

UN MÉTODO SENCILLO Y PRÁCTICO PARA CALCULAR INTEGRALES TRIPLES

Samira Abdel Masih

Facultad de Ingeniería.

Universidad Nacional de Lomas de Zamora.

Camino de Cintura km 2. Llavallol. Buenos Aires. Argentina.

e-mail: lutfi@speedy.com.ar

RESUMEN

Numerosas aplicaciones provenientes de diversas ramas de la Ingeniería, tales como el cálculo del volumen de un sólido, la determinación de su masa, su centro de masa o sus momentos de inercia, así como el flujo de un campo vectorial a través de una superficie o la carga eléctrica total sobre un cuerpo que ocupa una determinada región del espacio, requieren del cálculo de integrales triples.

Sin embargo, la principal dificultad que se presenta a la hora de resolver este tipo de integrales consiste en determinar correctamente los límites de integración de cada una de las variables que intervienen en dicha integral. La bibliografía clásica nos sugiere que la única manera de determinar dichos límites es dibujando la región de integración que, por tratarse de una figura tridimensional, resulta generalmente difícil.

El presente trabajo expone un método para evaluar una integral triple de una manera sencilla y práctica, con sólo proyectar la región de integración sobre algunos de los planos coordenados y sin necesidad de dibujar el recinto de integración.

Más específicamente, si $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en D , donde D es un sólido limitado por "m" superficies de ecuación $F_k(x, y, z) = 0$ con $F_k: D_k \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ $k=1, 2, \dots, m$ funciones diferenciables y $D_k = \text{Dominio de } F_k$, se mostrará cómo calcular, mediante un algoritmo, la integral triple $\iiint_D f(x, y, z) dV$.

Por último se ilustrará la implementación del mencionado algoritmo utilizando el software Mathematica.

El método desarrollado se viene experimentando en la asignatura de Análisis Matemático II con resultados altamente satisfactorios.

Palabras Claves: integrales - triples – límites de integración.

1. INTRODUCCIÓN

Las integrales triples de Riemann se definen sobre una región acotada D (un sólido) y para funciones f de tres variables continuas en casi todo punto de dicha región. Utilizaremos la notación $\iiint_D f(x,y,z) dV$ para representarlas. En general, su cálculo se restringe a ciertos tipos

sencillos de regiones, llamadas regiones elementales (véase [1-6]), que pueden ser de Tipo 1 o proyectables sobre el plano xy , de Tipo 2 o proyectables sobre el plano yz , y de Tipo 3 o proyectables sobre el plano xz . La metodología clásica de enseñanza sugiere que, para evaluar este tipo de integrales, es preciso dibujar el recinto de integración D el cual, por tratarse de una figura tridimensional, resulta generalmente difícil. El presente trabajo propone un algoritmo para calcular integrales triples de una manera sencilla y práctica, con sólo proyectar la región D sobre algunos de los planos coordenados, evitando así dibujarla en el espacio.

2. HIPÓTESIS NECESARIAS

El algoritmo que se desarrollará podrá aplicarse si el recinto de integración D verifica las siguientes condiciones:

2.a) D es acotado y tiene por frontera a superficies de ecuación

$$F_k(x,y,z) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

donde $F_k : D_k \subset \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$ son funciones diferenciables y $D_k = \text{Dominio de } F_k$.

2.b)

2.b1) Una de las variables (x , y ó z) figura a lo sumo en dos de las ecuaciones (1).

2.b2) Dicha variable puede despejarse de las mencionadas ecuaciones y expresarse en términos de exactamente dos funciones de las otras variables.

El siguiente ejemplo ilustra la manera de comprobar si la región D satisface estas hipótesis.

2.1. Ejemplo

Dado el sólido D acotado y limitado por las superficies

$$\begin{cases} z = 0 & (2) \\ x + z = 3 & (3) \\ x^2 + y^2 = 4 & (4) \end{cases}$$

Verificar si satisface las condiciones 2.a) y 2.b) para:

I) La variable "z". II) La variable "x". III) La variable "y".

Resolución

Si se definen las funciones $F_1(x,y,z) = z$, $F_2(x,y,z) = x + z - 3$, $F_3(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4$, la región D satisface la condición 2.a) pues tiene por frontera a las superficies de ecuación $F_k(x,y,z) = 0$ con F_k diferenciables, $k = 1, 2, 3$.

I) La variable "z" figura en dos ecuaciones: (2) y (3); si la despejamos a partir de ellas se obtiene:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = 3 - x \end{cases} \quad (5)$$

De (5) y (6) se deduce que "z" queda definida en términos de exactamente dos funciones de las variables "x" e "y" (por ejemplo, $f_1(x,y) = 0$, $f_2(x,y) = 3-x$). Por lo tanto, la variable "z" verifica la hipótesis 2.b).

II) La variable "x" aparece en dos ecuaciones: (3) y (4); al despejarla resulta:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{4-y^2} \\ x = 3-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{4-y^2} \\ x = 3-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4-y^2} \\ x = -\sqrt{4-y^2} \\ x = 3-z \end{cases} \quad (7)$$

Las expresiones (7), (8) y (9) indican que "x" queda formulada en términos de tres funciones de las variables "z" e "y". Luego, falla la condición 2. b2) y en consecuencia, el algoritmo no podrá implementarse para la variable "x".

III) La variable "y" figura sólo en la ecuación (4):

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4-x^2} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{4-x^2} \\ y = -\sqrt{4-x^2} \end{cases} \quad (10)$$

De (10) se deduce que "y" queda expresada en términos de exactamente dos funciones de "x" y "z" (por ejemplo, $f_1(x,z) = \sqrt{4-x^2}$, $f_2(x,z) = -\sqrt{4-x^2}$). Por lo tanto, la variable "y" satisface la hipótesis 2.b).

En el próximo apartado se exponen los resultados matemáticos que justifican la metodología del algoritmo.

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Sin pérdida de generalidad, supondremos que

a) El sólido D satisface las hipótesis 2.a) y 2.b) para la variable "z", y que ésta sólo figura en las ecuaciones $F_1(x,y,z) = 0$ y $F_2(x,y,z) = 0$. Es decir,

$$\begin{aligned} F_1(x,y,z) = 0 &\Leftrightarrow z = f_1(x,y) \\ F_2(x,y,z) = 0 &\Leftrightarrow z = f_2(x,y) \\ F_k(x,y,z) = g_k(x,y) = 0 &, k = 3, \dots, m \end{aligned}$$

con g_k, f_1, f_2 funciones diferenciables.

b) Los puntos $(x,y,z) \in D$ verifican las inecuaciones

$$\begin{cases} f_1(x,y) \leq z \\ z \leq f_2(x,y) \\ F_k(x,y,z) \geq 0, k = 3, \dots, m \end{cases}$$

Por lo tanto, el sólido D quedará definido por:

$$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y) \wedge g_k(x,y) \geq 0, k = 3, \dots, m \} \quad (11)$$

3.1 Observación

Si $m < 3$, la región D será de la forma:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y) \text{ con } f_1, f_2 \text{ funciones diferenciables}\}.$$

El siguiente Teorema demuestra que D es de Tipo 1 y caracteriza su proyección.

3.2 Teorema

Sea D el sólido definido según la expresión (11) y $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en casi todo punto de D. Entonces

a) La proyección Pxy de la región D sobre el plano xy es

$$P_{xy} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / g_k(x,y) \geq 0, k=3,\dots,m \wedge f_2(x,y) - f_1(x,y) \geq 0\}$$

b) Los subconjuntos del plano definidos por las ecuaciones

$$\begin{cases} g_k(x,y) = 0 & k = 3,\dots,m \\ f_1(x,y) = f_2(x,y) \end{cases}$$

contienen a la frontera de Pxy

c) D es una región de Tipo 1.

$$d) \iiint_D f(x,y,z) dV = \iint_{P_{xy}} \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right] dA$$

Demostración:

a) Recordemos que, por definición, $P_{xy} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y,z) \in D, \text{ para algún } z \in \mathbb{R}\}$

Sea $(x,y) \in P_{xy}$ entonces $\exists z \in \mathbb{R} / (x,y,z) \in D$. Luego,

$g_k(x,y) \geq 0 \forall k=3,\dots,m \wedge f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y) \Rightarrow f_2(x,y) - f_1(x,y) \geq 0$. Por lo tanto,

$(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / g_k(x,y) \geq 0, k=3,\dots,m \wedge f_2(x,y) - f_1(x,y) \geq 0\}$.

Por otro lado, si $(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / g_k(x,y) \geq 0, k=3,\dots,m \wedge f_2(x,y) - f_1(x,y) \geq 0\}$

$\Rightarrow f_1(x,y) \leq f_2(x,y)$. Si se define $z = \frac{f_1(x,y) + f_2(x,y)}{2}$ entonces $f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)$.

En consecuencia, $(x,y,z) \in D$ y por lo tanto $(x,y) \in P_{xy}$.

b) Si se simboliza la frontera de un conjunto A por $Fr(A)$ (véase [7]) y se tiene en cuenta que

$Fr(A \cap B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$ y que $Fr\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / h(x,y) \geq 0\} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / h(x,y) = 0\}$ si h es una función continua, resulta

$$Fr(P_{xy}) = Fr(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / g_k(x,y) \geq 0, k=3,\dots,m \wedge f_2(x,y) - f_1(x,y) \geq 0\}) =$$

$$= Fr\left(\bigcap_{k=3}^m \{(x,y) / g_k(x,y) \geq 0\} \cap \{(x,y) / f_2(x,y) - f_1(x,y) \geq 0\}\right) \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{k=3}^m Fr(\{(x,y) / g_k(x,y) \geq 0\}) \cup Fr(\{(x,y) / f_2(x,y) - f_1(x,y) \geq 0\}) \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{k=3}^m \{(x,y) / g_k(x,y) = 0\} \cup \{(x,y) / f_2(x,y) - f_1(x,y) = 0\}.$$

c) Obviamente por a) D es de la forma

$$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in P_{xy}, f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y), \text{ con } f_1 \text{ y } f_2 \text{ diferenciables} \}$$

En consecuencia, D es de Tipo 1 o proyectable sobre el plano xy.

d) Es inmediato, pues la integral triple de f sobre D puede calcularse, según [1-6], utilizando

integrales dobles. Es decir,
$$\iiint_D f(x,y,z) dV = \iint_{P_{xy}} \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right] dA$$

3.3 Observación

En algunas situaciones, el sólido D suele estar definido como el conjunto de puntos del espacio limitado por las superficies

$$\begin{cases} z = f_1(x,y) \\ z = f_2(x,y) \\ g_k(x,y) = 0, k = 3, \dots, m \end{cases} \quad (12)$$

En este caso, para evaluar la integral triple es necesario determinar si $f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)$ ó $f_2(x,y) \leq z \leq f_1(x,y)$ para $(x,y,z) \in D$. La siguiente Proposición es útil para decidir al respecto.

3.4 Proposición

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto arco conexo y $h: D_h \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en A tal que $h(x,y) \neq 0 \forall (x,y) \in A$. Si $(x_0,y_0) \in A$ es tal que $h(x_0,y_0) > 0$ entonces $h(x,y) > 0 \forall (x,y) \in A$.

Demostración

Supongamos por el absurdo que $\exists (x_1,y_1) \in A$ tal que $h(x_1,y_1) \leq 0$. Como $h(x,y) \neq 0 \forall (x,y) \in A$, resulta $h(x_1,y_1) < 0$. Por ser A arco conexo, existe un camino $\alpha: [0,1] \rightarrow A$ tal que $\alpha(0) = (x_0,y_0) \wedge \alpha(1) = (x_1,y_1)$. Consideremos la función continua $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = h(\alpha(t))$. Entonces $g(0) = h(\alpha(0)) = h(x_0,y_0) > 0 \wedge g(1) = h(\alpha(1)) = h(x_1,y_1) < 0$.

Luego, $\exists t_1 \in (0,1)$ tal que $g(t_1) = 0$ (véase [9]), es decir, $h(\alpha(t_1)) = 0$. Pero esto contradice la hipótesis pues $\alpha(t_1) \in A \wedge h(x,y) \neq 0 \forall (x,y) \in A$.

3.4.1 Observación

Si el sólido D está definido según la ecuación (12) y el interior de P_{xy} – que se simbolizará por $\text{int}(P_{xy})$ – es arco conexo, los límites superior e inferior de la variable z pueden determinarse aplicando la Proposición 3.4, considerando el conjunto $A = \text{int}(P_{xy})$, $h(x,y) = f_1(x,y) - f_2(x,y)$ y tomando un punto $(x_0,y_0) \in \text{int}(P_{xy})$. Luego se calcula $f_1(x_0,y_0) \wedge f_2(x_0,y_0)$. Si $f_1(x_0,y_0) < f_2(x_0,y_0)$ entonces $f_1(x,y) < f_2(x,y) \forall (x,y) \in \text{int}(P_{xy})$ y por lo tanto $f_2(x,y) \leq z \leq f_1(x,y)$. Análogo razonamiento es válido si $f_1(x_0,y_0) > f_2(x_0,y_0)$. Notar además que, si la ecuación $f_1(x,y) - f_2(x,y) = 0$ define implícitamente una curva en el plano entonces $f_1(x,y) - f_2(x,y) \neq 0 \forall (x,y) \in \text{int}(P_{xy})$. El Teorema 3.2 y la Proposición 3.4 fundamentan el algoritmo que se enuncia a continuación.

4. ALGORITMO PARA CALCULAR INTEGRALES TRIPLES

Sea D un sólido que verifica las hipótesis 2.a) y 2.b) . Sin pérdida de generalidad, supondremos que la condición 2.b) se satisface para la variable "z" y que D está limitado por las superficies:

$$F_1(x,y,z) = 0 \tag{13}$$

$$F_2(x,y,z) = 0 \tag{14}$$

$$g_k(x,y) = 0 \quad , \quad k = 3, \dots, m \tag{15}$$

Si $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en casi todo punto de D, para calcular $\iiint_D f(x,y,z) dV$ se procede

de la siguiente manera:

Primer Paso: Se despeja "z" de las ecuaciones (13) y (14):

$$F_1(x,y,z) = 0 \Rightarrow z = f_1(x,y)$$

$$F_2(x,y,z) = 0 \Rightarrow z = f_2(x,y)$$

De este modo, $f_1(x,y)$ y $f_2(x,y)$ determinarán los límites de integración de la variable "z".

Segundo Paso: Se proyecta el sólido D sobre el plano xy. Para ello se dibuja en dicho plano los conjuntos que resultan de cada una de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} g_k(x,y) = 0 \quad , \quad k = 3, \dots, m \\ f_1(x,y) = f_2(x,y) \end{cases} \tag{16}$$

Es decir, en el plano xy, se trazan las curvas obtenidas de las ecuaciones que limitan la región D y que no contienen en su expresión a la variable "z", además del conjunto (que puede ser vacío) que resulta de igualar los límites de integración de "z". De esta manera, la proyección Pxy de D es la región plana y acotada, que tiene por frontera a curvas (o trozos de curvas) que figuran en (16).

Tercer Paso: Si int(Pxy) es arco conexo, para decidir si $f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)$ ó $f_2(x,y) \leq z \leq f_1(x,y)$ $\forall (x,y,z) \in D$, se toma un punto $(x_0,y_0) \in \text{int}(Pxy)$ y se valúa $f_1(x_0,y_0) \wedge f_2(x_0,y_0)$.

Si $f_1(x_0,y_0) < f_2(x_0,y_0)$ entonces $f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)$. De lo contrario resultará $f_2(x,y) \leq z \leq f_1(x,y)$.

Cuarto Paso: Se calcula la integral triple

$$\iiint_D f(x,y,z) = \iint_{P_{xy}} \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right] dA \quad \vee \quad \iiint_D f(x,y,z) = \iint_{P_{xy}} \left[\int_{f_2(x,y)}^{f_1(x,y)} f(x,y,z) dz \right] dA$$

según sea $f_1(x_0,y_0) < f_2(x_0,y_0) \quad \vee \quad f_1(x_0,y_0) > f_2(x_0,y_0)$.

4.1 Observación

Si int(Pxy) no es arco conexo, el Tercer Paso del algoritmo se aplica a cada una de sus componentes arco conexas. De este modo, si $\text{int}(Pxy) = \bigcup_{i=1}^j R_i$ con R_i componentes arco conexas $\forall i = 1, \dots, j$ entonces

$$\iiint_D f(x,y,z) dV = \sum_{i=1}^j \iint_{R_i} \left[\int_{f_1^i(x,y)}^{f_2^i(x,y)} f(x,y,z) dz \right] dA$$

donde f_1^i, f_2^i se definen por

$$f_1^i(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y) & \text{si } f_1(x_i, y_i) < f_2(x_i, y_i) \\ f_2(x,y) & \text{si } f_2(x_i, y_i) < f_1(x_i, y_i) \end{cases} ; f_2^i(x,y) = \begin{cases} f_2(x,y) & \text{si } f_1(x_i, y_i) < f_2(x_i, y_i) \\ f_1(x,y) & \text{si } f_2(x_i, y_i) < f_1(x_i, y_i) \end{cases}$$

con (x_i, y_i) un punto interior de R_i .

5. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

En esta sección se muestran ejemplos que ilustran la implementación del algoritmo.

5.1 Cálculo del volumen de un sólido.

Hallar el volumen del sólido D limitado por las superficies

$$\begin{cases} y = x^2 & (17) \\ y = 1 - z & (18) \\ z = 0 & (19) \end{cases}$$

Resolución

Se sabe que el volumen de D es $V(D) = \iiint_D 1 dV$. Para calcular esta integral se aplicará el

algoritmo proyectando el sólido sobre el plano xy, ya que la variable z figura sólo en dos ecuaciones: (18) y (19).

Primer Paso. Se despeja z de (18) y (19), y se obtiene $z = 1 - y, z = 0$.

De este modo, $f_1(x,y) = 1 - y \wedge f_2(x,y) = 0$ determinan los límites de integración de la variable z.

Segundo Paso: Se proyecta el sólido D sobre el plano xy. Dibujamos entonces las curvas obtenidas de las ecuaciones que limitan la región D y que no contienen en su expresión a la variable z (en este caso, sólo la (17)), además del conjunto que resulta de igualar los límites de integración de dicha variable. Es decir, se grafica en el plano xy las ecuaciones

$$y = x^2, 1 - y = 0$$

De esta manera, la proyección Pxy de D es la región acotada y limitada por estas curvas, como se muestra en la Figura 1.

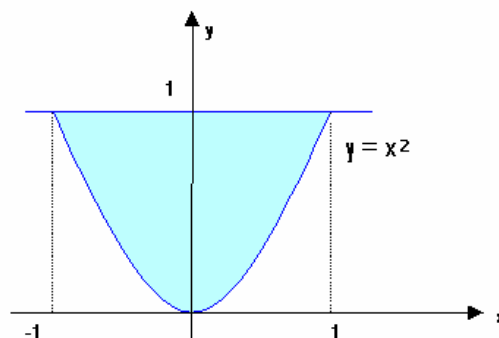


Figura 1: Proyección Pxy de D sobre el plano xy.

Si se describe la proyección como región Tipo 1 (véase [5]) se tiene

$$P_{xy} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1 \} \quad (20)$$

Tercer Paso: Se toma un punto (x_0, y_0) en el interior de P_{xy} , por ejemplo, $(x_0, y_0) = (0, 1/2)$ y se valúan $f_1(x_0, y_0) = f_1(0, 1/2) = 1 - 1/2 = 1/2$, $f_2(x_0, y_0) = f_2(0, 1/2) = 0$. Como $f_2(x_0, y_0) < f_1(x_0, y_0)$ resulta $f_2(x, y) \leq z \leq f_1(x, y)$, es decir,

$$0 \leq z \leq 1 - y \tag{21}$$

Cuarto Paso: Se calcula la integral triple. Las expresiones (20) y (21) permiten describir a D como una región Tipo 1 de la forma

$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - y \}$$

Por lo tanto, se obtiene

$$V(D) = \iiint_D 1 \, dV = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} 1 \, dz \, dy \, dx = \frac{8}{15}$$

5.1.1 Observación

Mediante los siguientes comandos del software Mathematica (véase [8-9]) es posible dibujar la región D, la cual se muestra en la figura 2:

```
Sup1 = ParametricPlot3D [ { x , x^2 , z } , {x, -1, 1} , {z, 0, 1} ] ;
Sup2 = ParametricPlot3D [ { x , 1 - z , z } , {x, -1, 1} , {z, 0, 1} ] ;
Sup3 = ParametricPlot3D [ { x , y , 0 } , {x, -1, 1} , {y, 0, 1} ] ; Show [ Sup1, Sup2, Sup3 ] ;
```

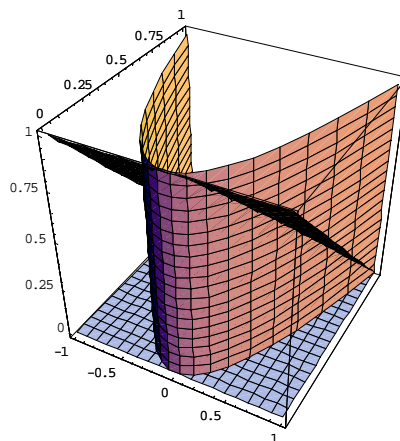


Figura 2: Gráfica del sólido del Ejemplo 5.1.

Como se puede comprobar, el algoritmo facilita el cálculo una integral triple ya que no es necesario dibujar el recinto de integración que, en muchas situaciones, resulta complejo.

5.2 Masa de un sólido.

Un sólido D de densidad constante está definido por $x^2 + y^2 \leq 4$, $z \geq 0$, $x + z \leq 3$.

Calcular su masa proyectando el sólido sobre el plano xz.

Resolución

Si la densidad es $f(x, y, z) = \rho$, la masa de D es $\iiint_D \rho \, dV$. Nuevamente se aplicará el algoritmo para calcular esta integral. Observar que el sólido está limitado por las superficies

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 & (22) \\ z = 0 & (23) \\ x + z = 3 & (24) \end{cases}$$

Primer Paso. Para proyectar el sólido sobre el plano xz, despejaremos la variable “y” de (22):

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2} \Rightarrow y = \sqrt{4 - x^2} \vee y = -\sqrt{4 - x^2}$$

De este modo, $f_1(x,z) = -\sqrt{4 - x^2}$ \wedge $f_2(x,z) = \sqrt{4 - x^2}$ determinan los límites de integración de la variable y.

Segundo Paso: Se proyecta el sólido D sobre el plano xz. Para ello se grafica en el plano xz las curvas representadas por las ecuaciones

$$z = 0, x + z = 3 \quad (25)$$

y además, el conjunto que se obtiene de igualar los límites de integración de la variable y:

$$-\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \quad (26)$$

Como se observa en la Figura 3, las ecuaciones (25) y (26) determinan la frontera de dos regiones acotadas: R1 y R2.

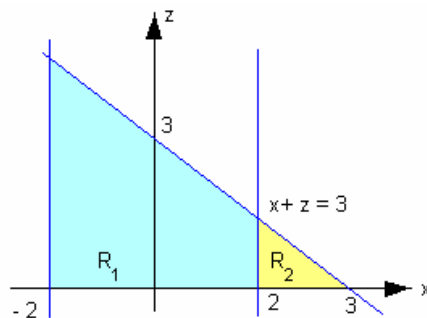


Figura 3: Regiones limitadas por las ecuaciones (25) y (26).

Sin embargo, R2 debe ser descartada, pues no satisface la condición $x^2 + y^2 \leq 4$. De esta manera, la proyección Pxz del sólido es la que se muestra en la figura 4.

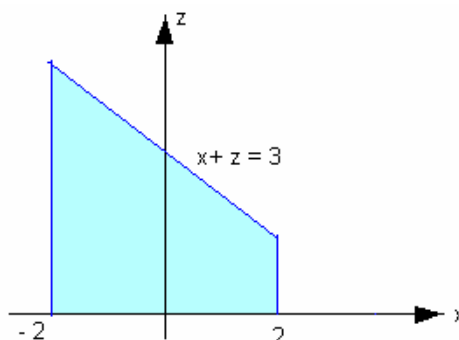


Figura 4: Proyección Pxz de D sobre el plano xz.

Si se describe Pxz como región Tipo 1 se tiene

$$Pxz = \{ (x,y) \in \mathfrak{R}^2 / -2 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 3 - x \} \quad (27)$$

Tercer Paso: Obviamente $f_1(x,z) \leq y \leq f_2(x,z)$, por lo tanto

$$-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \quad (28)$$

Cuarto Paso: Las expresiones (27) y (28) permiten describir a D como región Tipo 3 de la forma

$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -2 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 3-x, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \}$$

En consecuencia resulta

$$\text{masa}(D) = \iiint_D \rho \, dV = \int_{-2}^2 \int_0^{3-x} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \rho \, dy \, dz \, dx = 12 \pi \rho$$

6. CONCLUSIONES

La experiencia demuestra que el estudio de integrales triples constituye uno de los mayores obstáculos en el aprendizaje del Cálculo en varias variables. El algoritmo propuesto en este trabajo es una alternativa que facilitará al docente la enseñanza de este tema. Afortunadamente existe una extensión del método, cuando una de las variables figura en más de dos de las ecuaciones que limitan el recinto de integración. Su descripción será objeto de un próximo trabajo.

7. REFERENCIAS

- [1] G.Thomas, *Calculus and Analytic Geometry*, Addison Wesley, Massachusetts, 1998.
- [2] E. Swokowsky, *Cálculo con Geometría Analítica*, Iberoamérica, México, 1988.
- [3] L.Leithold, *El Cálculo*, Oxford University Press, México, 1998.
- [4] J.Mardsen y A.Tromba, *Cálculo Vectorial*, Addison Wesley, Wilmington, 2005.
- [5] James Stewart, *Cálculo*, Thomson Learning, México, 2005.
- [6] Frank Ayres y Elliot Mendelson, *Cálculo Diferencial e Integral*, McGraw-Hill, México, 1994.
- [7] James Munkres, *Topología*, Pearson Educación, México, 2002.
- [8] Samira Abdel Masih, *Análisis Matemático II aplicado a Mathematica*, U.N.L.Z, Buenos Aires, 1998.
- [9] Enrique Castillo y Andrés Iglesias, *Domine al 99% Mathematica*, Parainfo, Madrid, 1998.