

Velocidades críticas de rotores y frecuencias naturales de vigas: un mismo problema

Carlos A. Rossit⁽¹⁾, Diana V. Bambill⁽¹⁾, Javier A. Yagüe y Santiago Maiz⁽¹⁾

*Departamento de Ingeniería – Universidad Nacional del Sur
Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Argentina - e-mail: dbambill@criba.edu.ar.
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

*⁽¹⁾ Instituto de Mecánica Aplicada, Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur
Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Argentina*

RESUMEN

Como es sabido, en el campo de la ingeniería existen numerosos ejemplos de problemas de naturaleza física distinta cuyos sistemas de ecuaciones gobernantes son similares.

Baste mencionar, como ejemplo, las analogías formales existentes en el análisis de sistemas mecánicos vibrantes y de circuitos eléctricos.

Un caso no muy difundido en las Escuelas de Ingeniería es la semejanza existente entre el sistema diferencial que describe el problema de velocidades críticas y configuraciones correspondientes de un rotor y el de vibración transversal de una viga y sus formas modales.

Esta analogía se mantiene aún en el caso de que existan elementos discretos adosados a las vigas o rotores (masas o discos).

En el presente trabajo se explicita en primer lugar la absoluta similitud formal entre ambos sistemas diferenciales.

Se determinan luego las frecuencias naturales de vibración transversal de vigas que soportan masas rígidamente adosadas teniendo en cuenta su inercia rotatoria en forma analítica.

Esos mismos valores representan las velocidades críticas de rotores o configuraciones rotantes.

Finalmente esa correspondencia ha sido verificada experimentalmente determinando las velocidades críticas de rotación de barras con discos adosados, así como sus frecuencias naturales de vibración transversal.

La utilidad de esta propiedad es evidente ya que permite al ingeniero de diseño, en una primera aproximación, utilizar valores conocidos de frecuencias naturales para determinar velocidades críticas y viceversa, ampliando significativamente su base de datos.

Esta contribución, se realiza con el objetivo de propiciar su difusión.

Obviamente, para un diseño ajustado, el proyectista deberá considerar efectos adicionales como por ejemplo la inercia rotatoria de la viga vibrante y el efecto giroscópico en el eje rotante.

Palabras Claves: velocidad crítica, rotor, viga, vibración, analogía.

1. INTRODUCCIÓN

El concepto general de utilizar observaciones sobre un sistema para predecir cómo se comporta un segundo sistema (diferente en algunos aspectos y similar en otros al primero) es conocido desde hace muchos años y la técnica ha sido utilizada en la solución de diversas situaciones tecnológicas.

A medida que la complejidad de los problemas en algunos campos de la ingeniería se incrementa, crece también el interés en la búsqueda de analogías formales, con problemas de solución conocida.

Ejemplos clásicos de este procedimiento se dan en el análisis de problemas de vibraciones de sistemas mecánicos que pueden ser resueltos a través del estudio de un sistema físicamente diferente, como lo es el de los circuitos eléctricos.

Otro caso conocido y muy difundido en la utilización de las analogías formales entre dos problemas físicos distintos lo constituye las semejanzas entre el problema de torsión de una barra prismática sometida a cuplas aplicadas en sus extremos, gobernado por la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = -2G\theta \quad (1)$$

donde ϕ es una función de tensiones, G es el módulo de elasticidad transversal y θ es la rotación de la barra prismática por unidad de longitud.

Y el problema de una membrana tensionada por una fuerza S en su contorno y sometida a una presión estática p_0 constante.

En este caso, también gobierna el problema la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 w = -\frac{p_0}{S} \quad (2)$$

Otro problema regido por la ecuación de Poisson es el flujo de un fluido ideal con vorticidad constante a través de un conducto.

Estas analogías, denominadas comúnmente “analogía de la membrana” y “analogía hidrodinámica” fueron descubiertas por Prandtl, reconocido especialista en dinámica de fluidos y autor de la teoría de la capa límite.

Una analogía no muy difundida en las Escuelas de Ingeniería es la existente entre el problema de vibración transversal de una viga de sección circular y el de velocidades críticas de un rotor.

En el presente trabajo se demuestra la semejanza formal entre ambos problemas, se resuelve analíticamente para el caso de vibración transversal de vigas y se verifica experimentalmente la coincidencia de resultados.

Los beneficios que surgen de esta analogía son evidentes ya que permiten utilizar toda la información disponible sobre frecuencias naturales y correspondientes formas modales de vigas, caso muy estudiado de la mecánica de sólidos, en el estudio de un caso como lo es el

de velocidades críticas y configuraciones correspondientes de un rotor en el que la información disponible es sensiblemente menor.

2. JUSTIFICACION DE LA ANALOGÍA

Consideremos un eje de sección circular A_0 y densidad de material ρ rotando sobre su eje longitudinal con velocidad angular constante ω :

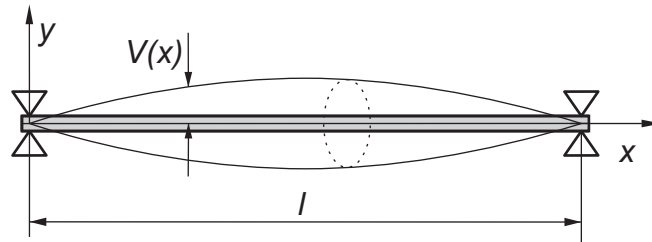


Figura 1: Eje circular rotando alrededor de su eje longitudinal.

Es conocido el hecho de que cuando ω se acerca a ciertas velocidades denominadas críticas, el eje no conserva su forma rectilínea, flecta sensiblemente y gira deformado describiendo un huso, pudiendo comprometer su funcionamiento.

En esas circunstancias, se provocan “fuerzas centrífugas” que actúan en el plano que contiene a la directriz original y a la configuración deformada en cada instante.

Si llamamos $V(x)$ a la desviación de la directriz del árbol con respecto a su configuración recta, la “fuerza centrífuga” por unidad de longitud vendrá dada por:

$$\rho A_0 \omega^2 V(x) \quad (3)$$

Y, la ecuación de equilibrio en el plano definido vendrá dada en primera aproximación por la expresión que vincula, la deformación con la carga:

$$EI \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = \rho A_0 \omega^2 V(x) \quad (4)$$

ó

$$\frac{d^4 V(x)}{dx^4} = \beta^4 V(x) \quad (5)$$

con $\beta^2 = \omega \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI}}$

Como es sabido, la Ecuación (5) representa también el problema de vibración transversal libre de vigas prismáticas independizado del tiempo; por lo que el problema de encontrar velocidades críticas en ejes rotantes y sus correspondientes configuraciones es el mismo que

encontrar las frecuencias naturales y sus correspondientes formas modales en vibraciones transversales de barras.

Con respecto a las condiciones de borde, si el eje rota sobre cojinetes que no restringen su pendiente al adoptar su configuración deformada entonces las condiciones de borde se aproximarán a la condición de apoyo simple para la viga vibrante correspondiente.

Si los cojinetes restringen la pendiente del eje durante la rotación, las condiciones de borde de la viga vibrante correspondiente se aproximarán a la de un empotramiento.

La analogía planteada no se altera con la presencia sobre el eje de volantes de inercia o elementos de transmisión ya que pueden considerarse como masas adosadas a vigas Bernoulli-Euler vibrantes.

Obviamente, el planteo efectuado debe considerarse como una primera aproximación ya que no se han considerado teorías más refinadas que incluyan la deformación por corte e inercia rotatoria de las vigas vibrantes o el efecto giroscópico en los ejes rotantes.

3. DESARROLLO ANALITICO PARA VIGAS BERNOULLI-EULER

En virtud de la analogía demostrada, se efectuará el desarrollo analítico para uno de los dos problemas en análisis: el de vibración libre de una viga Bernoulli-Euler que soporta masas, de las que se tiene en cuenta sus inercias rotatorias, y considerándose condiciones generales de borde en sus extremos a través de vínculos elásticamente restringidos a rotación y traslación [3].

Consideremos la viga Bernoulli-Euler de la Figura 2 con dos masas puntuales m_1 y m_2 , cuyos momentos de inercia son $J_1 = m_1 r_{g1}^2$ y $J_2 = m_2 r_{g2}^2$, siendo r_{g1} y r_{g2} los radios de giro de las masas con respecto al eje neutro de la viga, adosadas en las posiciones x_1 y x_2 respectivamente. Dicha viga se encuentra vinculada elásticamente tanto a la rotación como a la traslación en sus extremos $x = 0$ y en $x = l$.

Los símbolos k_1 y k_2 representan las constantes de rigidez traslacional mientras que k_3 y k_4 representan los coeficientes de rigidez rotacional.

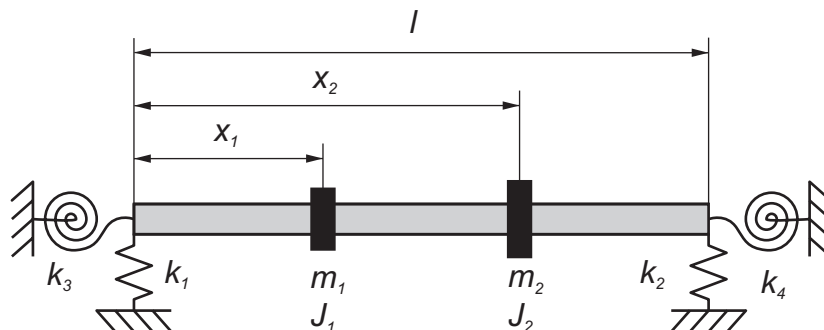


Figura 2: Viga elásticamente restringida con dos masas adosadas.

Para resolver el problema planteado, se divide el dominio de la viga $[0, l]$, en tres subdominios $[0, x_1]$, $(x_1, x_2]$ y $(x_2, l]$, ya que cuando el sistema se encuentra vibrando en uno de sus modos naturales, la ecuación gobernante en cada dominio de la viga es:

$$\frac{d^4 V}{dx^4} - \beta^4 V = 0 \quad (6)$$

La solución general de la Ecuación (6) para el sistema mostrado en la Figura 2 y aplicada a cada tramo será:

$$\begin{aligned} V_1(x) &= C_1 \cosh(\beta x) + C_2 \sinh(\beta x) + C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x) \quad \text{en } [0, x_1] \\ V_2(x) &= C_5 \cosh(\beta x) + C_6 \sinh(\beta x) + C_7 \cos(\beta x) + C_8 \sin(\beta x) \quad \text{en } (x_1, x_2] \\ V_3(x) &= C_9 \cosh(\beta x) + C_{10} \sinh(\beta x) + C_{11} \cos(\beta x) + C_{12} \sin(\beta x) \quad \text{en } (x_2, l] \end{aligned} \quad (7)$$

donde las C_i 's son constantes a ser determinadas por las condiciones de borde en $x = 0$ y en $x = l$ y de continuidad en x_1 y x_2 , mientras que V_1 , V_2 y V_3 son los desplazamientos transversales en el tramo izquierdo, central y derecho, respectivamente.

3.1 Condiciones de borde y de continuidad

En primer lugar introducimos la siguiente variable adimensional:

$$\eta = \frac{x}{l} \quad \text{por lo tanto} \quad \eta_1 = \frac{x_1}{l} \quad \text{y} \quad \eta_2 = \frac{x_2}{l}, \quad (8)$$

Las condiciones de borde en los extremos de la viga se expresan de la siguiente manera:

en $\eta = 0$ se tiene:

$$\left. \frac{d^3 V_1(\eta)}{d\eta^3} \right|_{\eta=0} = -K_1 V_1(\eta) \Big|_{\eta=0}, \quad (9)$$

$$\left. \frac{d^2 V_1(\eta)}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} = K_3 \left. \frac{dV_1(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=0}, \quad (10)$$

y para $\eta = 1$:

$$\left. \frac{d^3 V_3(\eta)}{d\eta^3} \right|_{\eta=1} = K_2 V_3(\eta) \Big|_{\eta=1}, \quad (11)$$

$$\left. \frac{d^2 V_3(\eta)}{d\eta^2} \right|_{\eta=1} = -K_4 \left. \frac{dV_3(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=1}, \quad (12)$$

Por otro lado, las ecuaciones de continuidad para $\eta = \eta_1$ son:

$$V_1(\eta)\Big|_{\eta=\eta_1} = V_2(\eta)\Big|_{\eta=\eta_1}, \quad (13)$$

$$\frac{dV_1(\eta)}{d\eta}\Big|_{\eta=\eta_1} = \frac{dV_2(\eta)}{d\eta}\Big|_{\eta=\eta_1}, \quad (14)$$

$$\frac{d^3V_1(\eta)}{d\eta^3}\Big|_{\eta=\eta_1} + M_1(\beta l)^4 V_1(\eta)\Big|_{\eta=\eta_1} = \frac{d^3V_2(\eta)}{d\eta^3}\Big|_{\eta=\eta_1}, \quad (15)$$

$$\frac{d^2V_1(\eta)}{d\eta^2}\Big|_{\eta=\eta_1} - M_1 c_1^2 (\beta l)^4 \frac{dV_1(\eta)}{d\eta}\Big|_{\eta=\eta_1} = \frac{d^2V_2(\eta)}{d\eta^2}\Big|_{\eta=\eta_1}, \quad (16)$$

y en η_2 :

$$V_2(\eta)\Big|_{\eta=\eta_2} = V_3(\eta)\Big|_{\eta=\eta_2}, \quad (17)$$

$$\frac{dV_2(\eta)}{d\eta}\Big|_{\eta=\eta_2} = \frac{dV_3(\eta)}{d\eta}\Big|_{\eta=\eta_2}, \quad (18)$$

$$\frac{d^3V_2(\eta)}{d\eta^3}\Big|_{\eta=\eta_2} + M_2(\beta l)^4 V_2(\eta)\Big|_{\eta=\eta_2} = \frac{d^3V_3(\eta)}{d\eta^3}\Big|_{\eta=\eta_2}, \quad (19)$$

$$\frac{d^2V_2(\eta)}{d\eta^2}\Big|_{\eta=\eta_2} - M_2 c_2^2 (\beta l)^4 \frac{dV_2(\eta)}{d\eta}\Big|_{\eta=\eta_2} = \frac{d^2V_3(\eta)}{d\eta^2}\Big|_{\eta=\eta_2}, \quad (20)$$

donde:

$$K_1 = \frac{k_1 l^3}{EI}, \quad K_2 = \frac{k_2 l^3}{EI}, \quad K_3 = \frac{k_3 l}{EI}, \quad K_4 = \frac{k_4 l}{EI}, \quad (21)$$

$$M_i = \frac{m_i}{\rho A l} \quad \text{y} \quad c_i = \frac{r_{gi}}{l}.$$

Las Ecuaciones (13), (14), (17) y (18) representan la continuidad en la deformación (condiciones esenciales) de la viga, las Ecuaciones (13) y (17) representan igualdad de deflexión y las Ecuaciones (14) y (18) igualdad de pendiente, mientras que las Ecuaciones (15), (16), (19) y (20) constituyen las condiciones de equilibrio (condiciones naturales), las Ecuaciones (15) y (19) representan la igualdad de fuerzas en los puntos η_1 y η_2 , respectivamente y las Ecuaciones (16) y (20) representan la igualdad de momentos en los puntos η_1 y η_2 respectivamente.

3.2 Ecuación de frecuencias

Reemplazando las Ecuaciones (7) en las condiciones de las Ecuaciones (9) a (20), teniendo en cuenta la Ecuación (8), se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneo de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{1-1} & a_{1-2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1-12} \\ a_{2-1} & a_{2-2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2-12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{12-1} & a_{12-2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{12-12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

La condición de no-trivialidad establece que:

$$\det(\mathbf{A}) = 0, \quad (23)$$

donde \mathbf{A} es la matriz de los coeficientes $a_{i,j}$ del sistema y las raíces $(\beta_n l)$ son los autovalores del problema.

La Ecuación (23) es una función complicada de los autovalores $(\beta_n l)$. Una técnica numérica como el algoritmo de Newton-Raphson puede ser utilizada para encontrar las raíces.

Se debe notar que para una cantidad n de masas, la dimensión de la matriz \mathbf{A} es $(4 + 4n) \times (4 + 4n)$, por lo tanto si el sistema planteado tiene una disposición simétrica, será conveniente representar la mitad de la viga en sus modos simétricos y antisimétricos, y luego, teniendo en cuenta la longitud de la viga, calcular los autovalores. Se debe tener en cuenta también que resultan modificados los parámetros M_i y c_i .

4. APLICACIÓN – VERIFICACION EXPERIMENTAL

Las expresiones deducidas fueron aplicadas al caso de una barra de sección circular sobre la que se adosaron uno y dos discos circulares, calculándose para cada caso, los valores de sus dos primeras frecuencias naturales de vibración transversal.

4.1. Modelo construido

Experimentalmente, en un modelo construido al efecto (Figura 3), fueron verificados tanto los valores de frecuencia obtenidos como la analogía planteada a través de la determinación de las velocidades críticas del modelo al que se hizo rotar sobre su eje longitudinal.

4.1.1. Rotor con un disco adosado

El eje del rotor se materializó con una barra de acero de sección transversal circular de radio $r=1,5$ mm. El peso de la barra por unidad de longitud es de $0,0055$ Kg/m. Se ha considerado, como valor estadístico, la velocidad de propagación de onda unidimensional en el acero

$$C = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5110 \text{ m/seg}.$$

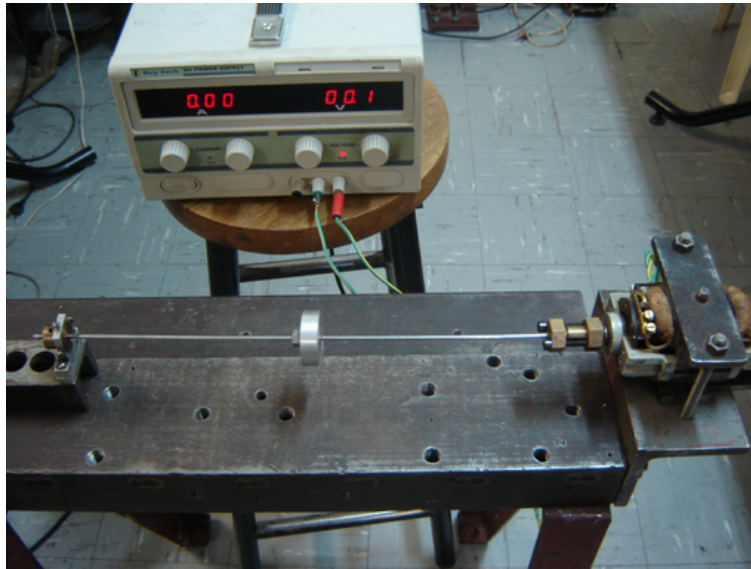


Figura 3: Rotor con 1 disco adosado montado en un dispositivo de ensayo.

El eje se apoyó sobre dos cojinetes separados 317 mm , lo que constituye su longitud libre. En virtud de la distinta dimensión de eje que cubre cada cojinete y consecuentemente de la mayor o menor restricción que impone a su deformación, se consideró un extremo apoyado y el otro empotrado. El peso del eje es de $17,5\text{ grs.}$

Centrado sobre el mismo se adosó un disco circular de aluminio de radio $R=38\text{ mm}$ y espesor $e=12\text{ mm}$, por lo que puede considerarse su acción como puntual. El peso del disco es de $42,9\text{ grs.}$, por lo que la relación de la masa adosada a la masa del eje es $M = \frac{m}{\rho A l} = 2.45$.

La inercia de la masa adosada es $J = \frac{1}{12}(3R^2 + e^2) m = 176.8m$, por lo que su radio de giro adimensionalizado con respecto a la longitud del eje es $\frac{r_g}{l} = 0.042$.

4.1.2. Rotor con dos discos adosado

En este caso la longitud libre del eje es $L=328\text{ mm}$. Se colocaron dos discos simétricamente en las posiciones $x_1=71\text{ mm}$ y $x_2=257\text{ mm}$. Se trata de discos de aluminio de radio $R=83\text{ mm}$ y espesor $e=10\text{ mm}$. El peso de cada uno de ellos es de 142 grs. , por lo que su relación de masas es $M_i = \frac{m_i}{\rho A l} = 7.75$. La inercia de cada masa es $J_i = \frac{1}{12}(3R^2 + e^2) m_i = 407.6m_i$ y su radio

de giro adimensionalizado corresponde a $\frac{r_{gi}}{l} = 0.06$.

4.2. Resultados

En la Tabla 1, se indican los valores obtenidos analítica y experimentalmente de las dos primeras frecuencias naturales de vibración transversal para ambos casos. Se acompañan copias de los espectros que surgieron de la determinación experimental (Figuras 4 y 5).

Como puede observarse, la concordancia es excelente.

Tabla 1: Valores de frecuencia.

	$f_1(\text{Hz.})$		$f_2(\text{Hz.})$	
	Analítico	Experimental	Analítico	Experimental
Rotor con 1 disco adosado	37.3	36	235.5	233
Rotor con 2 discos adosados	22.4	21.3	53.1	52.8

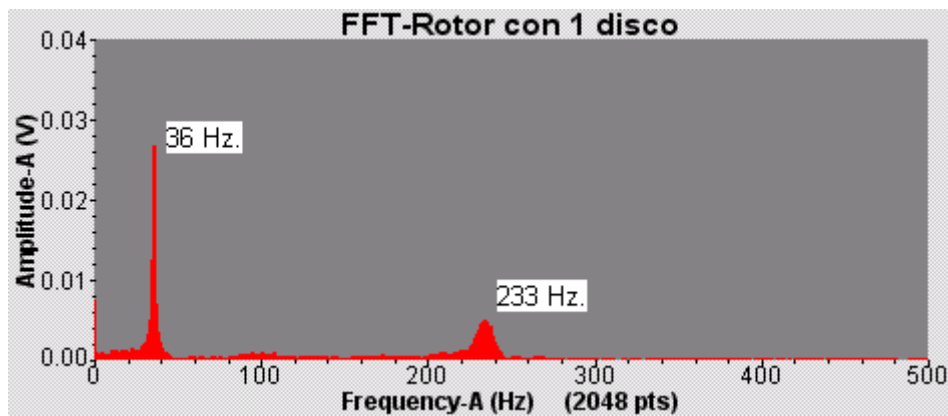


Figura 4: Espectro de frecuencias correspondiente a la configuración Rotor con 1 disco.

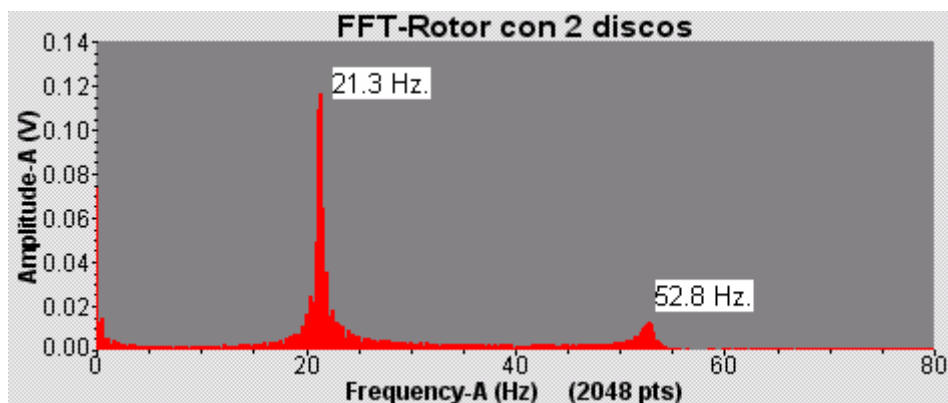


Figura 5: Espectro de frecuencias correspondiente a la configuración Rotor con 2 discos.

Al variar la velocidad angular de giro, se comprobó experimentalmente, para los dos modelos, que para velocidades angulares en rpm cercanas a los valores de $60f_i$ el rotor abandonaba sensiblemente la configuración recta, lo que indica que se correspondían con velocidades críticas de rotación.

Las configuraciones respectivas en las que el rotor gira sobre sí mismo, consideradas en cada instante en el plano que forma con la configuración original, se asemejan a las correspondientes formas modales de vibración transversal.

Es de interés aclarar, a riesgo de ser reiterativo, que se trata de un problema físicamente distinto: el rotor no vibra, sino que gira deformado.

5. CONCLUSIONES

Se ha verificado experimentalmente la analogía formal que existe entre dos situaciones tecnológicamente distintas como lo son el problema de vibración transversal de vigas y el de velocidades críticas de rotores. Se considera que la difusión de tal analogía en las Escuelas de Ingeniería favorecerá la disponibilidad de información sobre el tema de velocidades críticas de rotores toda vez que el de vibración transversal de vigas ha sido sensiblemente más estudiado.

6. REFERENCIAS

- [1] E. Volterra y E. C. Zachmanoglou, *Dynamics of Vibrations*, Charles E. Merrill Books, Inc. 1965.
- [2] S. Maiz, D.V. Bambill, C. A. Rossit y P. A. A. Laura Transverse vibration of Bernoulli-Euler beams carrying point masses and taking into account their rotatory inertia: exact solution, *Journal of Sound and Vibration* **303** (3-5), 895-908, 2007.
- [3] S. Maiz, *Influencia de la inercia rotacional de una masa sobre las vibraciones transversales libres de elementos estructurales*, Tesis Magíster en Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 2007.

Agradecimientos

El presente trabajo fue auspiciado por la Secretaria General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, por la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT) y por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Los autores expresan su agradecimiento al Ing. José Luis Pombo, jefe del Laboratorio de Vibraciones Mecánicas de la UNS, por su generosa colaboración y al Sr. Osvaldo Álvarez (CIC) por su participación en la elaboración de los modelos.