FORO DOCENTE DEL AREA MECANICA DE LAS INGENIERIAS
FoDAMI

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA

I CAIM 2008
Primer Congreso Argentino
de Ingeniería Mecánica
Octubre 2008

MEF, ¿qué se esconde detrás de los paquetes comerciales? Un ejemplo para la conducción del calor

Marta G. Caligaris y Georgina B. Rodríguez

Grupo Ingeniería & Educación
Facultad Regional San Nicolás – Universidad Tecnológica Nacional
Colón 332, (2900) San Nicolás, Argentina
e-mail: gie@frsn.utn.edu.ar.

RESUMEN

El comportamiento de los sistemas continuos generalmente se expresa mediante ecuaciones diferenciales con sus adecuadas condiciones de contorno. Aunque exista solución analítica, muchas veces es conveniente recurrir a métodos de aproximación. Los dos métodos más usuales en la resolución de las ecuaciones diferenciales que surgen en los problemas de ingeniería son el de diferencias finitas y el de elementos finitos. El método de diferencias finitas se caracteriza por su simplicidad conceptual y fácil implementación, pero el método de elementos finitos presenta mayor generalidad y versatilidad para tratar todo tipo de problemas.

Los alumnos de ingeniería deben aprender a describir matemáticamente los problemas que se les presentarán en la vida profesional. Aunque lo más probable sea que usen un programa comercial diseñado específicamente para resolverlos, es importante que conozcan la esencia del método de solución.

Con este objetivo se diseñó una interfaz en la que se utiliza el método de elementos finitos, basado en una formulación residual: el método de Galerkin [1-2]. En esta ventana puede obtenerse la solución de diferentes problemas de conducción de calor, en una o dos dimensiones, estacionarios o dependientes del tiempo [3]. Los resultados se presentan gráficamente, de la misma manera que en la mayoría de los programas comerciales.

La ventana que se ofrecerá a los alumnos imita la oferta de los programas comerciales, con obvias limitaciones para el tamaño y tipo de problemas que pueden estudiarse. Lo que la hace interesante desde el punto de vista educativo, es que brinda la oportunidad de analizar el código empleado y permite que se lo modifique.

Este paquete se ha realizado utilizando Maple 11. Si se desea trabajar con un mayor volumen de datos se deberá recurrir a un lenguaje de programación como Fortran o Pascal, en los que podrá adaptarse el código de Maple, y un graficador adecuado.

Palabras Claves: conducción del calor, MEF, ventana personalizada.

1. INTRODUCCIÓN

Cuando diferentes partes de un cuerpo están a distintas temperaturas, el calor fluye desde la parte más caliente hacia la más fría. Hay tres formas distintas en las que esta transferencia de calor tiene lugar: conducción, convección y radiación. En líquidos y gases la convección y la radiación son importantes, pero en los sólidos no hay convección y la radiación es generalmente despreciable.

En este trabajo sólo se considerará la conducción de calor en sólidos. La ecuación de conducción del calor (Ecuación 1) se escribe, para sólidos no isótropos y cuando hay generación de calor en el sólido:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)=Q(x,y,z,t)+\rho\, c\frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad (1)$$

siendo k_i las conductividades térmicas en las direcciones correspondientes, ρ la densidad y c el calor específico del sólido, Q el calor generado por unidad de volumen por unidad de tiempo y la temperatura ϕ en un punto P(x, y, z) una función continua de x, y, z, t.

La ecuación de conducción del calor se resuelve sujeta a ciertas condiciones iniciales y de frontera adecuadas. Las condiciones de frontera más utilizadas en la solución de problemas de conducción de calor por elementos finitos son: temperatura prescrita, donde se especifica la temperatura de un borde; o flujo prescrito, donde se especifica el flujo a través de un borde.

En la Figura 1 se muestra la ventana de inicio de la aplicación que se describe en este trabajo. Allí se presentan los diferentes problemas que se pueden resolver, que matemáticamente son casos particulares de la Ecuación 1. Desde allí se accede a dos ventanas diferentes, según se trabaje en una o dos dimensiones.

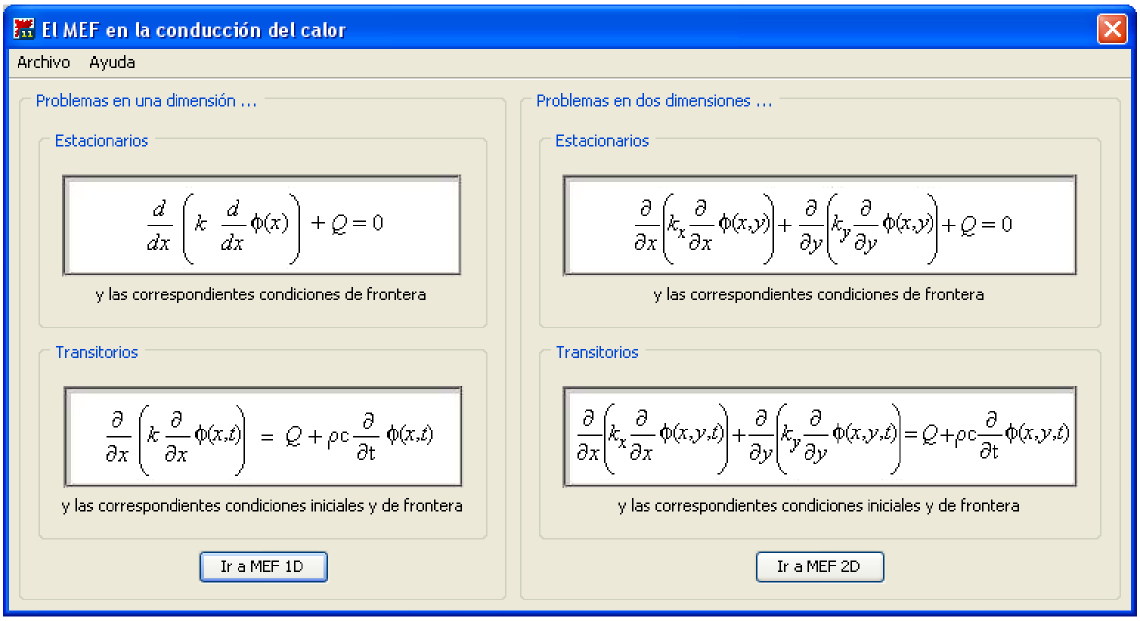

Figura 1. Ventana de inicio de la aplicación

2. EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

El método de elementos finitos es un método numérico ampliamente utilizado para resolver distintos problemas que surgen en casi todas las especialidades de ingeniería.

La discretización en elementos finitos transforma el problema original, en un problema con un número finito de incógnitas, dividiendo el dominio en elementos y expresando la función incógnita en términos de funciones de aproximación conocidas dentro de cada elemento: $\phi \approx T = \sum a_i N_i$. Estas funciones, también llamadas de interpolación o de forma, se definen a partir de los valores de la incógnita en puntos específicos llamados nodos. Los valores en los nodos y las funciones de forma para los elementos definen el comportamiento de la función buscada.

2.1. Problemas estacionarios

El punto de partida para hallar una solución mediante el método de elementos finitos es la existencia de una forma integral equivalente que describa el comportamiento del sistema en estudio. Si se analiza el problema de resolver la ecuación de Poisson, llamando A(ϕ) y B(ϕ) a los operadores correspondientes a la ecuación diferencial y a las condiciones de frontera, la forma integral equivalente se obtiene multiplicando las expresiones A y B por funciones de peso e integrando sobre el dominio de definición de cada ecuación. La expresión obtenida cuando se realiza una integración por partes, recibe el nombre de forma integral débil.

Expresando la solución aproximada, T, como combinación lineal de las funciones de forma y sustituyendo ϕ por T en la expresión integral se obtiene su forma aproximada, denomina expresión de residuos ponderados:

$$\int_{\Omega} W\, A(T)\, d\Omega \quad + \quad \oint_{\Gamma} \overline{W}\, B(T)\, d\Gamma \quad = \quad 0 \tag{2}$$

Sustituyendo la aproximación de la incógnita en la forma integral débil, y eligiendo como funciones de peso las mismas funciones de forma, N_i, se obtiene un sistema de ecuaciones de la forma $K^{(e)}\, \mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{f}^{(e)}$, siendo:

$$k_{ij} = \int_{\Omega^{(e)}} \left(k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + k_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega \tag{3}$$

$$f_i = \int_{\Omega^{(e)}} Q\, N_i\, d\Omega \; + \; \int_{S^{(e)}} q_i\, dS \tag{4}$$

donde i, j varían entre 1 y n (cantidad de nodos de los elementos) y el vector **a** está constituido por las incógnitas a_i.

Ensamblando las ecuaciones de cada elemento, se obtiene el sistema de ecuaciones algebraicas K **a** = **f**. Para que este sistema tenga solución única, una o más incógnitas deben especificarse. Esto se logra incorporando las condiciones de frontera.

2.2. Problemas dependientes del tiempo

Existen distintas técnicas para obtener las ecuaciones correspondientes a problemas dependientes del tiempo. Lo más usual es considerar una discretización del dominio espacial de la forma habitual. Así, para un elemento de n grados de libertad:

$$T^{(e)}(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x, y, z)\, a_i(t) \qquad (5)$$

donde $a_i(t)$ son las temperaturas en los nodos, que dependen del tiempo. A partir de aquí se derivan las ecuaciones elementales.

Para un elemento típico de dominio $\Omega^{(e)}$ y contorno $S^{(e)}$, las ecuaciones elementales resultan:

$$C_{n\,x\,n}{}^{(e)}\, \dot{\mathbf{a}}^{(e)} + \left(K_{n\,x\,n}{}^{(e)} + Kc_{n\,x\,n}{}^{(e)} \right) \mathbf{a}^{(e)} + \mathbf{f}^{(e)}(t) = \mathbf{0} \qquad (6)$$

donde:

$$c_{ij} = \int_{\Omega^{(e)}} \rho\, c\, N_i\, N_j\, d\Omega \qquad (6a)$$

$$k_{ij} = \int_{\Omega^{(e)}} \left(k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + k_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega \qquad (6b)$$

$$kc_{ij} = \int_{S_c{}^{(e)}} h\, N_i\, N_j\, dS \qquad (6c)$$

$$f_i = \int_{\Omega^{(e)}} Q\, N_i\, d\Omega \; + \int_{S^{(e)}} q_i\, dS \qquad (6d)$$

Ensamblando las ecuaciones elementales, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. La solución del problema se alcanza cuando se resuelven estas ecuaciones para encontrar las temperaturas **a**, teniendo en cuenta las condiciones iniciales correspondientes.

Existen muchos métodos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. En este trabajo se utilizan algoritmos basados en métodos de diferencias finitas. Todos ellos pueden escribirse de la forma general:

$$\left(\theta\, K + \frac{1}{\Delta t} C \right) \mathbf{a}_{n+1} = \left(-(1-\theta)\, K + \frac{1}{\Delta t} C \right) \mathbf{a}_n + (1-\theta)\, \mathbf{f}_n + \theta\, \mathbf{f}_{n+1} \qquad (7)$$

donde Δt es el paso temporal, los términos del lado derecho son conocidos y los elementos de $\mathbf{a}_{n+1}$ son las incógnitas.

La ecuación (7) representa una familia general de relaciones de recurrencia: eligiendo diferentes valores de θ, se obtienen los algoritmos particulares. En este trabajo puede elegirse entre el método de Euler ($\theta = 0$), el de Crank-Nicolson($\theta = 1/2$), el de Galerkin ($\theta = 2/3$), o el de diferencias hacia atrás ($\theta = 1$).

Para un θ dado la ecuación (7), que es en general un sistema de ecuaciones algebraicas, permite calcular los valores de **a** en el tiempo n+1, a partir de los valores **a**, ya calculados para el tiempo n. El cálculo se inicia con los valores de **a** dados en la condición inicial.

3. LA VENTANA DE PROBLEMAS EN UNA DIMENSIÓN

En esta parte de la aplicación pueden resolverse problemas estacionarios o transitorios en una dimensión. Para describir el problema a resolver, se deben ingresar los datos que lo caracterizan: las propiedades del material, la fuente de calor, las condiciones de frontera, y las condiciones iniciales en caso de trabajar con un problema transitorio.

En la figura 2 se muestra la ventana correspondiente, junto con las ventanas de ingreso de las propiedades del material, fuente de calor, condiciones de frontera, y condiciones iniciales, en caso de un problema transitorio, disponibles en los botones de la barra de herramientas. En cada una de ellas, se permite ingresar los datos necesarios, o dejar los que están por defecto. En el caso del material, se presenta un combo que presenta una lista desplegable con distintos materiales, y la opción de ingresar uno que no esté en la lista, caso en el que se deberán ingresar en las casillas correspondientes los valores de las propiedades de dicho material.

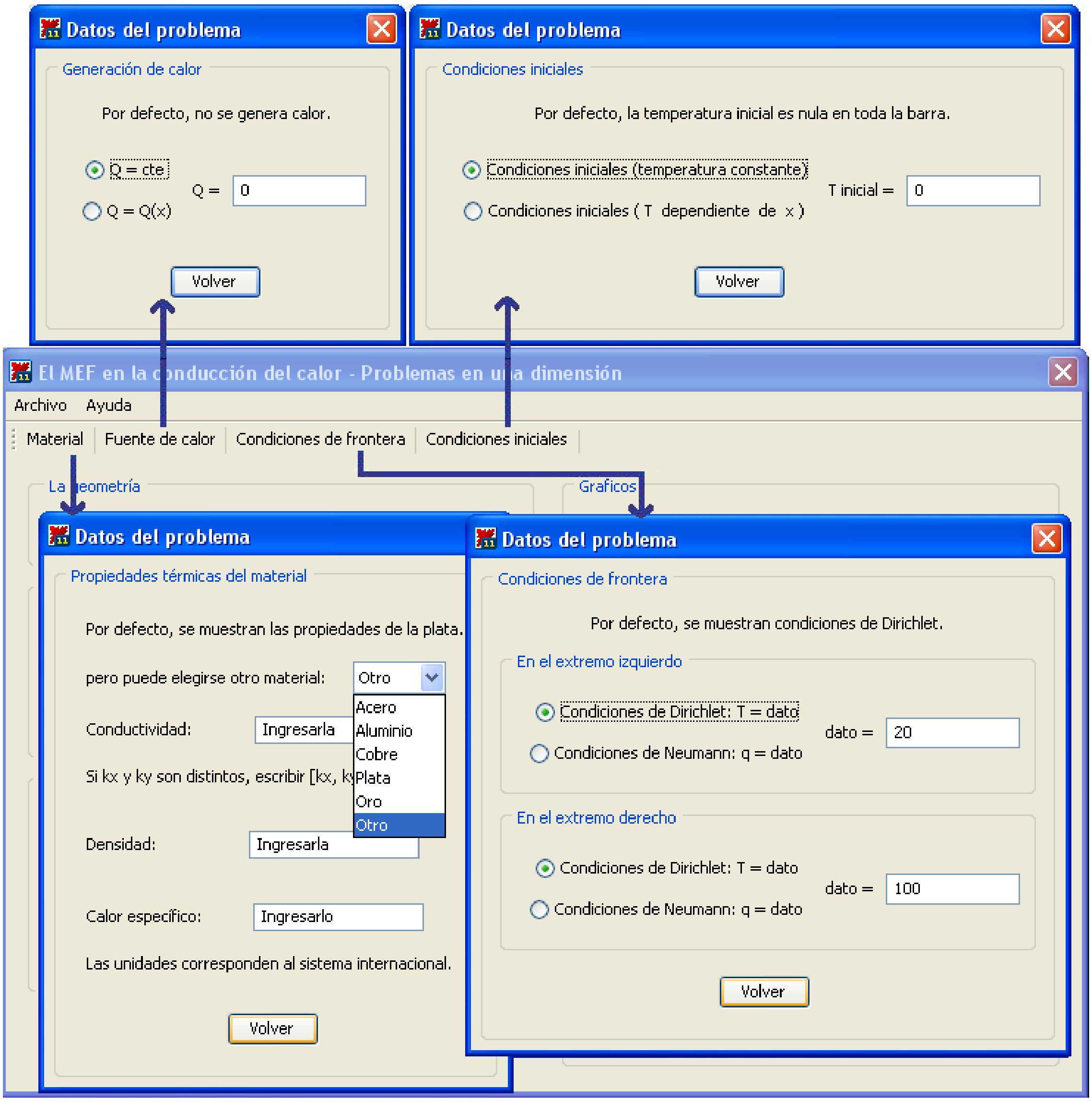

Figura 2. Detalle de la barra de herramientas de los problemas en 1D

3.1. Problemas estacionarios

Una vez cargados el material, la fuente de calor y las condiciones de frontera desde la barra de herramientas, se deberán ingresar la geometría del problema y la discretización espacial para un problema estacionario. En el caso de un problema unidimensional, sólo se necesita la longitud de la barra para describir la geometría.

Esta ventana ofrece como posibilidades de discretización espacial elementos de dos y tres nodos, y permite ver las aproximaciones realizadas en los dos casos individual o simultáneamente, con la cantidad de elementos determinada por el usuario.

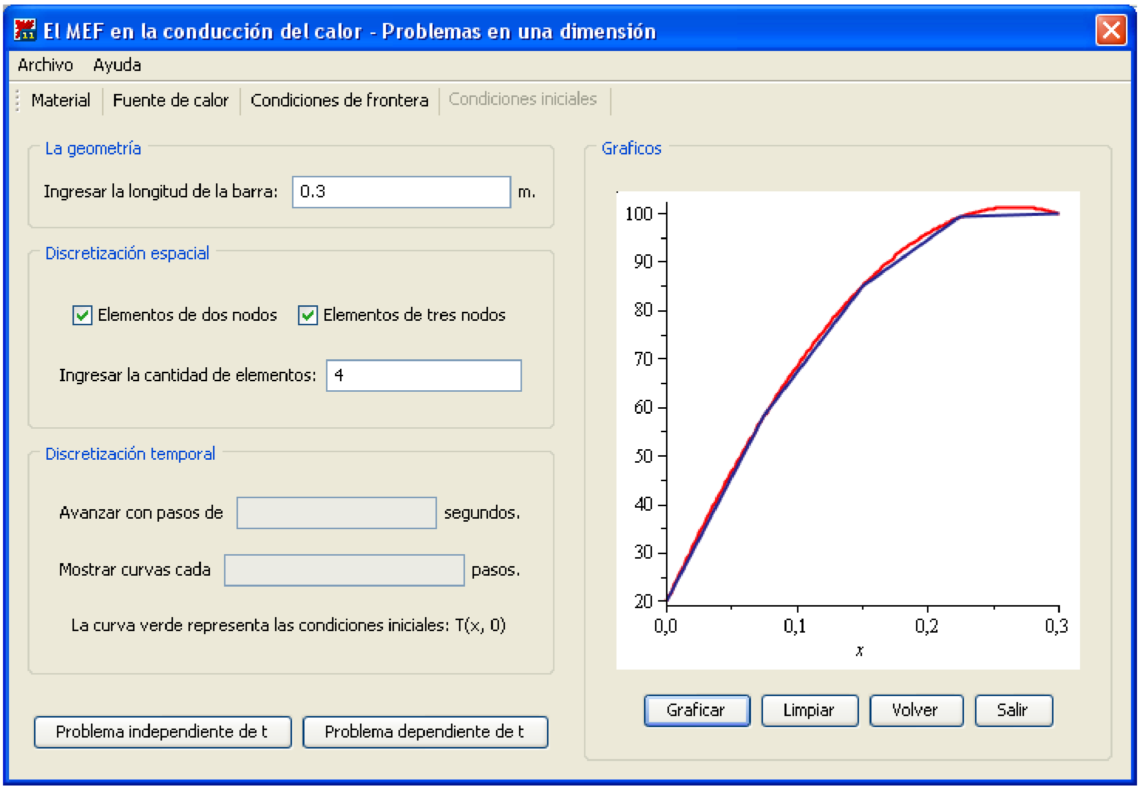

Figura 3. Ventana correspondiente a los problemas estacionarios en 1D

El problema que se muestra resuelto en la figura 3 corresponde a una barra de plata de 0,3 m de longitud, con condiciones de frontera por defecto (20°C y 100°C) y fuente de calor variable con la posición. Se trabajó con una discretización espacial de 4 elementos de dos y tres nodos simultáneamente. Para obtener el gráfico, una vez ingresados todos los datos, se debe pulsar el botón **Graficar**. Con el botón **Limpiar** se borran los datos ingresados en la ventana, no así los datos que se ingresaron desde la barra de herramientas.

En este ejemplo se observa con claridad la diferencia entre la aproximación lineal y cuadrática.

Como el problema es estacionario, aparecen deshabilitados el botón para ingresar las condiciones iniciales y las opciones para ingresar los datos de la discretización temporal. En la próxima sección se analizará la resolución de problemas transitorios, con las condiciones apropiadas.

3.2. Problemas transitorios

Para resolver un problema transitorio, además de ingresar los datos de material, fuente de calor y condiciones de frontera de la misma manera que para los problemas estacionarios, se deben habilitar las opciones de discretización temporal y el botón de las condiciones iniciales, pulsando el botón **Problema dependiente de t** que se encuentra en la parte inferior de la ventana. Al hacerlo se ofrece también la posibilidad de elegir el método de diferencias finitas a utilizar, que por defecto es el método de Galerkin. Con respecto a los parámetros de la discretización temporal, además de ingresar el tamaño de los pasos en el tiempo se puede optar por mostrar las curvas salteadas para obtener un dibujo más representativo del proceso.

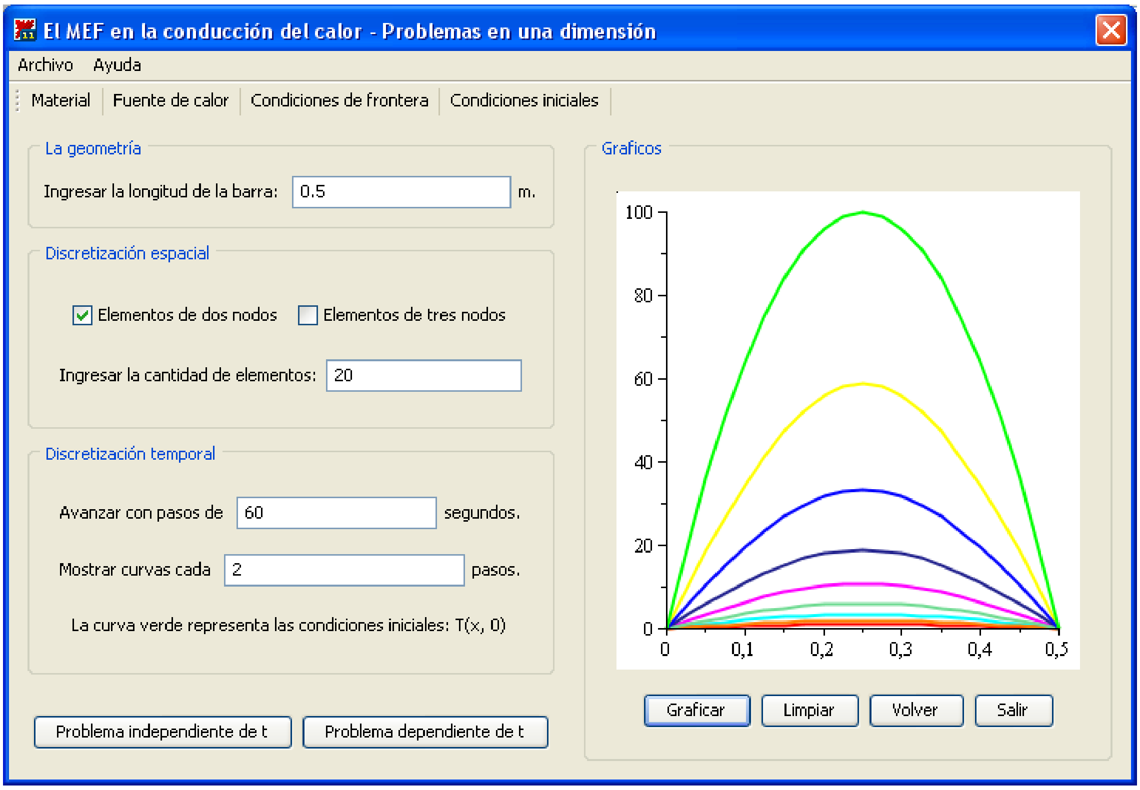

Figura 4. Ventana correspondiente a los problemas transitorios en 1D

El problema que se muestra resuelto en la figura 4 corresponde a una barra de cobre de 0,5 m de longitud, con condiciones de Dirichlet de temperatura nula en ambos extremos de la barra y sin fuente de calor. La temperatura inicial depende de la posición, como muestra la curva verde de la figura. Se trabajó con una discretización espacial de 20 elementos de dos nodos. Para la discretización temporal, se eligió un paso de tiempo de 60 segundos, y se optó por mostrar las curvas obtenidas cada dos pasos de tiempo.

Con las condiciones establecidas, se resolvieron 16 sistemas de 21 ecuaciones lineales con 21 incógnitas. En el caso de elementos de dos nodos, estos sistemas resultan tridiagonales. Para resolverlos se programó el método de Thomas debido a la notable disminución en la cantidad de operaciones necesarias para obtener la solución, con respecto a otros métodos.

4. LA VENTANA DE PROBLEMAS EN DOS DIMENSIONES

Esta ventana ofrece como posibilidades de discretización espacial elementos triangulares de tres nodos y rectangulares de cuatro nodos. En los dos casos las funciones de forma correspondientes son lineales.

El mallado que se realiza se ha programado de manera de obtener una grilla regular y poder así mostrar los resultados de los cálculos con comandos gráficos propios de Maple [4].

Las ventanas de ingreso de las propiedades del material, fuente de calor, condiciones de frontera, y condiciones iniciales, en caso de un problema transitorio, disponibles en los botones de la barra de herramientas son similares a las ya presentadas en la ventana de Problemas en una dimensión, por lo que no se las mostrará aquí.

4.1. Problemas estacionarios

En la figura 5 se muestra la ventana correspondiente. El problema que se muestra resuelto en esta figura corresponde a una placa cuadrada de acero de 0,3 m de lado, con condiciones de frontera por defecto (100°C en la arista izquierda y 20°C en las otras tres aristas) y sin fuente de calor. Se trabajó con una discretización espacial de 841 elementos rectangulares de cuatro nodos. El total de nodos de la discretización es 900.

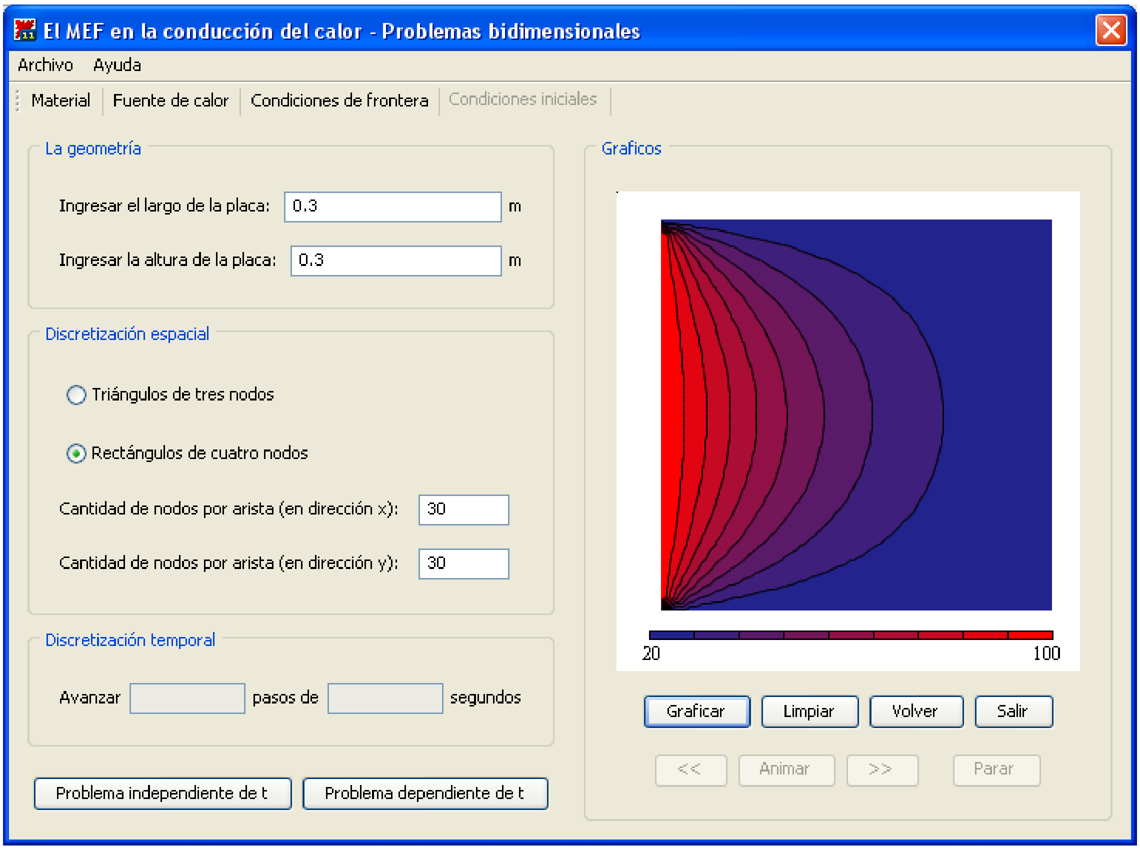

Figura 5. Ventana correspondiente a los problemas estacionarios en 2D

4.2. Problemas transitorios

Los resultados de los problemas transitorios en dos dimensiones no pueden mostrarse en un único gráfico como en los problemas unidimensionales. En este trabajo se disponen los resultados en los distintos tiempos analizados de manera de poder mostrarlos secuencialmente y ver así el cambio de las temperaturas en el tiempo

Cuando se resuelve un problema transitorio, el botón **Problema dependiente de t** que se encuentra en la parte inferior de la ventana activa los botones que se ven deshabilitados en la figura 5, además de habilitar los elementos análogos a los de la ventana que se describió para los problemas transitorios en una dimensión espacial. Con estos botones, figura 6, se controla la animación de los resultados obtenidos, permitiendo iniciar o detener la animación y avanzar o retroceder cuadro a cuadro.

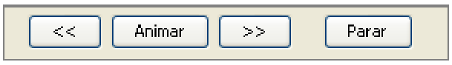

Figura 6. Botones de control de las animaciones

En la figura 7 se observa, en dos instantes diferentes, la distribución de temperaturas en una placa cuadrada de plata de 0,3 m de lado, con condiciones de frontera de temperatura nula en las cuatro aristas y sin fuente de calor, que inicialmente se encontraba a 100 ºC. Se trabajó con una discretización espacial de 841 elementos rectangulares de cuatro nodos y con un paso de tiempo de 10 s. Se ha elegido mostrarlos de este modo, ya que en la ventana sólo se ve el gráfico correspondiente a la distribución inicial de temperaturas, que es un dato del problema.

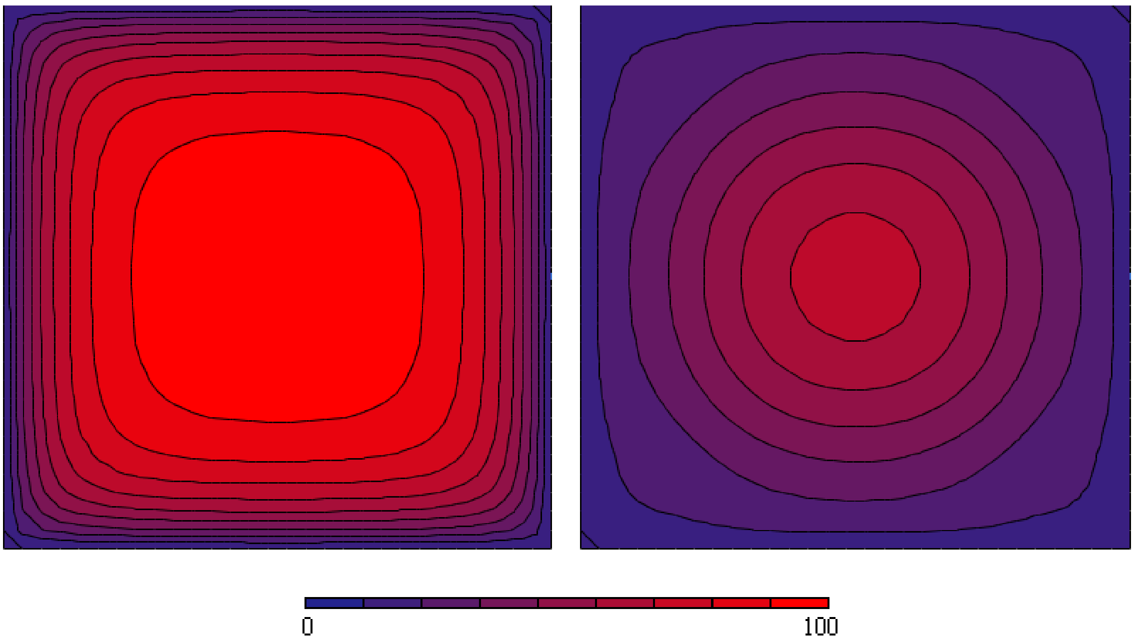

Figura 7. Alguno de los gráficos de animaciones correspondientes a los problemas transitorios en 2D

5. CONCLUSIONES

El software Maple resulta una herramienta de programación muy versátil para lograr aplicaciones didácticas y estéticamente agradables, que pueden utilizarse para resolver una gran variedad de problemas.

Las ventanas mostradas en este trabajo, realizadas en Maple 11, tratan de asemejarse a las ofrecidas por los paquetes comerciales disponibles para trabajar específicamente con el método de elementos finitos. Una ventaja diferencial de esta herramienta didáctica es que el código completo de los procedimientos utilizados para la implementación de los métodos está disponible para los alumnos. Dichos programas están escritos en código de programación de Maple, y son fáciles de comprender, aún para aquellas personas que no estén habituadas a programar en este lenguaje. Lamentablemente, la simplicidad de la programación se contrapone con limitaciones en las dimensiones del mallado que puede generarse, aunque esto no representa un impedimento para cumplir con los objetivos propuestos al diseñar esta aplicación con fines didácticos.

El código utilizado no se muestra en este trabajo por una cuestión de espacio.

Las autoras del presente trabajo consideran además que la incorporación de tales ventanas hace posible que se modifique la forma de enseñar, permitiendo incorporar la “visualización” y la “exploración” en las actividades matemáticas de los estudiantes. De esta manera, los alumnos podrán comprender con mayor claridad conceptos que pueden resultar abstractos y lograr así un aprendizaje significativo y duradero de los mismos.

6. REFERENCIAS

[1] K.H. Huebner, E.A. Thornton y T.G. Byrom, *The Finite Element Method for Engineers*, John Wiley & Sons, (1995)

[2] O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, *El Método de los Elementos Finitos*. Mc Graw Hill – CIMNE. Volumen 1, (1999)

[3] H.S. Carslaw y J.C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*. Second Edition. Clarendon Press. Oxford, (1959)

[4] N.M Dai, A Language to Solve Finite Elements Problems, The Mathematica Journal, **8-**1 126-146 2001