

## **Modelo basado en mecánica introductoria de un vehículo traccionado por ruedas**

José Di Paolo y Javier O. Romagnoli

*Cátedra Física Mecánica, Facultad de Ingeniería – UNER*  
*Ruta 11, km 10, 3100, Oro Verde, Entre Ríos, Argentina*  
[jdipaolo@bioingenieria.edu.ar](mailto:jdipaolo@bioingenieria.edu.ar)

### **RESUMEN**

En carreras de Ingeniería, incluso Bioingeniería, Física es la ciencia básica fundamental cuya enseñanza comienza desde el primer año. Son conocidas las dificultades que entraña el proceso de enseñanza y aprendizaje de Física en el ámbito universitario: el razonamiento en torno a las leyes dentro de sus marcos de validez y la matemática involucrada en los modelos descriptivos de los fenómenos estudiados. En el caso de Física Mecánica, son clásicos los problemas con bloques, planos inclinados y objetos simétricos girando respecto a un eje que pasa por su centro de masa, individualmente o entremezclados en problemas de entrenamiento que pueden despertar poco o nulo interés en los alumnos.

Por otra parte, la motivación de los alumnos suele pasar por el deseo de entender el funcionamiento de máquinas y/o dispositivos que se presentan cotidianamente ante sus ojos. Si bien estos son complejos de abordar con las herramientas de Física introductoria, vale la pena modelarlos cuando sea posible a través de ecuaciones sencillas que capturen las características mecánicas esenciales.

En este trabajo se presenta una propuesta de actividad práctica constituida a través de la formulación y solución de un modelo en ecuaciones del movimiento de un vehículo traccionado por ruedas. El modelo se basa en la dinámica de traslación y de rotación, considerando una fuerza de resistencia al avance dependiente del cuadrado de la velocidad; por ello, éste resulta no lineal y se hace necesario un método numérico de implementación computacional para su resolución. El trabajo combina conceptos de Física, herramientas matemáticas y habilidades de programación para dilucidar la relación cuantitativa entre aceleración, torque en las ruedas y cantidad de ruedas motoras y conducidas. Dentro de las simplificaciones realizadas, los resultados explican algunos de los fenómenos observados en prácticas deportivas con automóviles.

**Palabras Claves:** Física Mecánica, rodadura, tracción por ruedas, dinámica de vehículos

## **1. INTRODUCCIÓN**

La enseñanza de la Física, fundamentalmente en la universidad, entraña la problemática de la motivación de los alumnos que suele pasar por el deseo de estos de entender el funcionamiento de máquinas y/o dispositivos que se presentan cotidianamente ante sus ojos y/o sus manos. Un ejemplo clásico es el interés en comprender el movimiento de los vehículos traccionados por ruedas y la interrelación de las distintas variables que impactan sobre ello: tamaño de las ruedas, aerodinámica del vehículo, torque entregado por el motor y capacidad de aceleración desde el reposo entre otras.

Particularmente, la rodadura es uno de los fenómenos mecánicos que más exigencias intelectuales tiene en alumnos de primer año. Ello debido a que la rodadura convierte el rozamiento en útil para lograr el movimiento de rotación combinado con el de traslación. La fuerza de rozamiento entre la rueda y la superficie sobre la que se mueve no siempre posee un sentido de actuación claro, variando con el tipo de acción (fuerza o momento de torsión) que se aplique a la rueda. De ello depende que una rueda sea motora o conducida.

En este trabajo se presenta una propuesta de actividad didáctica para Física Mecánica constituida a través de la formulación y solución de un modelo en ecuaciones del movimiento de un vehículo traccionado por ruedas. Las ecuaciones utilizadas describen la relación entre el movimiento de un vehículo y las fuerzas que actúan sobre él teniendo en cuenta la interacción con el medio. Se realiza el análisis de rodadura en una rueda conductora y en una rueda conducida asumiéndolas como rígidas y cilíndricas, teniendo en cuenta la resistencia a la rodadura para luego estudiar el comportamiento del vehículo en forma completa considerando además una fuerza de resistencia al avance dependiente del cuadrado de la velocidad.

El análisis involucra la dinámica de traslación y la de rotación, entre las cuales se conjugan los principales parámetros del vehículo: masa del conjunto, masa y radio de las ruedas, cantidad de ruedas motoras, cantidad de ruedas conducidas, torque impulsor y coeficientes de rozamiento entre otros. Las ecuaciones resultantes, basadas en la dinámica de la partícula y del sólido rígido para un movimiento con aceleración constante, resultan no lineales y requieren un método numérico para resolverse. La implementación computacional del método de solución permite, adicionalmente, la realización de estudios paramétricos variando los datos de a uno por vez. Tanto el método numérico como su implementación computacional pueden ser transparentes para los alumnos sin perjuicio del concepto físico que se ejercita o surge del análisis de los resultados.

## **2. DESARROLLO**

### **2.1. Análisis de rodadura en una rueda conductora**

Las ruedas son los componentes giratorios que soportan toda la carga y constituyen el único nexo de unión entre el vehículo y el suelo por lo que tienen importante influencia en el

comportamiento dinámico del mismo. Las ruedas conductoras son aquellas que están en el eje motriz el cual, acoplado al sistema de tracción, permite dotar de movimiento a los vehículos.

La Figura 1-a muestra las fuerzas que actúan sobre una rueda rígida conductora que avanza hacia la derecha con aceleración constante a lo largo de una superficie horizontal. La fuerza  $\mathbf{P}$  representa la carga vertical que soporta la rueda incluyendo su propio peso y  $\mathbf{n}$  es la reacción vertical del camino que coincide en módulo y dirección con  $\mathbf{P}$  pero tiene sentido contrario de manera que haya un equilibrio de fuerzas en la dirección vertical. El torque, momento o par denominado con la letra  $\tau$  es proporcionado por el eje motriz y su efecto es producir que la rueda gire, sin embargo para que se produzca un movimiento de traslación hacia la derecha es necesario que se genere una fuerza de fricción entre rueda y superficie indicada con el símbolo  $f_{ad}$  [1, 2]. Cabe destacar que esta fuerza de fricción se genera en la interfase rueda - suelo y su sentido es hacia la derecha (hacia delante) coincidiendo con la dirección de avance de la rueda, como lo demuestra un análisis dinámico de la rodadura sobre una superficie plana. Intuitivamente, si imaginamos la rueda rodando sobre una alfombra en un piso liso, ésta resultaría arrugada hacia atrás, la reacción a este efecto sería una fuerza sobre la rueda apuntando hacia delante. Eso es lo que ocurre con el contacto entre rueda y suelo.

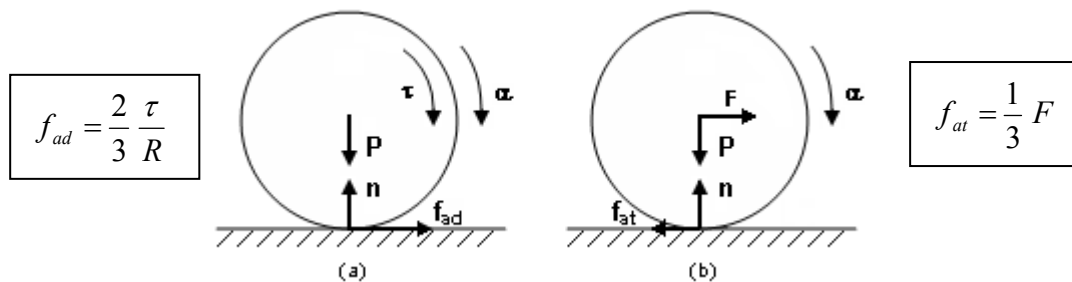


Figura 1: a) Fuerzas que actúan sobre una rueda rígida conductora moviéndose hacia la derecha. b) Fuerzas que actúan sobre una rueda rígida conducida moviéndose hacia la derecha.

## 2.2. Análisis de rodadura en una rueda conducida

En los vehículos de carretera generalmente no todos los ejes son motrices, es decir que puede haber ejes que no están acoplados al sistema de tracción. Las ruedas conducidas son aquellas que están en ejes no motrices y que ruedan bajo la acción de una fuerza transmitida por la estructura del vehículo que acciona en el centro de la misma, a través del eje y en el sentido del movimiento.

En la Figura 1-b, análogamente a la a), se observan las distintas fuerzas que actúan sobre una rueda rígida conducida que avanza hacia la derecha con aceleración constante a lo largo de una superficie horizontal. El movimiento de traslación de la rueda hacia la derecha es provocado por la fuerza  $\mathbf{F}$  aplicada en el centro de masa de la misma y su movimiento de rotación se debe a la fuerza de fricción entre rueda y superficie indicada con  $f_{at}$  [1, 2]. Un

análisis dinámico de esta situación demuestra que el sentido de esta fuerza de fricción  $f_{at}$  es contraria a la dirección de movimiento (hacia atrás).

### 2.3. Resistencia a la rodadura

En los casos anteriores se consideró cada rueda como un disco rígido, en realidad siempre existe algún tipo de deformación y el contacto de la rueda con la superficie se encuentra desplazado una distancia  $\delta$  hacia adelante [3] con respecto a la vertical que pasa por el eje de rotación. Como consecuencia se produce un torque que se opone a la rodadura de la rueda llamado resistencia a la rodadura, que se especifica más adelante en el esquema dinámico de un vehículo.

### 2.4. Análisis de la fuerza de resistencia que ofrece el aire para movimiento rectilíneo con aceleración constante

El aire impactado por el vehículo genera una fuerza resistiva o fuerza de arrastre que se opone al movimiento del mismo. Esta fuerza de arrastre asociada con la fricción del aire es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad y está dada por la Ecuación (1), donde  $V$  es la velocidad (estrictamente la rapidez) del vehículo si se considera aire calmo, expresada en metros por segundo y  $K^*$  es el factor que surge del área transversal de impacto, la densidad del aire y el coeficiente aerodinámico del vehículo.  $K^*$  se llamará constante de resistencia por rozamiento con el aire.

$$f_a = K^* V^2 \quad (1)$$

La Ecuación (1) tiene sentido instantáneo, es decir que en cada momento la fuerza de oposición al avance provocada por el aire es proporcional al cuadrado de la velocidad. Si dicha fuerza se modelase de esta manera, las ecuaciones resultarían diferenciales y no algebraicas como las que comprenden y manipulan los alumnos de primer año. Por ello, si el movimiento analizado se produce entre las velocidades  $V_i$  y  $V_f$ , la fuerza  $f_a$  se modelará proporcionalmente al promedio de la velocidad al cuadrado, en el intervalo de tiempo en el que se produce la variación. Aplicando el teorema del valor medio para un movimiento con aceleración constante ( $V = V_0 + a \Delta t$ ), puede demostrarse que dicho promedio es:

$$\tilde{V}^2 = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} V^2 dt = V_0^2 + a V_0 \Delta t + a^2 \frac{(\Delta t)^2}{3} \quad (2)$$

Como se verá más adelante, la Ecuación 2 permitirá lograr expresiones algebraicas del movimiento de un vehículo con aceleración constante.

### 2.5. Modelo con ecuaciones para un vehículo 4x2 con movimiento rectilíneo con aceleración constante

Con respecto al número de ruedas motrices, habitualmente los vehículos se designan por una expresión de dos cifras separadas por el signo "x", donde la primera de ellas indica el número total de ruedas y la segunda indica cuántas de las ruedas son conductoras o motrices. De esta manera un vehículo 4x2 es aquel que tiene cuatro ruedas donde dos de ellas son conductoras. La Figura 2 muestra un esquema de las fuerzas que actúan sobre la mitad derecha de un vehículo con tracción delantera considerando simetría respecto a un plano longitudinal. El sentido de avance es hacia adelante, el símbolo  $m$  corresponde a la masa de cada rueda distribuida en forma de un cilindro macizo con radio  $R$ ,  $M$  hace referencia a la masa de la mitad del vehículo sin incluir las ruedas, el centro de masa se ubica por simplicidad, en el punto medio entre ambos ejes. Por esta razón las normales  $n_{ad}$  y  $n_{at}$  tendrán un módulo igual a la mitad del peso de la mitad del auto, más el peso de una de las ruedas (ver Figura 2). El torque  $\tau$  en la rueda conductora es proporcionado por el motor del vehículo a través de la caja de transmisión y el sistema de tracción, y se considera constante para proporcionar un movimiento con aceleración también constante. La fuerza  $F$  que se ve en la Figura 1-b, junto con su reacción, forman un par de fuerzas internas para el vehículo completo por lo cual no intervienen en el análisis (ver Figura 2).

Se considera la resistencia a la rodadura debido a la deformabilidad de las ruedas y el suelo, desplazando las reacciones verticales del camino en las ruedas ( $n_{ad}$  y  $n_{at}$ ) una distancia  $\delta$  hacia adelante con respecto a la vertical que pasa por el eje de rotación de dichas ruedas.

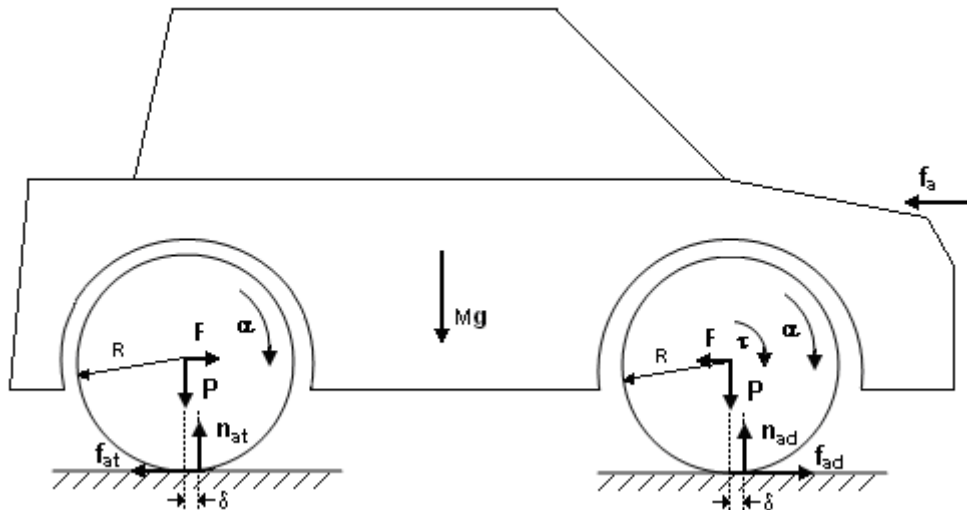


Figura 2: Fuerzas que actúan sobre la mitad derecha de un vehículo traccionado por las ruedas delanteras

Respecto al análisis del movimiento de traslación, la Ecuación (3) corresponde a la mitad derecha completa del vehículo por lo que están incluidas las dos fuerzas de fricción  $f_{ad}$  y  $f_{at}$ , la fuerza de resistencia por el aire tiene signo negativo porque se opone al desplazamiento del vehículo, haciéndose notar que  $K = K^*/2$  dado que corresponde a la mitad del área transversal

del móvil. La fuerza resultante de las tres fuerzas son proporcionales a la aceleración que experimenta la mitad del vehículo. El símbolo  $\alpha$  indica la aceleración angular de las ruedas.

En cuanto al análisis rotacional las ecuaciones (4) y (5) expresan el torque neto que actúa sobre la rueda de atrás y rueda de adelante respectivamente relacionándolos con el momento de inercia de las mismas y su aceleración angular.

Sobre la rueda conducida, Ecuación (4), las fuerzas  $\mathbf{n}_{at}$  y  $\mathbf{f}_{at}$  tienden a girarla en sentido antihorario y sentido horario respectivamente generando como resultado el torque neto actuante sobre la misma que se relaciona con el producto entre momento de inercia de la rueda y su aceleración angular. Dado que la masa de cada rueda se consideró distribuida en forma de un cilindro macizo, su momento de inercia es  $\frac{1}{2} m R^2$  y la relación entre aceleración angular y aceleración lineal del centro de masa son proporcionales a través del radio de la rueda. Por último, la Ecuación (6) presenta la relación lineal que debe existir entre la velocidad final en el intervalo de tiempo en que se produce el movimiento y la aceleración, como se ha dicho, supuesta constante.

$$f_{ad} - f_{at} - K \left[ V_0^2 + a V_0 \Delta t + a^2 \frac{(\Delta t)^2}{3} \right] = (M + 2m)a \quad (3)$$

$$-f_{at}R + \left( \frac{M}{2} + m \right) R \frac{\delta}{R} = -\frac{1}{2} mR a \quad (4)$$

$$-\tau + f_{ad}R + \left( \frac{M}{2} + m \right) R \frac{\delta}{R} = -\frac{1}{2} mR a \quad (5)$$

$$V_f = V_0 + a \Delta t \quad (6)$$

Este conjunto de cuatro expresiones constituye el sistema de ecuaciones que modelan el comportamiento mecánico del vehículo, donde a  $\delta/R$  se la ha denominado "relación de rodadura". El sistema es no lineal con respecto a la velocidad inicial, la aceleración y el lapso de tiempo debido a la expresión del promedio del cuadrado de la velocidad (ver Ecuación (2)) insertada en la Ecuación (3). Por ello, la resolución del sistema de ecuaciones para un conjunto de datos donde la aceleración, el lapso de tiempo y las fuerzas impulsora ( $f_{ad}$ ) y resistente ( $f_{at}$ ) son las incógnitas a resolver, requiere un método numérico como el que se describe en el próximo ítem.

## 2.6. Metodología de resolución

El método numérico elegido para la resolución del sistema de Ecuaciones (3) a la (6) es el método de Newton, un algoritmo robusto y de rápida convergencia cuando la inicialización de las variables es buena [4]. La implementación del mismo se realiza de acuerdo a los siguientes

pasos: I) generación de residuos (vector  $R$ ) de las ecuaciones (3) a (6), II) generación de la matriz jacobiana (matriz  $J$ ), cuyos elementos surgen de las derivadas de los residuos respecto a las variables tomadas como incógnitas, es decir respecto a  $a$ ,  $f_{ad}$ ,  $f_{at}$  y  $\Delta t$  (vector  $v$ ), III) solución iterativa hasta alcanzar la convergencia, del sistema de ecuaciones dado en forma compacta por:  $-\underline{R}^n = \underline{J}^n (\underline{v}^{n+1} - \underline{v}^n)$ , donde  $n$  representa el N° de iteración.

Implementado el método en un programa computacional escrito en FORTRAN, permitió obtener resultados siguiendo un proceso de continuación paramétrica de algunos de los datos. Obviamente que el método como su implementación computacional es transparente al alumno de primer año que sólo ve como, un software construido al efecto, resuelve las ecuaciones del modelo elaborado para un vehículo traccionado por ruedas y moviéndose con aceleración constante.

### 3. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Los resultados que se presentan han sido obtenidos para un conjunto de parámetros representativos de vehículos estándares. Dicho conjunto de parámetros ha sido tomado como caso base sobre el cual se han variado algunos, aumentándolos y disminuyéndolos. Además, para cada variante analizada se efectuó a su vez la variación paramétrica del torque aplicado a la rueda entre 100 Nm y 1.000 Nm.

Por extensión sólo se muestran los resultados para la variación de tres parámetros: el radio de la rueda, la constante de resistencia y la relación de rodadura. El primero se relaciona con el confort de marcha ya que ruedas más grandes reproducen menos las irregularidades del camino, el segundo se relaciona con la mayor o menor aptitud aerodinámica del vehículo y, el tercero, con el inflado de los neumáticos o la deformabilidad del suelo; a mayores presiones de inflado la resistencia a la rodadura es menor. Los valores de los parámetros tomados como base son:  $M = 500$  kg,  $m = 20$  kg,  $R = 0,25$  m,  $K = 0.5$  kg/m,  $\delta/R = 0,2$   $V_0 = 0$  m/s,  $V_f = 27,778$  m/s (100 km/h),  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>.

#### 3.1 Influencia del radio de la rueda: confort de marcha

La Figura 3-a muestra la aceleración de un vehículo para tres tamaños de ruedas en función del torque aplicado a las ruedas motoras. La funcionalidad lineal entre ambas variables tiene que ver con que la aceleración y el torque están vinculados de forma proporcional en la Ecuación (5) y esa proporción depende del radio de la rueda, por ello la distinta pendiente de las rectas.

Cabe aclarar que cada punto de las gráficas corresponde a un proceso de aceleración de 0 a 100 km/h con el correspondiente torque aplicado constantemente. Ciertamente es que en general una prueba de este tipo no se realiza a torque constante sino aproximadamente a potencia constante; en este caso como la velocidad de las ruedas va aumentando, el torque en las mismas se va reduciendo ya que  $Potencia = \tau \cdot V/R$ . En esta situación, la descripción

matemática de la dinámica del vehículo estaría dado por un sistema de ecuaciones diferenciales.

La Figura 3-a muestra que para ruedas más grandes se tienen menores aceleraciones para igualdad de torque aplicado. Esto tiene que ver con que ruedas de mayor tamaño poseen mayores momentos de inercia y por lo tanto una mayor proporción del torque es necesario para acelerarlas angularmente. Ello justifica que los vehículos de alta gama que entre otras características poseen rodados grandes, vienen equipados con motores más potentes y a su vez con ruedas alivianadas para paliar el aumento del momento de inercia. Para acelerar más entre dos velocidades, las ruedas deben ser lo más pequeñas posible tanto en masa como en tamaño.

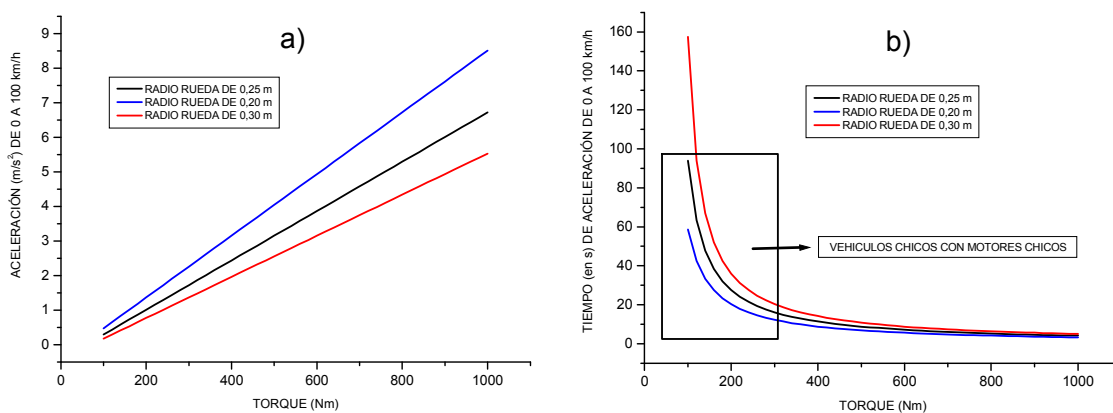


Figura 3: a) Influencias del torque y el radio de las ruedas en la aceleración constante entre 0 y 100 km/h.  
b) Influencias del torque y el radio de las ruedas sobre el tiempo de aceleración entre 0 y 100 km/h

Se desprende de la segunda ley de Newton para la traslación que la fuerza de tracción seguirá una variación proporcional a la de la aceleración, como también el coeficiente de rozamiento necesario entre la rueda motora y el suelo; estos resultados no se muestran por extensión.

La Figura 3-b muestra la funcionalidad no lineal del tiempo de aceleración respecto al torque y el radio de la rueda. En concordancia con lo discutido para la Figura 3-a, a iguales torques, las ruedas más pequeñas posibilitarán tiempos menores para acelerar de 0 a 100 km/h. Sobre la Figura 3-b se señala una zona donde podrían ubicarse los vehículos con motores pequeños que, como se ve, pueden mejorar su performance con ruedas todo lo pequeñas que se pueda; un ejemplo característico es el de los vehículos denominados "karts".

La Figura 3-a puede servir también como un punto de partida para la selección de la planta motriz, es decir: para el vehículo definido según los datos y la aceleración deseada entre 0 y 100 km/h, de la Figura 3-a se obtiene el torque necesario en las ruedas motoras. La afectación de éste por la relación de transmisión entre motor y ruedas, daría el torque motor a la velocidad de rotación necesaria de la planta motriz para que el vehículo avance a 100 km/h, por ejemplo. Una utilización análoga podría tener la Figura 3-b si se establece como requisito un determinado tiempo de aceleración desde el reposo hasta los 100 km/h.

### 3.2 Influencia de la constante de resistencia: aerodinámica

En las Figuras 4-a y 4-b se muestran las relaciones que existen entre la aceleración constante entre 0 y 100 km/h, el torque y el valor de la constante de resistencia. Los resultados son análogos a los del ítem 3.1, en el sentido de que para mayores valores de  $K$ , es decir vehículos menos aerodinámicos o con mayor área de impacto, a igualdad de torque van a lograr menores aceleraciones y por ende mayores tiempos para llegar de 0 a 100 km/h. Existe una diferencia entre la Figura 4-a y la 3-a que es que las rectas poseen la misma pendiente; esto puede justificarse desde la Ecuación (5) donde se ve que la proporcionalidad entre el torque y la aceleración no cambia por el hecho de variar  $K$ . Obsérvese también que para valores elevados de  $K$  hay torques bajos para los cuales el algoritmo de solución no converge (no hay resultados).

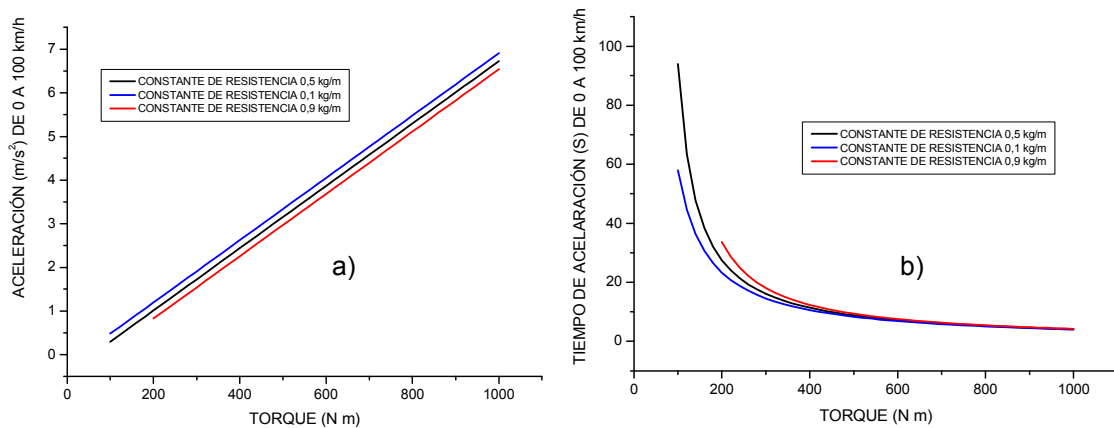


Figura 4: a) Influencias del torque y la constante de resistencia sobre la aceleración entre 0 y 100 km/h, b) Influencias del torque y la constante de resistencia en el tiempo de aceleración de 0 a 100 km/h

### 3.3 Influencia de la relación de rodadura: presión de inflado de neumáticos

En este caso las observaciones a partir de las figuras 5-a y 5-b son análogas a las del ítem 3.2 ya que la relación de rodadura actúa similarmente a  $K$ , es decir generando oposición al movimiento. En igualdad de torques se obtienen mayores aceleraciones cuando la relación de rodadura es menor, esto es cuando el neumático o el suelo se manifiestan menos deformables en los vehículos reales. Es sabido que con neumáticos más inflados el consumo de combustible se reduce o bien es posible una mayor respuesta en aceleración.

Por último, la resistencia a la rodadura también puede involucrar los torques resistivos por fricción en los ejes de las ruedas.

## 4. CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo dinámico de un vehículo traccionado por ruedas, fundado en la dinámica de la partícula y de los cuerpos sólidos rígidos para un movimiento rectilíneo con aceleración constante, para su utilización como elemento didáctico en clases de Física

Mecánica de primer año para ingeniería. El modelo captura las principales características mecánicas del movimiento y reproduce relaciones que son conocidas en la conducción automotriz, por ejemplo.

Los resultados que se presentaron muestran la influencia del tamaño de las ruedas, la aerodinámica, la resistencia a la rodadura y el torque impulsor, sobre la aceleración y el tiempo de aceleración desde cero a 100 km/h para un vehículo de cuatro ruedas donde dos traccionan (4x2). Las ventajas que desde el punto de vista mecánico dan ruedas pequeñas, de masa despreciable, bien infladas sobre suelos rígidos, sumado a los buenos perfiles aerodinámicos, quedaron cualitativamente de manifiesto.

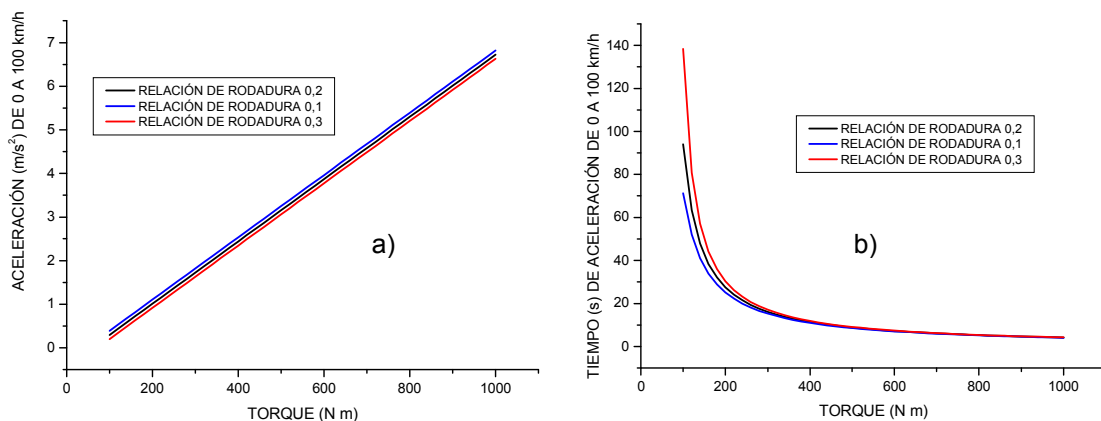


Figura 5: a) Influencias del torque y la relación de rodadura sobre la aceleración entre 0 y 100 km/h, b) Influencias del torque y la relación de rodadura en el tiempo de aceleración entre 0 y 100 km/h

Otros resultados como las magnitudes de las fuerzas de tracción (ruedas delanteras) y de oposición (ruedas traseras), los coeficientes de rozamiento necesarios para cada torque motor y los balances energéticos durante el movimiento, no fueron expuestos por razones de espacio pero pueden obtenerse de la solución de las ecuaciones.

En trabajos futuros puede generalizarse el modelo a otros tipos de vehículos como los 4x4, 6x2 ó 6x4 como también expresar los resultados en términos de variables y números adimensionales. Asimismo, podrían intentarse modelos de movimientos sobre una curva con rapidez constante entre otros, basados en la mecánica introductoria. Por último, con la utilización de programación orientada a objetos podría generarse un entorno visual que permitiese correr de manera más amigable el algoritmo que resuelve el modelo presentado.

## 5. REFERENCIAS

- [1] P. Tipler, *Física para la Ciencia y la Tecnología*, Ed. Reverté, 2001.
- [2] R. Serway, *Física, Tomo I*, Mc Graw-Hill, México, 1998.
- [3] H. Dubbel, *Manual del Constructor de Máquinas*, Ed. Labor, 1975.
- [4] R. L. Bourden y J. D. Faires, *Análisis Numérico*, Thomson, 7ª edición, México, 2002.