FORO DOCENTE DEL AREA MECANICA DE LAS INGENIERIAS
FoDAMI

**I CAIM 2008**
**Primer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica**
**Octubre 2008**

# Soluciones analíticas de problemas de Ingeniería Mecánica mediante modelos de funciones complejas

Eduardo Gago

*Laboratorio Informático de Ciencias Básicas-Departamento Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Rosario*
*Zeballos 1341. (2000) Rosario – email: egago @frro.utn.edu.ar*

**RESUMEN**

En la formación del Ingeniero Mecánico deben contemplarse conocimientos básicos indispensables para abordar el análisis y resolución de sistemas complejos, que involucran una Matemática superior donde se desarrollen métodos analíticos, cualitativos y numéricos capaces de resolver modelos matemáticos diversos que describan algún sistema o fenómeno de la vida real.

El estudio de problemas de Ingeniería conduce al planteo de sistemas dinámicos en los que, por ejemplo, la dinámica de fluídos, el análisis de esfuerzo en placas, la electrostática requieren del tratamiento de funciones complejas en regiones específicas y que satisfagan condiciones de frontera determinadas, esto sumado al conocimiento de la disciplina que compone la especialización del problema planteado conduce a utilización de soluciones analíticas para arribar posiblemente a un modelo idealizado para comprender mejor el comportamiento del sistema en estudio.

La interpretación y cálculo de velocidades y la confección de un mapa con las líneas de corrientes de fluidos ideales es considerado de fundamental importancia en el trabajo interdisciplinar que proponemos; atendiendo a las dificultades conceptuales que presentan los alumnos cuando deben modelizar con expresiones diferenciales y números complejos en otros niveles de la carrera.

El proceso de modelización se articula mediante una red de componentes de especificidad determinada, donde el alumno está sometido a la toma constante de decisiones que lo llevarán a obtener la conceptualización de las herramientas matemáticas necesarias para plantear, analizar y resolver los problemas planteados.

El objetivo de este trabajo es mostrar donde se utilizan los temas desarrollados en Cálculo avanzado poniendo énfasis en la simulación y visualización de los sistemas en estudio, mediante una metodología innovadora que logra motivar e interesar a los futuros profesionales de Ingeniería para orientarlos hacia las aplicaciones concretas.

**Palabras Claves:** funciones complejas, flujo de fluido, modelos dinámicos, simulación, interdisciplina

## 1. INTRODUCCIÓN

En general los contenidos de los programas académicos de las carreras de Ingeniería tienen una fuerte dosis de abstracción y generalización y esto se evidencia en particular en los cursos de Matemática Superior. La enseñanza de Matemática mediante la modelización de sistemas dinámicos colabora para que el estudiante se involucre responsablemente en los temas en estudio, lo que permite lograr autonomía en el aprendizaje y así facilitar la incorporación de conceptos de manera significativa, además de prepararse para su desempeño profesional.

Para formar un profesional versátil es de suma importancia articular el plan de la carrera para alcanzar las competencias profesionales requeridas, seleccionar los contenidos y actividades acordes a dichas competencias; como así también las políticas y gestión que deben acompañar la evaluación y construcción curricular.

Una hecho importante es diseñar actividades curriculares basadas en el aprendizaje por construcción de conceptos, donde se persiga como objetivo tener un estudiante que sea protagonista del proceso de enseñanza aprendizaje, y hacer énfasis en el carácter inter y multidisciplinario de los contenidos curriculares.

La selección de modelos matemáticos alternativos influyen favorablemente en el interés por parte de los estudiantes, y si la propuesta de trabajo resulta atractiva y conveniente entonces se logra analizar y visualizar sistemas complejos para una mejor apropiación del tema en estudio.

Se trata de crear un ámbito de trabajo donde el alumno pueda ser reflexivo, crítico, tome decisiones y también delimite los errores cometidos en el proceso, esto provoca la necesidad por parte del alumno de conocer el objeto de estudio y crear las condiciones internas para la asimilación, en forma activa e independiente de los nuevos conocimientos.

El docente, en este tipo de experiencias, toma el rol de guía del proceso y actúa como facilitador del aprendizaje hasta llegar a la comprensión cabal del tema en estudio, incluso con preguntas que activen un mecanismo de continuidad en la ampliación y posterior investigación de distintas líneas sobre el problema propuesto.

En un contexto, de innovación constante, planificamos el desarrollo de actividades donde proponemos estudiar el problema de la circulación de flujo de fluido en estado estacionario, mediante modelos de funciones complejas y utilizando la metodología de enseñanza aprendizaje teórico-práctica tecnológica para avanzar primero con la investigación teórica del tema, creando un ambiente donde el alumno asuma un rol activo, dejando de lado el hecho de ser espectador, y le permita ir construyendo los conceptos mediante la experimentación, la validación de los resultados y la elaboración de conclusiones.

El desarrollo del estudio de las funciones analíticas de variable compleja es un área de la Matemática que tiene mucha relevancia en la formación del Ingeniero Mecánico, no sólo por gozar de un desarrollo teórico independiente sino también por contar con innumerables aplicaciones dentro del campo ingenieril. En el estudio de sistemas dinámicos de transporte de fluidos estas teorías juegan un rol importante para predecir el comportamiento en el régimen de los mismos.

## 2. CRITERIOS METODOLÓGICOS

La problemática de fondo de como impartir la enseñanza reside en crear las condiciones para que los esquemas de conocimiento que construye el alumno evolucionen en un sentido determinado. La cuestión clave no reside en si el aprendizaje debe conceder prioridad a los contenidos o a los procesos, sino en asegurarse de que sean significativos y funcionales.

El alumno necesita disponer de conocimientos previos suficientes a partir de los cuáles poder abordar los contenidos propuestos, con el fin de establecer relaciones entre ellos lo más complejas y ricas posibles que le permitan aumentar el significado de sus aprendizajes.

Es conveniente ayudar en un principio al alumno a reordenar y asimilar aquellos conocimientos previos necesarios relacionados con el contenido propuesto. Con el fin de abordar con éxito los aprendizajes programados, se elaborarán las estrategias adecuadas para propiciar situaciones favorables de aprendizaje.

Las actividades didácticas propuestas consisten en hacer énfasis en una investigación teórica por parte de los alumnos con la tutoría de los profesores, para realizar una analogía con los parámetros físicos del tema en estudio y por último con la información reunida resolver la situación problemática propuesta para la conceptualización del tema.

## 3. CASO EN ESTUDIO

El sistema que se estudia es el flujo bidimensional de un fluido incompresible, no viscoso correspondiente a un campo irrotocional que se mueve en estado estacionario para distintos valores del potencial complejo de velocidad. Se establece que hay relación entre los conceptos de derivación de funciones complejas con la velocidad del fluido y otros parámetros físicos.

### *3.1. 1ª Sesión: Investigación teórica del tema.*

Se reunieron grupos de cuatro alumno con el material bibliográfico sugerido [2],[ 5], [6] y con el acompañamiento del docente se llegó a comprender y obtener una guía tutorial teórica de los conceptos a utilizar en la propuesta de trabajo, de acuerdo a nuestra solicitud, luego de escuchar y revisar las conclusiones a que llegó cada grupo se hizo un debate sobre el tema proponiendo el siguiente marco teórico:

a) Una función de variable compleja $f(z) = p(x,y) + j\,q(x,y)$ unívoca en alguna región $R$ del plano $z$, es analítica en dicha región $R$ si existe la derivada $f'(z)$ en todo punto $z$ de dicha región $R$.

b) Una condición necesaria para que $f(z)$ sea analítica en una región $R$, es que en $R$, $p$ y $q$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y} \;;\; \frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial q}{\partial x} \tag{1}$$

si estas derivadas parciales son continuas en $R$, entonces las ecuaciones anteriores son condiciones suficientes para que $f(z)$ sea analítica en $R$. Las funciones que satisfacen las condiciones anteriores se dicen conjugadas y este tipo de funciones cumplen con la propiedad de ortogonalidad, quiere decir que las curvas del tipo $p(x,y)=k_1$ ($k_1 \in R$), y $q(x,y)=k_2$ ($k_2 \in R$) son ortogonales.

c) Si además las derivadas parciales segundas de $p$ y $q$ son continuas en $R$, se cumple la ecuación de Laplace para $p$ y $q$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}=0 \tag{2}$$

d) La derivada de la función $f$ puede calcularse por medio de la siguiente expresión:

$$f'(z)=\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial x}j=-j\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial y} \tag{3}$$

### *3.2. 2ª Sesión: Modelización del sistema en estudio*

El potencial de velocidad complejo $F$ es una función analítica de variable compleja compuesta por el par ordenado cuya parte real es el potencial de velocidad $\phi$ y la parte imaginaria es la función de corriente $\varphi$

$$F(z)=\phi(x,y)+\varphi(x,y)j \tag{4}$$

La velocidad de circulación de un fluido $v = p+qj$, es el gradiente del potencial de velocidad

$$\nabla\phi = v \tag{5}$$

De la Ecuación (4) y de la Ecuación (5) se pudo expresar la velocidad del fluido con la Ecuación (6)

$$v=\phi_x(x,y)+\phi_y(x,y)j \tag{6}$$

Derivando el potencial complejo a partir de la Ecuación (4) se obtuvo la Ecuación (7):

$$F'(z)=\phi_x(x,y)+\varphi_x(x,y)j \tag{7}$$

Como $F$ es una función analítica cumple con las condiciones expresadas por las Ecuaciones (1) de Cauchy-Rieman se concluye que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}=-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{8}$$

En este caso las curvas equipotenciales son aquellas tales que $\phi(x,y)=k_1$ ,y son ortogonales con las líneas de corriente que son las curvas de ecuación: $\varphi(x,y)=k_2$, (con $k_1$ y $k_2$ constantes).

Con el modelo logrado y mediante la Ecuación (7) y la Ecuación (8) se pudo deducir que la velocidad del fluido es el complejo conjugado, derivada de la función $F$

$$F'(z) = \phi_x(x,y) - \phi_y(x,y)j \tag{9}$$

Se expresa la Ecuación (9) también por medio de la Ecuación (10)

$$v = \overline{F'(z)} \tag{10}$$

Para poder calcular el módulo de la velocidad $|v|$ se utilizó la Ecuación (11)

$$|v| = |F'(z)| \tag{11}$$

### 3.3. 3ª Sesión de trabajo:

Proponemos estudiar el movimiento de un fluido conocido, para distintas expresiones del potencial complejo $F$, considerando en todos los casos la constante $a > 0$:

**Caso A:** $F(z) = V_o\left(z + \dfrac{a^2}{z}\right)$ donde $V_o$ es una constante positiva.

Orientamos el trabajo de análisis del alumno con las siguientes consignas:

a) Obtiene las ecuaciones para las líneas de corriente y líneas equipotenciales.

b) Realiza una representación gráfica de las trayectorias anteriores e interprétalas físicamente.

c) De las gráficas obtenidas en el punto **b** analiza cómo es el régimen del fluido.

d) Analiza cómo será el perfil de velocidades en los distintos puntos de su trayectoria.

e) Individualiza los puntos estacionarios.

Del análisis propuesto y mediante la gráfica de la Figura 1 se establecieron las siguientes conclusiones:

a) Las curvas paralelas al eje $x$ indican los caminos que siguen las partículas de fluido. Cuando $\varphi = 0$ corresponde a una trayectoria que se mueve en el eje $x$, o en el contorno de la circunferencia de radio $a$.

b) Las líneas equipotenciales están marcadas con línea de puntos y son ortogonales a las líneas de corriente.

c) La circunferencia de radio $a$ representa una trayectoria; y puesto que como no puede haber flujo a través de una trayectoria, se puede considerar como un obstáculo circular de radio $a$ colocado en el camino del fluido.

d) La velocidad compleja del fluido posee un valor variable cerca del obstáculo y su módulo corresponde a $|v| = V_o\sqrt{1 + \dfrac{a^4 - 2a^2\left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}}$

Si nos alejamos del obstáculo la velocidad asume el valor $v = V_o$, es decir el fluido está corriendo en la dirección del eje $x$ positivo con velocidad constante $V_o$.

e) Los puntos estacionarios del sistema son aquellos donde la velocidad es cero y están dados por los valores de $z = a$ y $z = -a$

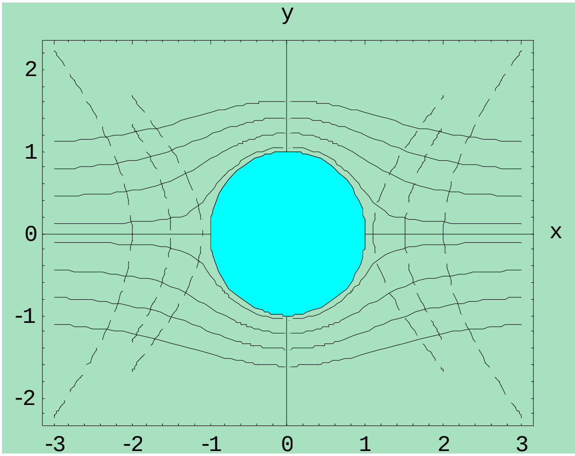


*Figura 1 Líneas de corriente y curvas equipotenciales para* $F(z) = V_o \left( z + \frac{a^2}{z} \right)$

**Caso B:** $F(z) = a\,z$

Del análisis de la Figura 2 se pudo visualizar el comportamiento del fluido para este caso, donde las líneas de corriente son rectas horizontales y las correspondientes curvas equipotenciales son rectas verticales, lo que indica que el flujo del fluido es uniforme y su dirección es hacia a la derecha, esto también se interpretó como el flujo uniforme en el semiplano superior limitado por el eje $x$, que es una línea de corriente; o como un flujo uniforme entre dos rectas paralelas $y = k_1$ e $y = k_2$, siendo su velocidad $v = a$, y su módulo del mismo valor.

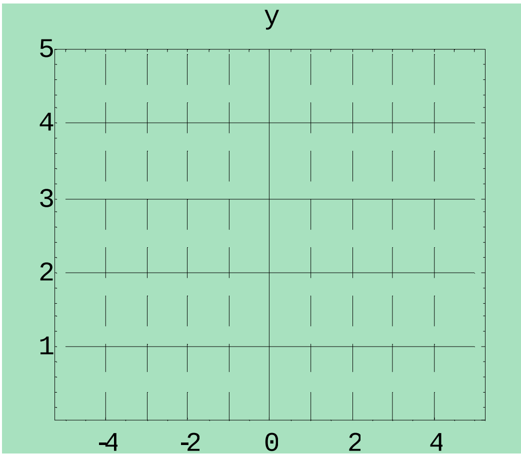


*Figura 2 Líneas de corriente y curvas equipotenciales para* $F(z) = a\,z$

**Caso C:** $F(z) = a\,z^2$ (para valores de $x > 0$, $y > 0$)

De la observación de la Figura 3, vemos que el fluido se ve forzado a girar hacia una esquina situada en el origen. En este caso las líneas de corriente son ramas de hipérbolas rectangulares que responden a la igualdad $2axy = k$, de manera tal que el módulo de la velocidad es directamente proporcional a su distancia al origen, siendo su expresión $|v| = 2a|z|$. Se pudo concluir que el valor de la función de corriente en un punto se interpreta como el ritmo del flujo a través de un segmento recto que une el origen con ese punto.

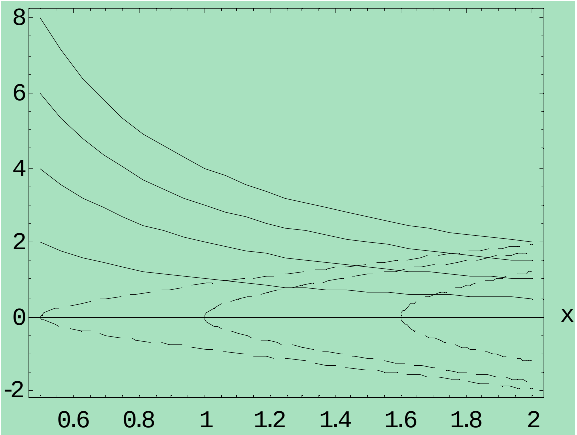


*Figura 3 Líneas de corriente y curves equipotenciales para* $F(z) = a\,z^2$

**Caso D:** $F(z) = j\,a\ln z$

Las líneas de corriente analizadas en la Figura 4 son circunferencias que tienen un centro común que corresponde al origen del plano complejo ($z = 0$), mientras que las líneas equipotenciales están dadas por las rectas de ecuaciones $y = k\,x$, que también pasan por el origen. De este modo el potencial complejo describe el flujo de un fluido que está dando vueltas alrededor de $z = 0$ que se denomina "vórtice" y a este tipo de flujo se lo llama "flujo vórtice".

En este caso la dirección del flujo coincide con el sentido horario, y el módulo de la velocidad es $|v| = \dfrac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

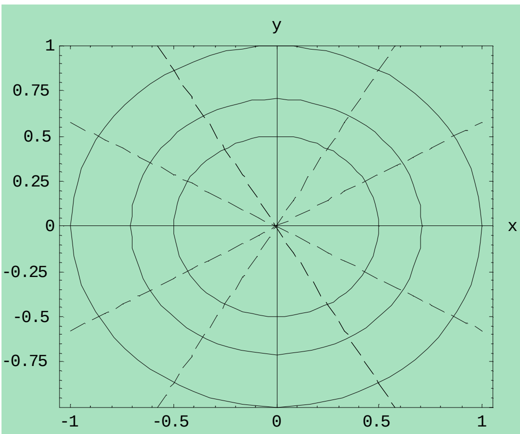


*Figura 4 Líneas de corriente y curvas equipotenciales para* $F(z) = j\,a\ln z$

**Caso E:** $F(z) = a\,z^4$ (estudiar la región del primer cuadrante)

Como lo muestra la Figura 5 en este caso observamos que las líneas de corriente para esta región están acotadas por el eje $x$ y por la recta $y = x$. La dirección del flujo es descendente y el valor del módulo de la velocidad es $|v| = 4a|z^3|$

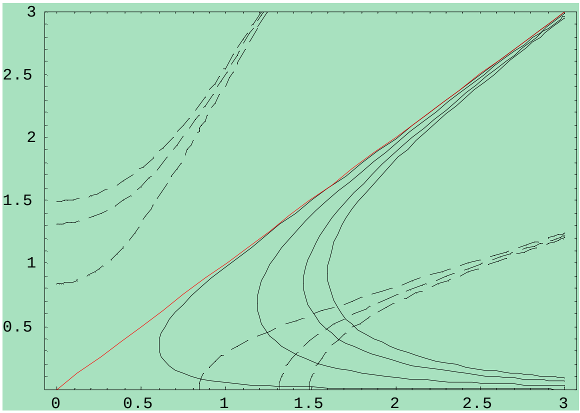


*Figura 5 Líneas de corriente y curves equipotenciales para* $F(z) = a\,z^4$

**Caso F:** $F(z) = a\dfrac{1+z}{1-z}$

Para este caso que aparece considerado en la Figura 6 se observa que las líneas de corrientes son circunferencias concéntricas alrededor de un punto, y a partir de dicho punto nacen las curvas equipotenciales.

Se dedujo que el módulo de la velocidad que responde a la fórmula es: $|v| = \dfrac{2}{x^2 + y^2 - 2x + 1}$

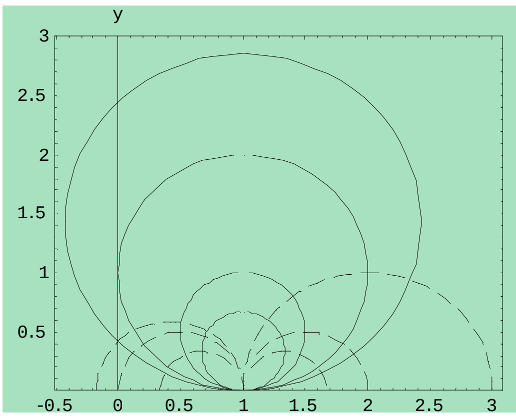


*Figura 6 Líneas de corriente y curvas equipotenciales para* $F(z) = a\dfrac{1+z}{1-z}$

## 4. CONCLUSIONES

La utilización de funciones analíticas de variable compleja, el estudio de modelos idealizados y el apoyo de los recursos informáticos utilizados adecuadamente propició un análisis contextualizado que logró el objetivo de comprender algunas propiedades de la dinámica de los fluidos.

La investigación de los conceptos teóricos del tema fue de fundamental importancia para poder resolver los problemas expuestos, de igual relevancia se consideró el apoyo de los recursos informáticos sin los cuales la interpretación del modelo no podría haberse llevado a cabo. La justificación de los resultados obtenidos que permitieron identificar propiedades del flujo de fluidos se basó en un análisis de los distintos registros numérico, simbólico y gráfico en cada uno de los casos presentados.

## 5. REFERENCIAS

[1] Peter V. O´Neil , Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*,* Math Learning, 5ª Ed., 2004.

[2] Glyn James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*,* Prentice Hall, 2ª Edición, 2002.

[3] Dennis Zill, Michael Cullen, Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera, Thomson Learning, 5ª Edición, 2002

[4] Glenn Ledder, Ecuaciones Diferenciales, un Enfoque de Modelado*,* Mc Graw Hill, 2006.

[5] Churchill Ruel, Variable compleja y Aplicaciones. Mc Graw Hill, 7ª Edición, 2004.

[6] R. Byron Bird, Warren Stewart, Edwin Ligthfoot, Fenómenos de Transporte, Reverté, 1976.