



FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

I CAIM 2008
Primer Congreso Argentino
de Ingeniería Mecánica
Octubre 2008

APLICACIONES DEL MATEMATICA A ECUACIONES DIFERENCIALES, SERIES Y TRANSFORMADA DE LAPLACE

Samira Abdel Masih

Facultad de Ingeniería.

Universidad Nacional de Lomas de Zamora.

Camino de Cintura km 2. Llavallol. Buenos Aires. Argentina.

e-mail: lutfi@speedy.com.ar

RESUMEN

Las ecuaciones diferenciales proveen poderosos métodos para modelar procesos físicos derivados de la Ingeniería.

Sin embargo, aun cuando sea posible demostrar la existencia de una solución de la ecuación diferencial, suele suceder que no se la pueda exhibir en forma explícita o implícita.

En la mayoría de los casos las soluciones numéricas “con lápiz y papel” se tornan sumamente tediosas y puede conducir a que el alumno pierda la motivación en la resolución del problema y en la interpretación de los resultados.

El uso de un software computacional es una poderosa herramienta que permite verificar las relaciones entre la Matemática y las conclusiones de la vida real, conectando la teoría con modelos y los fenómenos que ellos describen.

El software Mathematica constituye, por su potencia y sencillez de su manejo, un recurso fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de estos temas.

El presente trabajo muestra las herramientas necesarias para resolver con el Mathematica ecuaciones diferenciales ordinarias, calcular transformadas de Laplace, series numéricas, de Potencias y de Fourier. También se exponen ejemplos de aplicación que servirán de guía al alumno para afrontar situaciones problemáticas que eventualmente le puedan surgir en su vida profesional.

El uso de esta herramienta informática como recurso para el diseño de modelos matemáticos se viene implementando en la asignatura de Análisis Matemático III con resultados altamente satisfactorios.

Palabras Claves: Ecuaciones - Diferenciales – Mathematica – Laplace – Series.

1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales, las series y las transformadas de Laplace constituyen una poderosa herramienta para modelar procesos físicos derivados de la Ingeniería. Presentar y desarrollar estos temas como meros conceptos matemáticos puede conducir al alumno a la pérdida de interés en el aprendizaje de los mismos. El presente trabajo utiliza el software Mathematica como recurso fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de estos temas, a partir de ejemplos de aplicación que servirán al estudiante como metodología para resolver situaciones problemáticas similares.

2. SERIES NUMÉRICAS Y DE POTENCIAS

La importancia de las series en el cálculo surge de la idea de Newton de representar las funciones como polinomios con infinitos términos, pues de esta manera resulta más fácil derivarlas e integrarlas. Además, muchas de las funciones que surgen de la física matemática, como las funciones de Bessel (véase [1-4]), se definen utilizando este concepto. Resulta entonces importante familiarizarse con las nociones básicas de convergencia de series.

2.1 Los números periódicos pensados como series.

Existen situaciones en las que implícitamente utilizamos series numéricas. Por ejemplo, si d_n denota el n -ésimo dígito en la representación decimal de un número, entonces

$$0.d_1 d_2 d_3 d_4 \dots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \dots + \frac{d_n}{10^n} + \dots$$

Demostrar, empleando series, que el número periódico $0.\bar{3} = \frac{1}{3}$

Resolución

Se sabe que $0.\bar{3} = 0.333333\dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$

Si calculamos en Mathematica esta serie, se obtiene $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{1}{3}$ que era lo que queríamos

probar. ¿Cuál es la expresión fraccionaria de 21.4989898...?

2.2 Una paradoja de Zenón.

En el siglo V a.C. el filósofo griego Zenón de Elea propuso cuatro problemas, conocidos en la actualidad como las Paradojas de Zenón. Una de ellas es la siguiente:

“Un hombre se encuentra parado a una distancia “d” de un árbol (véase figura 1). Para llegar a él, primero avanza la mitad de la distancia, luego la mitad de la distancia restante y, a continuación, la mitad de la que queda todavía. Siempre se puede continuar este proceso, con lo cual el hombre nunca podrá llegar al árbol.” Demostrar que la conclusión de Zenón no es válida.

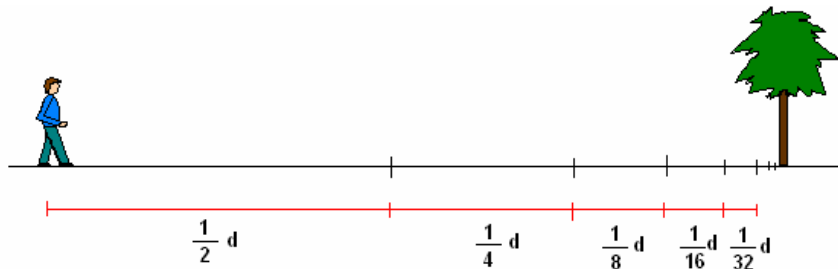


Figura 1: Distancia recorrida por un hombre, en la paradoja de Zenón.

Resolución

Las paradojas de Zenón pertenecen a la categoría de “falsídicas”, es decir, que no sólo llegan a un resultado que aparenta ser falso, sino que además lo es. Esto se debe a la falta de conocimiento, en la época en que fueron formuladas, de que la suma de un número infinito de términos puede resultar finita. Obviamente el hombre llega al árbol y para probarlo, supondremos que ambos objetos son puntuales. Esto sugiere expresar la distancia total recorrida como la suma de una infinidad de distancias más pequeñas, como sigue:

$$\frac{1}{2}d + \frac{1}{4}d + \frac{1}{8}d + \frac{1}{16}d + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{2^n}$$

Si calculamos esta serie geométrica en Mathematica, resulta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{2^n} = d$. Luego, el hombre recorrerá una distancia “d” y llegará finalmente al árbol.

2.3 Análisis de la convergencia de una serie de potencias.

La búsqueda del intervalo de convergencia de una serie de potencias puede efectuarse sin la necesidad de recurrir a los Criterios de Convergencia para series numéricas. Como ejemplo,

hallaremos el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{\sqrt{n+4}}$.

Resolución

Primer Paso: Calculamos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, donde $a_n = \left| \frac{(-1)^n (x-2)^n}{\sqrt{n+4}} \right|$. Escribimos los comandos:

$$a[n_] = \frac{(-1)^n (x-2)^n}{\sqrt{n+4}} ; \text{Limit} [\text{Abs} \left[\frac{a[n+1]}{a[n]} \right], n \rightarrow \infty]$$

Luego de ejecutarlos, aparecerá en pantalla el resultado $| - 2 + x |$.

Segundo Paso: Resolvemos la inequación $| - 2 + x | < 1$. Para ello se ejecuta la instrucción:

$$\text{InequalitySolve} [\text{Abs} [- 2 + x] < 1 , x]$$

Se obtiene por resultado $1 < x < 3$. Esto significa que 1 y 3 son los extremos del intervalo de convergencia.

Tercer Paso: Analizamos la convergencia en los extremos del intervalo.

Análisis para x = 1. En la expresión de la serie de potencias, se reemplaza x por 1 y se estudia la convergencia de la serie numérica resultante:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-2)^n}{\sqrt{n+4}}$. Una vez ejecutado este comando, aparecerá en pantalla un mensaje informando que la serie diverge para $x = 1$.

Análisis para $x = 3$. En este caso se reemplaza x por 3 en la expresión de la serie de potencias:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3-2)^n}{\sqrt{n+4}}$; el resultado obtenido es $\frac{-6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 12 \text{Zeta}[1/2] - 6\sqrt{2} \text{Zeta}[1/2]}{6\sqrt{2}}$.

Luego, la serie converge y su valor figura en términos de la función compleja Zeta. Para obtener el valor aproximado de esta serie, se escribe $N \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3-2)^n}{\sqrt{n+4}} \right]$. El resultado que arroja Mathematica es - 0.234655. Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $(1, 3]$.

3. MODELADO Y RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

En esta sección nos concentraremos en la construcción de un modelo matemático que conduzca a la resolución de una ecuación diferencial. Como se sabe (véase [1,7]), para diseñar cualquier modelo es preciso basarse en alguna Ley o Principio. En el siguiente ejemplo se aplicará la Segunda Ley de Newton para hallar la posición y velocidad de un objeto puntual en movimiento.

3.1 Descenso de un paracaidista

Cuando un cuerpo - como el de un paracaidista - se mueve a gran rapidez en el aire, la fuerza de rozamiento del mismo se describe mejor expresándola como $\vec{F}_r = -k |\vec{v}(t)| \vec{v}(t)$ donde $\vec{v}(t)$ es la velocidad del cuerpo en el instante "t" y k es la constante de proporcionalidad.

- Formular una ecuación diferencial que permita hallar la posición de un paracaidista de masa $m = 72$ kg. si es lanzado desde un avión que vuela horizontalmente a 2000 m. de altura y a una velocidad de 50 m/seg. Suponer que abre el paracaídas en el momento que cae del avión.
- Representar gráficamente la trayectoria que sigue el paracaidista.
- Estimar el instante en que llega al piso.
- Graficar el módulo de la velocidad del paracaidista, desde que cae del avión hasta que llega al piso. ¿Con qué velocidad llega a tierra?
- Si no abre el paracaídas, ¿con qué velocidad llegará al piso?

Resolución:

a) En virtud de que el paracaidista puede ser considerado un cuerpo puntual, nos valdremos de la Segunda Ley de Newton para determinar su posición.

Primer Paso: Fijamos un sistema de coordenadas de manera tal que el eje "x" coincida con el piso y el eje "y" pase por el punto desde donde cae el paracaidista (véase figura 2).

Si definimos :

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) =$ función posición del paracaidista en el instante t.

$\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t)) =$ velocidad del paracaidista en el instante t.

$\vec{a}(t) = (x''(t), y''(t)) =$ aceleración del paracaidista.

entonces se tiene : $\vec{r}(0) = (x(0), y(0)) = (0, 2000)$; $\vec{v}(0) = (x'(0), y'(0)) = (50, 0)$.

Segundo Paso: Diseñamos el “diagrama de cuerpo libre”. En este caso, las fuerzas que actúan son :

$\vec{F}_r =$ fuerza de rozamiento del aire = $-k |\vec{v}(t)| \vec{v}(t)$

$\vec{P} =$ peso del paracaidista = $(0, -mg)$

donde $g =$ aceleración de la gravedad = 9.8 m/seg^2 , $m =$ masa del paracaidista.

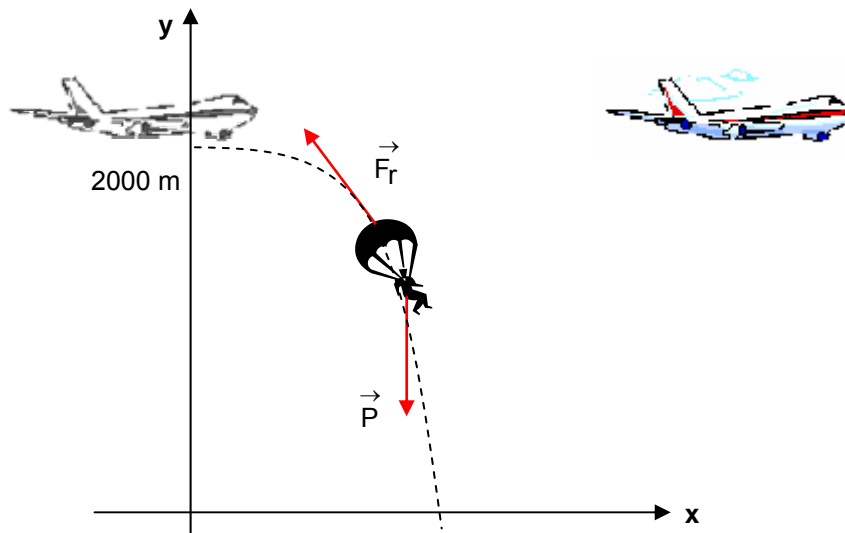


Figura 2: Diagrama de cuerpo libre del paracaidista.

Tercer Paso: Aplicamos la Segunda Ley de Newton, es decir, $\sum_i \vec{F}_i(t) = m \vec{a}(t)$

Por lo tanto, $\vec{P} + \vec{F}_r = m \vec{a}(t) \Rightarrow (0, -mg) - k |\vec{v}(t)| \vec{v}(t) = m (x''(t), y''(t))$

Entonces, $(0, -mg) - k \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} (x'(t), y'(t)) = m (x''(t), y''(t))$

Al igualar las respectivas componentes de estos vectores, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} m x''(t) = -k \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} x'(t) \\ m y''(t) = -mg - k \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} y'(t) \end{cases} \quad (1)$$

con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} x(0) = 0 & , x'(0) = 50 \\ y(0) = 2000 & , y'(0) = 0 \end{cases}$$

Cuarto Paso: Empleamos el Mathematica (véase [6-7]) para resolver el sistema de ecuaciones (1). Previamente calcularemos la constante de rozamiento k :

Se sabe que $k = \rho A \delta / 2$ donde $\rho =$ densidad del aire = 1.29 kg/m^3 , $A =$ Área transversal del paracaídas = 10 m^2 , $\delta =$ Coeficiente de arrastre, que depende de la forma del objeto. Para un paracaídas se considera $\delta = 0.8$. Por lo tanto, escribimos los siguientes comandos:

$m = 72$; $g = 9.8$; $\rho = 1.29$; $\delta = 0.8$; $A = 10$; $k = \rho A \delta / 2$;

$\text{DSolve}[\{m x''(t) = -k \sqrt{x'[t]^2 + y'[t]^2} x'[t], m y''(t) = -m g - k \sqrt{x'[t]^2 + y'[t]^2} y'[t],$

$x[0] = 0, x'[0] = 50, y[0] = 2000, y'[0] = 0, \{x[t], y[t]\}, t]$

Luego de ejecutarlos, Mathematica devolverá un mensaje indicando que no puede hallar la solución exacta de la ecuación diferencial. Intentamos entonces resolverla con el comando `NDSolve`, buscando una solución aproximada en el intervalo de tiempo $[0, 50]$:

$\text{Solu} = \text{NDSolve}[\{m x''(t) = -k \sqrt{x'[t]^2 + y'[t]^2} x'[t], m y''(t) = -m g - k \sqrt{x'[t]^2 + y'[t]^2} y'[t],$

$x[0] = 0, x'[0] = 50, y[0] = 2000, y'[0] = 0, \{x, y\}, \{t, 0, 50\}]$

Aparecerá en pantalla:

`{{x -> InterpolatingFunction[{0., 50.}], <>}, {y -> InterpolatingFunction[{0., 50.}], <>}}`

Esto significa que el comando `NDSolve` aproximó las soluciones $x(t)$ e $y(t)$ mediante dos funciones de interpolación, llamadas `InterpolatingFunction`, las cuales quedan definidas mediante una tabla de valores comprendidos entre $t = 0$ y $t = 50$.

b) Se sabe que la trayectoria es la imagen de la función posición $r(t) = (x(t), y(t))$. Para dibujarla, utilizaremos el comando :

`ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. Solu], {t, 0, 50}, AxesLabel->{"x(m)", "y(m)"}]`

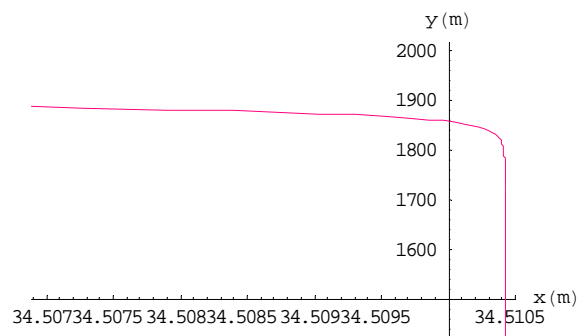


Figura 3: Trayectoria que sigue el paracaidista.

Como se observa en la figura 3, el paracaidista llega a tierra aproximadamente a 34.51 m desde donde cayó.

c) Buscaremos el valor de "t" para el cual $y(t) = 0$. Como no se conoce la fórmula explícita de $y(t)$, estaremos el instante en que llega al piso graficando la función altura:

`Plot[Evaluate[y[t] /. Solu], {t, 0, 50}, AxesLabel->{"t(seg)", "y(m)"}]`

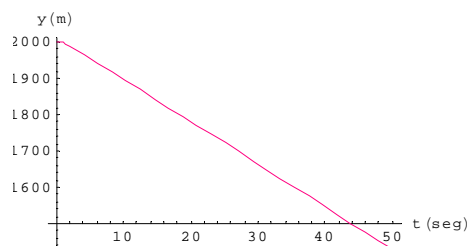


Figura 4: Función altura del paracaidista.

En la figura 4 se puede comprobar que el paracaidista llega a tierra 44 seg. después de haber caído del avión.

d) La gráfica del módulo del vector velocidad se obtiene ejecutando los comandos:

Plot [Evaluate[$\sqrt{x'[t]^2 + y'[t]^2}$ /. Solu] , {t, 0 , 1} , AxesLabel -> { " t", "v(t)" }] ;

Plot [Evaluate[$\sqrt{x'[t]^2 + y'[t]^2}$ /. Solu] , {t, 1 , 44} , AxesLabel -> { " t", "v(t)" }] ;

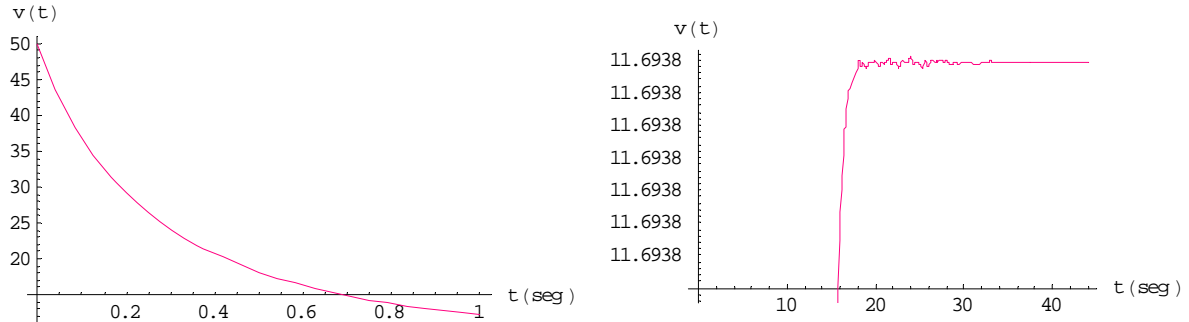


Figura 5: Velocidad del paracaidista. Izquierda: en el intervalo [0, 1]. Derecha: en el intervalo [1, 44].

La figura 5 nos informa que la velocidad del paracaidista tiende a un valor constante aproximadamente igual a 11.6938 m/seg.

e) Para responder a esta pregunta sólo habrá que reemplazar el área del paracaídas por el área transversal de la persona, es decir, considerar el valor de $A = 0.6 \text{ m}^2$ y ejecutar nuevamente los comandos mencionados en los incisos anteriores. La gráfica del módulo del vector velocidad se muestra en la figura 6.

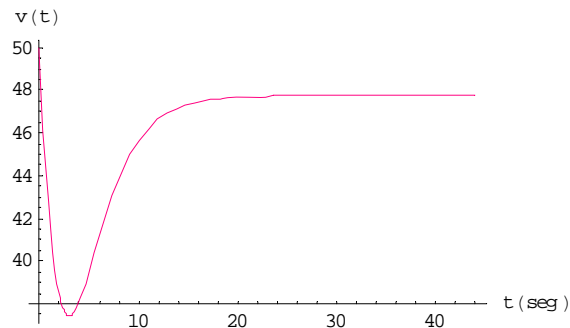


Figura 6: Velocidad de caída, sin abrir el paracaídas.

Se observa que el paracaidista llega al piso a una rapidez aproximada de 47 m/seg. Podemos concluir entonces que cuando un cuerpo cae bajo la acción de la resistencia del aire su velocidad no aumenta indefinidamente, sino que se aproxima a una velocidad límite finita. Este hecho ayuda a explicar la supervivencia de algunas personas que han caído sin paracaídas desde aeroplanos que volaban a gran altura.

3.1.1 Observación

El uso del Mathematica como herramienta de simulación permite visualizar diferentes situaciones modificando simplemente el valor de los parámetros que intervienen en el modelo matemático.

4. SERIES DE FOURIER

Las series de Fourier surgieron con el fin de representar una función periódica como una suma infinita de “senos” y “cosenos” (véase [2,3,5]). Este tipo de desarrollo permite modelar matemáticamente ciertos fenómenos físicos, como el sonido emitido por los instrumentos de cuerda o las señales transmitidas por un canal de comunicación. En esta sección mostraremos cómo calcular los términos de una serie de Fourier y visualizaremos su convergencia.

4.1 Cálculo y gráfica de una serie de Fourier.

Dada la función periódica $f(x) = \begin{cases} -(-x-2)^2 & -3 < x < 0 \\ (x-2)^2 & 0 \leq x < 3 \end{cases}$, $f(x+6) = f(x)$

- Graficar f en el intervalo $[-9, 9]$
- Hallar los coeficientes de la Serie de Fourier asociada a f .
- Representar gráficamente la suma de los 10 y 100 primeros términos de la Serie de Fourier.

Resolución

a) Ejecutamos los comandos

$f[x_] = \text{Which}[-3 < x - 6 \text{ Round}[\frac{x}{6}] < 0, -(-x - 6 \text{ Round}[\frac{x}{6}] - 2)^2, 0 \leq x - 6 \text{ Round}[\frac{x}{6}] < 3, ((x - 6 \text{ Round}[\frac{x}{6}] - 2)^2]; \text{Plot}[f[x], \{x, -9, 9\}]$

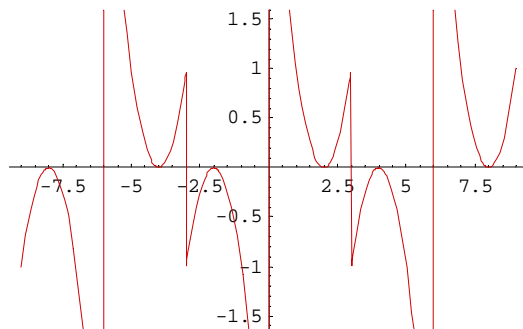


Figura 7: Gráfica de f en el intervalo $[-9, 9]$.

b) La serie de Fourier asociada a f es $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \text{Cos}\left[\frac{2n\pi x}{b-a}\right] + b_n \text{Sen}\left[\frac{2n\pi x}{b-a}\right] \right]$

donde $a = -3$, $b = 3$, $a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \text{Cos}\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) dx$, $b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \text{Sen}\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) dx$

Calcularemos sólo los coeficientes b_n pues, como f es impar, $a_n = 0 \forall n = 0, 1, \dots$

Ejecutamos entonces los comandos:

$A = -3; B = 3; b[n_] = \frac{2}{B-A} \left(\int_A^0 (-x-2)^2 \text{Sin}\left[\frac{2n\pi x}{B-A}\right] dx + \int_0^B (x-2)^2 \text{Sin}\left[\frac{2n\pi x}{B-A}\right] dx \right);$

c) Definimos las funciones g y h considerando, respectivamente, los 5 y 20 primeros términos de la serie de Fourier. Luego se escriben los comandos para graficar ambas funciones:

$$g[x_] = \sum_{n=1}^5 b[n] \sin\left[\frac{2n\pi x}{B-A}\right]; h[x_] = \sum_{n=1}^{20} b[n] \sin\left[\frac{2n\pi x}{B-A}\right]; \text{Plot}[\{g[x], h[x]\}, \{x, -9, 9\}]$$

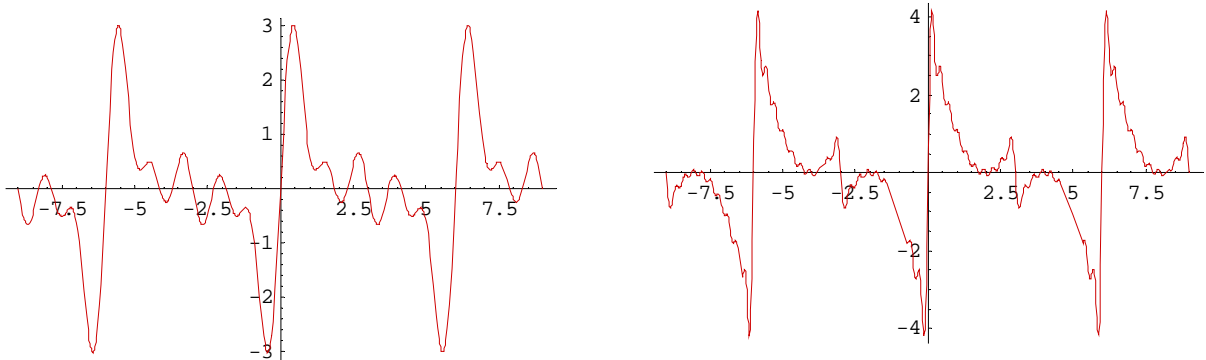


Figura 8: Izquierda: gráfica de g. Derecha: gráfica de h.

En la figura 8 se observa que, a medida que se agregan más términos a la suma parcial de la serie, su gráfica se parece cada vez más a la gráfica de f. Este resultado corrobora la convergencia de la serie de Fourier a la función f.

5. TRANSFORMADAS DE LAPLACE

La transformada de Laplace es una herramienta útil para resolver una amplia gama de ecuaciones diferenciales e integrodiferenciales (véase [4]). En este apartado veremos cómo aplicar el método de Laplace para hallar la intensidad de corriente de un circuito eléctrico.

5.1 Modelado de un circuito eléctrico.

Considere el circuito que se muestra en la figura 9, formado por una inductancia $L = 1 \text{ H}$, un capacitor $C = 0.2 \text{ F}$ y una batería que proporciona un voltaje $F = 10 \text{ V}$. En el instante $t = 0$ circula una corriente de 2 Amperes.

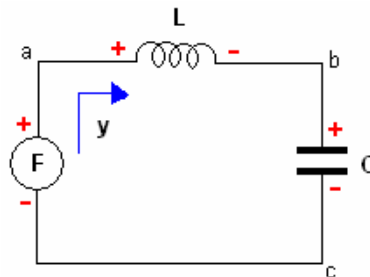


Figura 9: Circuito elemental

a) Demostrar que la intensidad de corriente $y(t)$ satisface la ecuación integrodiferencial

$$y'(t) + 5 \int_0^t y(u) du = 10, \text{ con condición inicial } y(0) = 2$$

b) Aplicar el método de Laplace para resolver la ecuación.

Resolución

a) Si definimos V_{ab} = tensión entre los nodos "a" y "b" del circuito y aplicamos la Segunda Ley de Kirchoff a la malla "abca" (véase [1-2]) se tiene que

$$-V_{ab} - V_{bc} + V_{ca} = 0. \tag{2}$$

Según la Ley de Faraday, $V_{ab} = L y'(t)$; además, por la Ley de Coulomb, $V_{bc} = \frac{1}{C} \int_0^t y(u) du$.

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (2) se obtiene $-y'(t) - 5 \int_0^t y(u) du + 10 = 0$.

b) Primer Paso: Se aplica la Transformada de Laplace en cada miembro de la ecuación. Es decir, se resuelve $\mathcal{L}(y'(t) + 5 \int_0^t y(u) du) = \mathcal{L}(10)$. Para ello se escribe el siguiente comando:

LaplaceTransform[(y'[t] + 5 Integrate[y[u], {u, 0, t}] == 10) , t , s] /. { LaplaceTransform[y[t], t, s] -> Y[s] , y[0] -> 2 }

Una vez ejecutada esta instrucción, aparecerá en pantalla la siguiente ecuación algebraica cuya incógnita es $Y[s]$ (observar que $Y[s] = \mathcal{L}(y(t))$):

$$-2 + \frac{5 Y[s]}{s} + s Y[s] = \frac{10}{s} \quad (3)$$

Segundo Paso: Se despeja $Y[s]$ de la ecuación (3). Ingresamos entonces el comando:

$$\text{Solve}[-2 + \frac{5 Y[s]}{s} + s Y[s] == \frac{10}{s}, Y[s]]$$

Se obtiene por resultado $Y[s] = \frac{2(5+s)}{5+s^2}$. (4)

Tercer Paso: Se aplica la antitransformada de Laplace a la ecuación (4), es decir, se calcula $\mathcal{L}^{-1}(Y[s]) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{2(5+s)}{5+s^2})$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}^{-1}(Y[s])=y[t]$, ejecutamos la instrucción:

InverseLaplaceTransform[(Y[s] == \frac{2(5+s)}{5+s^2}), s , t] /. {InverseLaplaceTransform[Y[s], s, t] ->

y[t]}. Finalmente el resultado obtenido es $y(t) = 2(\cos(\sqrt{5}t) + \sqrt{5}\sin(\sqrt{5}t))$

6. CONCLUSIONES

El uso de un software en la enseñanza de la Matemática brinda una prueba visual convincente de las deducciones matemáticas. El Mathematica, por la potencia y simplicidad de su manejo permitirá, tanto al docente como al estudiante, interpretar los resultados de una manera más dinámica y producirá un marcado interés en la comprensión de los temas.

7. REFERENCIAS

- [1] Dennis G. Zill & Michael R. Cullen, *Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera*. Thomson Learning. 2002.
- [2] C. Ray Wylie, *Matemáticas Superiores para Ingeniería*. Mc. Graw Hill. 1982.
- [3] Hwei P. Hsu, *Análisis de Fourier*. Addison-Wesley Iberoamericana. 1987.
- [4] M. Spiegel, *Transformada de Laplace*. Compendios Schaum. Mc. Graw Hill. 1998.
- [5] J.W. Brown y R. Churchill, *Serie de Fourier y problemas de contorno*. Mc. Graw Hill. 1993.
- [6] Enrique Castillo, Andrés Iglesias, *Domine al 99% Mathematica*. Parainfo. 1996.
- [7] Samira Abdel Masih, *Aplicaciones del Mathematica a ecuaciones diferenciales, series y transformadas de Laplace*. U.N.L.Z.. 2007.