(t)$.

$$\begin{aligned}
 F_1(t) &= (3t - 2, 4) \\
 F_2(t) &= (t + 4, -t) \\
 F_3(t) &= (-4t + 10, t - 4)
 \end{aligned}$$

```

>> syms t f1 f2 f3 c1 c2 c3 c4 v v1 r r1
>> f1=[3*t-2,4]
f1 =
[ 3*t-2,  4]
>> f2=[t+4,-t]
f2 =
[ t+4, -t]
>> f3=[-4*t+10,t-4]
f3 =
[-4*t+10,  t-4]
>> f=f1+f2+f3
f =
[ 12, 0]

```

$$\therefore F = \sum_{i=1}^3 F_i = (12; 0)$$

$$\therefore a = \frac{F}{m} = \frac{(12; 0)}{3} = (4; 0)$$

```

>> a=f/3
a =
[ 4, 0]
>> int(a,t)
ans =
[ 4*t,  0]
>> [c1,c2]=solve('4*1+c3=5','0+c4=-1')
c1 =
1
c2 =
-1

```

$$\therefore v(t) = (4t + 1; -1)$$

c) Calcular $R(t)$.

```

>> v=[4*t+1,-1]
v =

```

```
[ 4*t+1, -1]
>> int(v,t)
ans =
[ 2*t^2+t, -t]
>> [c3,c4]=solve('2*t^2+1+c3=3','-1+c4=-1')
c3 =
0
c4 =
0
```

$$\therefore R(t) = (2t^2 + t; -t)$$

d) Dibujar la trayectoria.

```
>> syms x y t
>> x=2*t^2+t
x =
2*t^2+t
>> y=-t
y =
-t
>> [t]=solve('y=-t','t')
t =
-y
>> subs(x,t)
ans =
2*y^2-y
```

$$\therefore x = 2y^2 - y$$

Para graficar la trayectoria, usamos el comando ezplot.

```
>> ezplot('2*t^2+t','-t',[0,3])
```

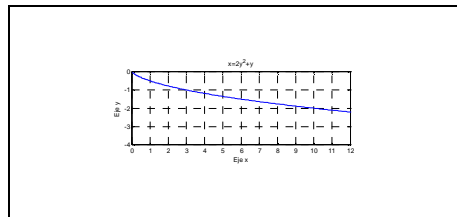


Figura 4 Gráfico de la Trayectoria.

e) Indicar la orientación.

```
>> syms x y t
>> x=2*t^2+t
x =
2*t^2+t
>> y=-t
y =
-t
>> f=[x,y]
f =
[ 2*t^2+t, -t]
>> t=0
t =
0
>> subs(f,t)
ans =
0 0
>> t=1
t =
1
>> subs(f,t)
```

ans =
3 -1

La orientación de la curva es desde el punto (0 ; 0) hacia el punto (3 ; -1).

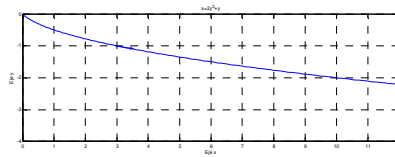


Figura 5 Orientación de la Curva.

f) Dibujar el vector velocidad en el punto P = (3 , - 1) .

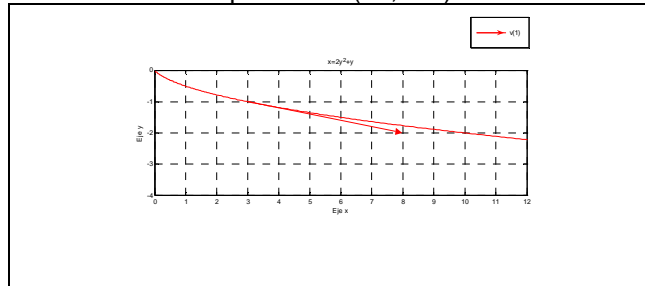


Figura 6 Gráfico del Vector Velocidad.

2.2. Integrales Múltiples

MatLab permite evaluar integrales y posibilita a los alumnos la autoevaluación de su trabajo. (Ver [3]).

2.2.1. Integrales Indefinidas

int(f) Devuelve la integral indefinida o primitiva o antiderivada de f.
int(f,x) Devuelve la integral indefinida o primitiva o antiderivada de f, indicando que la variable de integración es x.

Observaciones:

- 1) MatLab no muestra la constante de integración.
- 2) Para MatLab log(y) representa ln(y) y exp(x) significa e^x .
- 3) En MatLab para integrar se deben definir las constantes y variables como simbólicas, utilizando el comando syms.
- 4) Cuando la integral no tiene primitiva, MatLab responde con el comando **erf** que significa error de función.

Ejemplo:

```

∫ x^n dx
>> syms x n
>> int(x^n,x)
ans =
x^(n+1)/(n+1)

```

2.2.2. Integrales Definidas

int(f,a,b) Devuelve la integral definida de f en el intervalo [a, b].
int(f,x,a,b) Devuelve la integral definida de f en el intervalo [a, b], indicando que la variable de integración es x.

Ejemplo:

```

∫_0^1 ln(x).√x dx
>> syms x
>> int(log(x)*sqrt(x),x,0,1)

```

ans =
-4/9

2.2.3. Integrales Impropias

Para calcular la integral impropia:

$$\int_0^{\infty} e^{-a \cdot x^2} dx ; a > 0$$

```
>> syms x
>> syms a positive
>> int(f,x,0,inf)
ans =
1/2/a^(1/2)*pi^(1/2)
```

2.2.4. Integrales Dobles en Coordenadas Cartesianas

$$\int_a^b \int_c^d z \, dy \, dx \quad \text{o bien} \quad \int_c^d \int_a^b z \, dx \, dy$$

Se puede utilizar el comando solve para calcular los límites de integración.

Ejemplo: Calcular el volumen bajo la superficie $3x+4y+6z-24=0$ en el primer octante, utilizando integrales dobles en coordenadas cartesianas.

a) Como Tipo I

$$\int_0^8 \int_0^{-\frac{3}{4}x+6} (4 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y) \, dy \, dx$$

```
>> syms x y z
>> z=solve('3*x+4*y+6*z-24=0','z')
z =
-1/2*x-2/3*y+4
>> c=0
c =
0
>> d=solve('-1/2*x-2/3*y+4=0','y')
d =
-3/4*x+6
>> a=0
a =
0
>> b=solve('-3/4*x+6=0','x')
b =
8
>> int(int(z,y,c,d),x,a,b)
ans =
32
```

b) Como Tipo II

$$\int_0^6 \int_0^{-\frac{4}{3}y+8} (4 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y) \, dx \, dy$$

```
>> syms x y z
>> z=solve('3*x+4*y+6*z-24=0','z')
z =
-1/2*x-2/3*y+4
>> a=0
a =
0
>> b=solve('-1/2*x-2/3*y+4=0','x')
b =
```

```

-4/3*y+8
>> c=0
c =
    0
>> d=solve('-4/3*y+8','y')
d =
    6
>> int(int(z,x,a,b),y,c,d)
ans =
    32

```

2.2.5. Integrales Dobles en Coordenadas Polares

$$\int_a^b \int_c^d z \cdot r \, dr \, dt \quad \text{o bien} \quad \int_c^d \int_a^b z \cdot r \, dt \, dr$$

2.2.6. Integrales Triples en Coordenadas Cartesianas

2.2.6.1. Proyectando sobre el plano (x,y)

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f w \, dz \, dy \, dx \quad \text{o bien} \quad \int_c^d \int_a^b \int_e^f w \, dz \, dx \, dy$$

Se puede utilizar el comando solve para calcular los límites de integración.

2.2.6.2. Proyectando sobre el plano (x,z)

$$\int_a^b \int_e^f \int_c^d w \, dy \, dz \, dx \quad \text{o bien} \quad \int_e^f \int_a^b \int_c^d w \, dy \, dx \, dz$$

Se puede utilizar el comando solve para calcular los límites de integración.

2.2.6.3. Proyectando sobre el plano (y,z)

$$\int_c^d \int_e^f \int_a^b w \, dx \, dz \, dy \quad \text{o bien} \quad \int_e^f \int_c^d \int_a^b w \, dx \, dy \, dz$$

Se puede utilizar el comando solve para calcular los límites de integración.

2.2.7. Integrales Triples en Coordenadas Cilíndricas

2.2.7.1. Proyectando sobre el plano (x,y)

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f w \cdot r \, dz \, dr \, dt \quad \text{o bien} \quad \int_c^d \int_a^b \int_e^f w \cdot r \, dz \, dt \, dr$$

2.2.7.2. Proyectando sobre el plano (x,z)

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f w \cdot r \, dy \, dr \, dt \quad \text{o bien} \quad \int_c^d \int_a^b \int_e^f w \cdot r \, dy \, dt \, dr$$

2.2.7.3. Proyectando sobre el plano (y,z)

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f w \cdot r \, dx \, dr \, dt \quad \text{o bien} \quad \int_c^d \int_a^b \int_e^f w \cdot r \, dx \, dt \, dr$$

2.3. Gráficos

MatLab permite graficar en 2D y en 3D y permite cambiar sus propiedades. (Ver [4]).

2.3.1. Gráficos de funciones definidas por fórmulas en 2D

Para graficar curvas planas en coordenadas cartesianas, definidas por una fórmula matemática $y = f(x)$, se utiliza el comando:

ezplot(f) Dibuja la función $y = f(x)$ para x en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

ezplot(f, [a, b]) Dibuja la función $y = f(x)$ para x en el intervalo $[a, b]$.

Con los mismos comandos se pueden graficar funciones implícitas de la forma: $f(x, y) = 0$

Para graficar curvas planas en forma paramétrica, definidas por las ecuaciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$, se utiliza el comando:

ezplot(x,y) Dibuja la curva de ecuaciones paramétricas $x=x(t)$, $y=y(t)$ para t en el intervalo $[0, 2\pi]$.

ezplot(x,y, [a, b]) Dibuja la curva de ecuaciones paramétricas $x=x(t)$, $y=y(t)$ para t en el intervalo $[a, b]$.

Para graficar curvas planas en coordenadas polares de la forma $\rho = f(t)$, se utiliza el comando:

ezpolar(f) Dibuja la curva de ecuación $\rho = f(t)$ en coordenadas polares para t en el intervalo $[0, 2\pi]$.

ezpolar(f, [a, b]) Dibuja la curva de ecuación $\rho = f(t)$ en coordenadas polares para t en el intervalo $[a, b]$.

Otra forma de graficar curvas planas en coordenadas polares de la forma $\rho = f(t)$, utiliza el comando:

polar(t,r) Grafica en coordenadas polares, dibujando la grilla correspondiente.

2.3.2. Gráficos de funciones definidas por fórmulas en 3D

Ejemplos:

```
1)
[X,Y] = meshgrid(-3:.125:3);
Z = peaks(X,Y);
surf(X,Y,Z);
axis([-3 3 -3 3 -10 5])
```

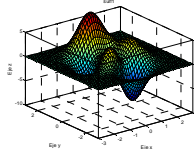


Figura 7 Gráfico de una superficie.

```
2)
[X,Y] = meshgrid(-3:.125:3);
Z = peaks(X,Y);
surf1(X,Y,Z);
colormap copper;
axis([-3 3 -3 3 -10 5])
```

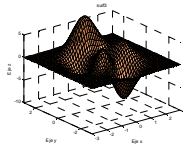


Figura 8. Gráfico de una superficie usando colormap.

Con MatLab se pueden realizar gráficos en escalas semilogarítmicas y en escalas logarítmicas.

2.3.3. Otros tipos de gráficos con MatLab

Gráfico circular o de brújula: Permite graficar números complejos.

Ejemplo: Representar en el mismo gráfico los números complejos: $z_1 = 3+4i$; $z_2 = -6+8i$;

$z_3 = -9 -12i$; $z_4 = 5 - 5i$

$z = [3+4i , -6+8i , -9-12i , 5-5i]$;

`compass(z)`

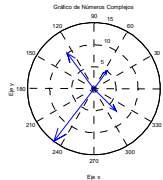


Figura 9 Gráfico de números complejos.

Gráfico de torta:

`pie` Grafica en 2D.

`pie3` Grafica en 3D.

Ejemplo: Dado el vector $A = [3, 1.1, 3.8, 0.8, 1.3]$ hacer un gráfico de torta en 2D.

$A = [3, 1.1, 3.8, 0.8, 1.3]$

`pie(A)`

`colormap cool`

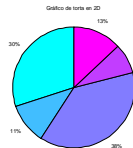


Figura 10 Gráfico de torta.

3. RESULTADOS

La evaluación consiste en la resolución de ejercicios y problemas de aplicación no estudiados con anterioridad usando MatLab, con la posibilidad de consultar material bibliográfico. El resultado de la misma condiciona la aprobación o no de Análisis Matemático II. Los resultados esperados son que se incremente el uso de MatLab y SIMULINK en las asignaturas de la carrera de Ingeniería Mecánica.

4. CONCLUSIONES

El presente documento es una breve síntesis del trabajo realizado en la Cátedra de Análisis Matemático II para estimular al alumno en el uso de MatLab, de fundamental importancia para su formación y posterior desarrollo profesional, en particular en el Área de Ingeniería Mecánica. La medición que cuantifique la aplicación de MatLab y el uso del Simulink se realizará en la materia integradora de Proyecto de Máquinas.

5. REFERENCIAS

- [1] L. Leithold, *El Cálculo*, Oxford University Press, México, 2006, Cap. 9 a 14.
- [2] E. W. Swokowski, *Cálculo con Geometría Analítica*, Iberoamérica, México, 1989, Cap. 13 a 18.
- [3] Samira Abdel Masih, *Análisis Matemático II aplicado a Mathematica*, U.N.L.Z., Buenos Aires, 1998.
- [4] A.M. Mariani, *Curso Introductorio sobre Matlab y Simulink*. U.N.L.Z., Buenos Aires, 2007.