IV CAIM 2014
Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina
FORO DOCENTE DEL AREA MECANICA DE LAS INGENIERIAS
FoDAMI

PROBLEMAS QUE VINCULAN EL CÁLCULO AVANZADO Y LA ESPECIALIDAD: VIBRACIONES MECÁNICAS

Caligaris*, Marta G., Rodríguez, Georgina B. y Laugero, Lorena F.

Grupo Ingeniería & Educación
Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional San Nicolás
Colón 332, (2900) San Nicolás, Argentina
e-mail: gie@frsn.utn.edu.ar

RESUMEN

Uno de los objetivos de la asignatura Cálculo Avanzado es que los alumnos puedan abordar los diferentes temas que se desarrollan no sólo como herramientas aisladas de cálculo, sino como herramientas para resolver problemas de la especialidad. Para ello se ha planificado trabajar sobre una serie de problemas básicos que dan origen a la carrera. En ellos se deben aplicar los distintos métodos estudiados en función de las potencialidades y limitaciones que presenta cada uno de ellos.

Uno de los problemas seleccionados es el de las vibraciones mecánicas [1]. Si bien el movimiento armónico es el más simple de tratar, no ocurre lo mismo con el movimiento de muchos sistemas de vibración. Dado que en muchos casos las vibraciones son periódicas, pueden utilizarse las series de Fourier para obtener soluciones [2].

Las integrales que permiten calcular los coeficientes de la serie de Fourier asociada a una función, no siempre pueden ser resueltas fácilmente y sin inconvenientes. Por ejemplo, cuando se necesita determinar experimentalmente la amplitud de una vibración usando un sensor de vibraciones, la función a desarrollar no está dada por medio de una ley sino que se conoce una serie de puntos que pertenecen a la misma. En estos casos, los coeficientes de la serie de Fourier podrán ser obtenidos utilizando integración numérica [3].

En este trabajo se mostrarán situaciones problemáticas que se plantearán a los estudiantes y el análisis que se efectuará con cada una de ellas. El alumno, enfrentado a este tipo de situaciones, podrá desarrollar las competencias necesarias para poder determinar y fundamentar cuándo es pertinente aplicar métodos numéricos.

Palabras Claves: *Cálculo avanzado, Vibraciones mecánicas, Serie de Fourier, Integración numérica.*

1. INTRODUCCIÓN

Si bien desde el año 2004 se dictaban en la carrera de Ingeniería Mecánica de la FRSN las asignaturas Análisis Numérico y Cálculo Avanzado, como respuesta a los requerimientos planteados por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU) en el proceso de Acreditación de Carreras de Ingeniería, durante el ciclo lectivo 2007 se hizo efectiva la incorporación al plan de estudio de dicha carrera una única materia donde se desarrollan los contenidos de las dos asignaturas mencionadas. El objetivo principal de la misma es proporcionar a los alumnos una visión general de los métodos analíticos y numéricos, para ser utilizados en las asignaturas de la especialidad al resolver problemas avanzados.

A los efectos de permitir que los docentes dispusieran del tiempo necesario para enseñar los temas que se desarrollan en la materia con suficiente profundidad, a partir de año 2009, se incrementa la carga horaria total de la materia a seis horas semanales dividiéndola en dos bloques: Análisis Numérico y Matemática Superior (Resolución C.A. Nº 163/09).

Para que los alumnos puedan comprender los diferentes temas de cada uno de los bloques en forma integrada, no sólo como herramientas aisladas de cálculo, se ha propuesto una serie de problemas básicos de la carrera. En ellos se deben aplicar los distintos métodos estudiados en función de las potencialidades y limitaciones que presentan.

El objetivo general de este trabajo es mostrar algunas situaciones problemáticas relacionadas con temas de vibraciones mecánicas que se les plantearán a los alumnos de Cálculo Avanzado, junto con el análisis y la resolución de las mismas.

En general las vibraciones mecánicas son periódicas. Cualquier función periódica dependiente del tiempo puede ser representada por una serie Fourier [2], lo que implica calcular integrales definidas para determinar sus coeficientes, algo que no siempre se puede realizar en forma analítica. Por ejemplo, pueden surgir inconvenientes en el cálculo de las primitivas o, en algunos problemas puede no conocerse la ley de la función, sino una serie de puntos que la definen. En estos casos, los coeficientes de la serie de Fourier pueden ser obtenidos mediante integración numérica [3, 4].

Frente a este tipo de situaciones, el alumno podrá desarrollar las competencias necesarias para poder determinar y fundamentar cuándo es pertinente aplicar métodos analíticos o numéricos.

2. LA MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO DE LAS CIENCIAS

La teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, nacida en 1982, reflexiona acerca de la vinculación que debe existir entre la matemática y las ciencias que la requieren, y se fundamenta en los siguientes paradigmas: a) la matemática es una herramienta de apoyo y disciplina formativa, b) la matemática tiene una función específica en el nivel universitario y c) los conocimientos nacen integrados [5].

Esta teoría se basa en la idea de que la matemática en carreras de ingeniería es un medio y no un fin en sí misma. Teniendo esto en cuenta y considerando los factores que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje, esta teoría plantea cinco fases de estudio: curricular, didáctica, epistemológica, de formación docente y cognitiva [6]. Es claro que en el ambiente de aprendizaje todas están presentes e interactúan entre sí con algún efecto ponderado sobre las demás.

La fase curricular se fundamenta en la necesidad de que en los cursos de matemática el estudiante adquiera las herramientas que utilizará en las materias específicas de su carrera. Se analizan las relaciones entre la matemática y las distintas especialidades de ingeniería, entre otras.

La fase didáctica contempla un proceso metodológico para el desarrollo de competencias profesionales referidas a la resolución de problemas contextualizados. Así, es posible fomentar el desarrollo de habilidades para la transferencia del conocimiento.

En la fase epistemológica se ha detectado que si bien gran parte de la matemática que se incluye en las asignaturas de Ingeniería nace en el contexto de problemas específicos de otras áreas del conocimiento, a través del tiempo pierde este contexto para transformarse en una matemática “pura” que deja de tener sentido para los estudiantes que no van a ser matemáticos.

La fase cognitiva ha determinado que el alumno debe transitar entre los registros aritmético, algebraico, analítico, visual y contextual para construir y aprender el conocimiento. La transferencia entre las distintas representaciones de un objeto matemático, es clave en esta fase [6].

En la fase de formación docente se intenta que a través de la formación permanente los profesores tengan la oportunidad de reflexionar, discutir y aportar sus propios puntos de vista para construir una educación matemática en contexto, en carreras específicas de ingeniería [6].

La matemática en contexto ayuda al estudiante a construir su propio conocimiento en forma sólida y duradera al permitirle el desarrollo de habilidades mentales mediante el proceso de resolución de problemas vinculados con la carrera que ha elegido. En particular, hay estudios sobre la aplicación de la matemática en contexto para el tema series de Fourier [7].

3. VIBRACIONES MECÁNICAS

El movimiento vibratorio o la vibración es la variación o cambio de configuración de un sistema en relación al tiempo, en torno a una posición de equilibrio estable [8].

Las vibraciones pueden clasificarse como forzadas o libres, según si actúa o no una fuerza externa sobre el sistema; amortiguadas o no amortiguadas, si se disipa energía o no; lineales o no lineales, según el comportamiento de los componentes del sistema; y determinísticas o aleatorias, según se conozcan o no las fuerzas que actúan sobre el sistema [2].

Ejemplos de vibraciones aleatorias son los movimientos del suelo durante un terremoto. Estas vibraciones aleatorias no son periódicas. Si las vibraciones son periódicas, pueden utilizarse las series de Fourier para representarlas.

3.1. Desarrollo en Series de Fourier

Si x(t) es una función periódica de período p, su representación en serie de Fourier está dada por:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + b_n \cdot \mathrm{sen}(n \cdot \omega \cdot t) \right] \tag{1}$$

donde $\omega = \frac{2\pi}{p}$ es la frecuencia fundamental y a_0, a_1, a_2,…, b_1, b_2,… son los coeficientes de la Serie de Fourier, dados por:

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) \cdot dt = \frac{2}{p} \int_0^{p} x(t) \cdot dt \tag{2}$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) \cdot dt = \frac{2}{p} \int_0^{p} x(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) \cdot dt \tag{3}$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) \cdot \mathrm{sen}(n \cdot \omega \cdot t) \cdot dt = \frac{2}{p} \int_0^{p} x(t) \cdot \mathrm{sen}(n \cdot \omega \cdot t) \cdot dt \tag{4}$$

3.1.1. Aplicación de la serie de Fourier

A continuación, se presenta una actividad [1] que se les planteará a los alumnos, junto con el análisis de los resultados.

Actividad propuesta

Un sistema de leva-balancín como el que se muestra en la Figura 1, se utiliza para convertir el movimiento de rotación de un eje en un movimiento oscilante de una válvula. Determinar la función que describe el movimiento de la válvula, mediante un desarrollo en serie de Fourier.

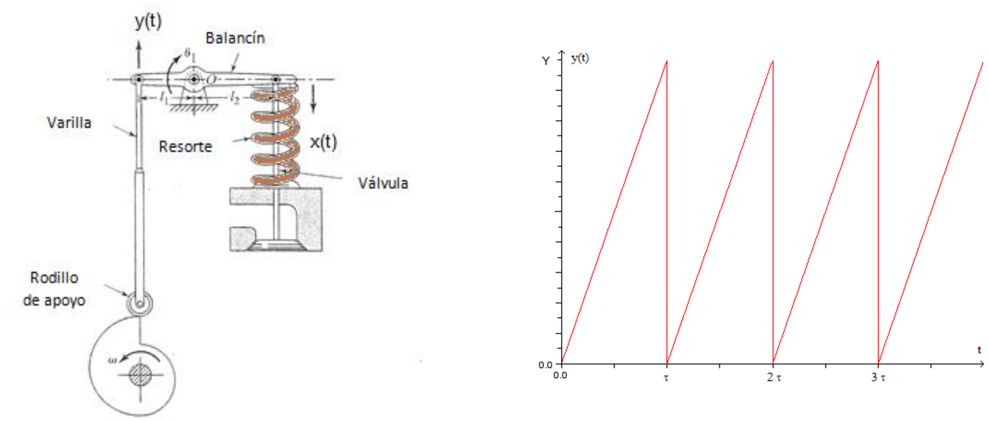


Figura 1. Sistema leva – balancín

Si y(t) denota el movimiento vertical de la varilla de empuje, el movimiento de la válvula x(t) puede ser determinado por la relación:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{y(t)}{l_1} = \frac{x(t)}{l_2} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{l_2}{l_1} y(t) \qquad (5)$$

donde el período es $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ e $y(t) = \frac{Y}{\tau} \cdot t$ para $0 \le t \le \tau$ siendo Y el valor máximo del movimiento vertical. Si $A = Y \cdot \frac{l_2}{l_1}$, entonces x(t) se pude expresar como:

$$x(t) = A \cdot \frac{t}{\tau} \qquad 0 \le t \le \tau \qquad (6)$$

Para calcular los coeficientes del desarrollo de Fourier de la función (6) se utilizan las expresiones (2), (3) y (4), donde todas las integrales se pueden resolver en forma analítica.

$$a_0 = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} A \cdot \frac{t}{\tau} \cdot dt = A \qquad (7)$$

$$a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} A \cdot \frac{t}{\tau} \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) \cdot dt = 0,\ b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} A \cdot \frac{t}{\tau} \cdot \mathrm{sen}(n \cdot \omega \cdot t) \cdot dt = -\frac{A}{n \cdot \pi} \quad n = 1,2,3,\ldots \qquad (8)$$

Por lo tanto, el desarrollo en serie de Fourier del movimiento de la válvula en el sistema leva – balancín está dado por:

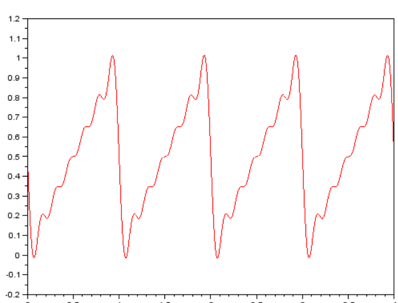
$$x(t) = \frac{A}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n \cdot \pi} \cdot sen(n \cdot \omega \cdot t) \tag{9}$$

El siguiente procedimiento, programado en SCILAB, permite obtener la gráfica de los primeros n términos del desarrollo de Fourier obtenido, considerando A = 1.

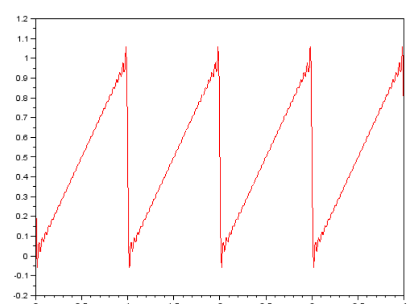
```
function [] = Serie_Fourier(per, n_per, n)
    A=1;      suma=A/2;
    deff('[x]= termino(j, t)','x= sin((2*j*(%pi)*t)/per)');
    t = 0:0.01:per*n_per;
    for i=1:n,
        suma = suma - A*termino(i, t)/(i*(%pi));
    end
   plot(t, suma, 'r');
endfunction
```

Los argumentos de este procedimiento son, respectivamente, el período de la función, la cantidad de períodos enteros que se quiere graficar, y el número de términos que se quiere calcular. Por ejemplo, para obtener la gráfica en cuatro períodos de los primeros seis términos del desarrollo de Fourier de la función (9), se ejecuta el comando **Serie_Fourier(1,4,6)**.

La Figura 2 muestra la gráfica de algunas sumas parciales de (9).



6 términos



28 términos

Figura 2. Gráficas correspondientes a los primeros n términos de la serie de Fourier

Se observa en la Figura 2 que, a mayor cantidad de términos, la suma parcial de la serie de Fourier aproxima mejor a la función que dio su origen (Figura 1). Además, la gráfica de 28 términos es propicia para discutir el fenómeno de Gibbs, que se refiere al comportamiento anómalo de la serie de Fourier cerca de los puntos en los que la función es discontinua.

3.2. Integración numérica

Para determinar experimentalmente la amplitud de una vibración usando un sensor de vibraciones, la función x(t) no está dada por medio de una ley sino que se conoce una serie de puntos que pertenecen a la misma. En este caso, los coeficientes a_0, a_n y b_n de la serie de Fourier deben ser obtenidos mediante técnicas de integración numérica.

Uno de los métodos de integración numérica más empleado debido a su simplicidad es la regla compuesta de los trapecios, cuya fórmula está dada por.

$$\int_a^b f(t)\cdot dt \approx \frac{h}{2}\cdot\left[f(a)+2\cdot\sum_{i=1}^{N-1} f(t_i)+f(b)\right] \tag{10}$$

donde $t_i = a + i\cdot h$ para $1 \le i \le N-1$. Si se aplica la regla de los trapecios para aproximar las integrales (2), (3) y (4), los coeficientes a_0, a_n y b_n de la serie de Fourier quedan definidos por:

$$a_0 = \frac{1}{N}\cdot\left[x(0)+2\cdot\sum_{i=1}^{N-1} x(t_i)+x(p)\right] \tag{11}$$

$$a_n = \frac{1}{N}\cdot\left[x(0)+2\cdot\sum_{i=1}^{N-1} x(t_i)\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot n}{p}\cdot t_i\right)+x(p)\right] \tag{12}$$

$$b_n = \frac{1}{N}\cdot\left[x(0)+2\cdot\sum_{i=1}^{N-1} x(t_i)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{2\cdot\pi\cdot n}{p}\cdot t_i\right)+x(p)\right] \tag{13}$$

Teniendo en cuenta que x(t) es una función periódica de período p, resulta que x(0) = x(p). Por lo tanto, las expresiones (11), (12) y (13) pueden escribirse de la siguiente forma:

$$a_0 = \frac{2}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} x(t_i) \tag{14}$$

$$a_n = \frac{2}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} x(t_i)\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot n}{p}\cdot t_i\right),\ b_n = \frac{2}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} x(t_i)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{2\cdot\pi\cdot n}{p}\cdot t_i\right) \tag{15}$$

3.2.1. Aplicación de la integración numérica

A continuación, se muestra una actividad [1] que se les planteará a los alumnos, junto con el análisis de los resultados.

Actividad propuesta

Las fluctuaciones de la presión del agua en una cañería, que se repiten en forma periódica, fueron medidas en intervalos de 0,01 segundos durante un período, según se muestra en la Tabla 1. Obtener una función que represente estas fluctuaciones a través del tiempo.

Tabla 1. Fluctuaciones de presión del agua en una cañería

Tiempo [s]	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12
Presión [10^4kN/m^2]	0	2	3,4	4,2	4,9	5,3	7	6	3,6	2,2	1,6	0,7	0

A partir de la observación de los datos dados en la Tabla 1 se puede determinar que las fluctuaciones de presión se repiten cada 0,12 segundos, es decir, el período es p = 0,12. Como el número de valores observados en cada período es n = 12, según (14) y (15) los coeficientes del desarrollo de Fourier están dados por:

$$a_0 = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{12} p_i \qquad (16)$$

$$a_n = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{12} p_i \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{0{,}12} \cdot t_i\right) \qquad n = 1,2,3 \qquad (17)$$

$$b_n = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{12} p_i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{0{,}12} \cdot t_i\right) \qquad n = 1,2,3 \qquad (18)$$

El siguiente procedimiento permite determinar y graficar una cierta cantidad de términos del desarrollo de la serie de Fourier, utilizando las expresiones (16), (17) y (18) para el cálculo de las integrales que definen a los coeficientes a_0, a_n y b_n.

```
function Desarrollo_Fourier(vi, vd, per, n_per, n)
    N_N=size(vi);
    N = N_N(2);
    a0 = 2/N*sum(vd);
    suma = a0/2;
    deff('[x] = termino_seno(k, t)',...
               'x = sin((2*j*(%pi)*t)/per)');
    deff('[x] = termino_coseno(k, t)',...
               'x = cos((2*j*(%pi)*t)/per)');
    t = 0:0.01:per*n_per;
    for j=1:n,
        a=0;    b=0;
        for i=1:N,
```

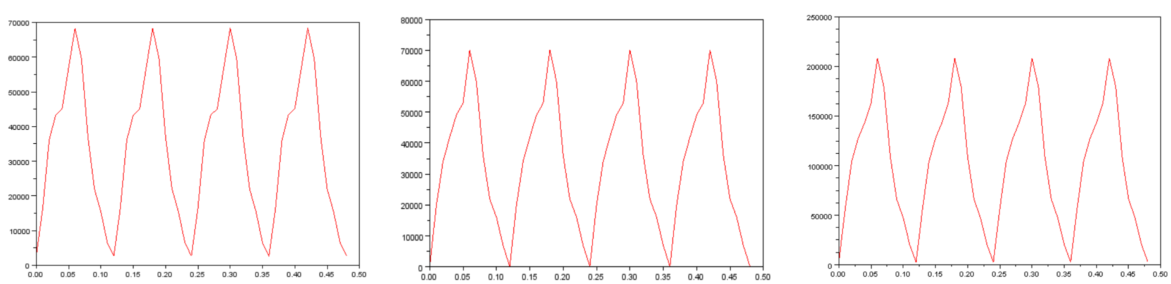
```
                a=a + vd(i)*cos((2*j*(%pi)*vi(i))/per);
                b=b + vd(i)*sin((2*j*(%pi)*vi(i))/per);
            end
            a(j)=2/N*a;
            b(j)=2/N*b;
            suma= suma+...
                  a(j)*termino_coseno(j,t)+...
                  b(j)*termino_seno(j,t);
        end
        plot(t, suma,'r');
    endfunction
```

Para la ejecución de este procedimiento, se debe tener presente que **vi** y **vd** son dos listas que representan los valores observados de la variable independiente y dependiente, respectivamente; **per** es el período de la función; **n_per** es la cantidad de períodos enteros que se quiere graficar y **n** indica el número de términos a calcular.

Para resolver la actividad propuesta, se definen los vectores tiempo y presión con los datos de la Tabla 1, con los comandos que se muestran a continuación:

```
tiempo = 0:0.01:0.11;
presion = 10000*[0,2,3.4,4.2,4.9,5.3,7.0,6.0,3.6,2.2,1.6,0.7];
```

Se muestran en la Figura 3 las gráficas en cuatro períodos de los tres y seis primeros términos del desarrollo de Fourier, obtenidas al ejecutar el procedimiento **Desarrollo_Fourier** con los argumentos **vi = tiempo**, **vd = presion**, n**_per = 4** y **n = 3** en el primer caso, y **n = 6** en el segundo caso.



(a) (b) (c)

Figura 3. Gráfica correspondiente a los primeros 3, 6 y 15 términos del desarrollo de Fourier

Se ve en estos gráficos que con 3 términos no se alcanza la amplitud de los datos dados en la tabla. En la imagen mostrada en la Figura 3.a, se observa que la función no asume nunca el valor cero, cuando 0 es un dato de la presión en la tabla. En cambio, con 6 términos se logra la amplitud

[0, 70000]. ¿Qué ocurre si se intenta graficar una suma parcial con más términos? En la Figura 3.c, se muestra la gráfica de la suma parcial correspondiente a n = 15.

Se observa en la Figura 3.c que el conjunto imagen de esta función supera ampliamente el valor máximo 70000 dado en la tabla de datos. ¿Qué ocurrió? El problema radica en la imprecisión de la fórmula de cuadratura del trapecio con 12 puntos para el cálculo de la integral de funciones periódicas con una frecuencia alta [9]. Dado que no se tienen más puntos de la función, no es posible mejorar la aproximación con la fórmula del trapecio. En este caso, se deberá recurrir a fórmulas de cuadraturas que interpolen a la función con polinomios de grado mayor.

4. APLICACIÓN EN EL AULA

El planteo de los problemas presentados en este trabajo forma parte de un cambio en la metodología de enseñanza en la asignatura Análisis Numérico de la FRSN, dándole una mayor importancia a la aplicación de los métodos en problemas concretos de ingeniería, en lugar del planteo de ejercicios de enunciado meramente matemático. De esta manera, los alumnos, además de aprender los métodos numéricos, ven realmente su utilidad, logrando una comprensión significativa de la materia.

Por otro lado, se pretende vincular entre sí los dos bloques en los que se divide Cálculo Avanzado: Análisis Numérico y Matemática Superior, y enfatizar la relación de esta matemática con la Ingeniería.

Para analizar el grado de significatividad con que los alumnos comprenden el uso de los métodos de integración numérica en el cálculo de una serie de Fourier, se planteará un trabajo práctico con situaciones problemáticas. Si bien la resolución de problemas es a menudo la única manera factible de probar si los estudiantes comprenden significativamente las ideas que se desarrollan, se debe ser muy prudente. Esto se debe a que la resolución de problemas es un método válido para medir la compresión significativa pero la incapacidad por parte del alumno de solucionar un problema no implica necesariamente la no comprensión [10]. La correcta resolución de problemas exige muchas otras habilidades y cualidades. Por lo tanto, ser incapaz de resolver un problema quizá refleje deficiencias en estos últimos factores, en lugar de carencia de comprensión genuina; o, en el peor de los casos, reflejaría un orden inferior de comprensión que el manifestado en la capacidad para aplicar correctamente los principios al solucionar problemas.

Finalmente, se realizará una encuesta de opinión para recabar información acerca del interés despertado en los alumnos acerca de esta metodología de trabajo.

5. CONCLUSIONES

Relacionar los métodos numéricos con problemas propios de la especialidad, es una estrategia que permite despertar el interés de los estudiantes por el estudio de esta rama de la matemática. Plantear la enseñanza de los métodos numéricos en el contexto de la ingeniería, es una alternativa para que los alumnos construyan una aprendizaje significativo e integral.

Por otro lado, es importante que los alumnos sean capaces de realizar procedimientos en algún software matemático, que les permita por un lado realizar gráficas según los requerimientos de los problemas a resolver, y por otro implementar métodos numéricos. Esto último, no sólo les permitirá resolver problemas de mayor porte, que a mano serían imposibles de resolver sino que además, al programar los métodos, cierran el proceso de aprendizaje de los mismos.

6. REFERENCIAS

[1] S. Rao, Mechanical Vibrations. Cuarta edición, Editorial Pretince Hall, Estados Unidos, 2004.

[2] D. Zill, Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. 7° edición, Editorial Thomson Learning, Colombia, 2002.

[3] R.L. Burden y J.D. Faires, Análisis numérico. 7° edición, Int. Thompson Editores, México. 2003.

[4] S. Chapra, y R. Canale, Métodos numéricos para ingenieros, Mac Graw – Hill, México, 2004.

[5] P. Camarena Gallardo, La matemática en el contexto de las ciencias. Revista Innovación Educativa. 9 [46], pp. 15 – 25, 2009.

[6] Y. Serres Voisin, G. González Yusti, R. Cadiz y C. Torres, Educación matemática para ingeniería y arquitectura: aplicaciones de la matemática en el contexto de las ciencias. Revista de la Facultad de Ingeniería U.C.V., 27 [3], pp. 21-28, 2012.

[7] U.Muro y P.Camarena Gallardo, La serie de Fourier en el contexto del proceso de transferencia de masa. Mexican Journal of Electromechanical Engineering. 6 [4], pp. 159–163, 2002.

[8] G. Daza Hernández, Apuntes del curso Vibraciones Mecánicas. Universidad Técnica Federico Santa María. Valparaíso, Chile, 2007.

[9] M. Caligaris, G. Rodriguez y L. Laugero, Actas del I CADI, La enseñanza del Análisis Numérico en el contexto de las ciencias, Trabajo a85, Mar del Plata, 2012.

[10] D. Ausubel, J. Novak y H. Hanesian. Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. Trillas, México, 1990.