



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

ESTUDIO DE LA SUSPENSIÓN DE UN AUTOMÓVIL: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA MEDIANTE EL USO DE SIMULACIONES, GRÁFICOS Y ANIMACIONES

Samira Abdel Masih * y Fernando Lagomarsino

Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de Lomas de Zamora
Camino de Cintura km 2. Lavallol. Buenos Aires. Argentina
correo-e: abdel.masih@hotmail.com ; fianalisis@gmail.com

RESUMEN

El sistema de suspensión de un automóvil es el conjunto de dispositivos que actúan entre el chasis y las ruedas. El estudio y análisis de su funcionamiento es sumamente importante para un ingeniero mecánico, ya que tiene por objetivo absorber los eventuales impactos causados por una carretera irregular, mantener la altura correcta del vehículo, soportar su peso, lograr la alineación correcta de las ruedas y controlar su dirección de giro.

Al exponer este tema en las aulas, los docentes nos enfrentamos al desafío de mostrar cómo se comporta el sistema a través de un modelo matemático. En la mayoría de los casos, esta tarea resulta bastante tediosa y poco motivadora para el estudiante.

Afortunadamente, la tecnología informática ofrece una poderosa herramienta para el proceso de enseñanza- aprendizaje: el uso de simulaciones.

El presente trabajo analiza el funcionamiento de la suspensión de un coche, modelado mediante un sistema masa- resorte – amortiguador.

Primeramente se planteará una ecuación diferencial que permitirá describir, en cada instante, la altura del coche. Luego se simulará el fenómeno en estudio utilizando el software Wolfram Mathematica. De este modo, se podrá visualizar su comportamiento de una manera clara y sencilla. El mismo programa permitirá configurar varios tipos de camino, con sus respectivas características geométricas. Además, se podrán modificar los valores de los parámetros que intervienen en el sistema de suspensión, a fin de optimizar su funcionamiento.

Este trabajo tiene por objetivo integrar los conceptos físicos con herramientas matemáticas e informáticas, a fin de que el estudiante de ingeniería comprenda fácilmente los temas que se exponen, aprovechando los recursos que brindan las computadoras en nuestros días. Por otro lado, la simulación presentada resultó sumamente útil a nivel enseñanza y aprendizaje, ya que fue incorporada en las asignaturas de Mecánica y Mecanismos y Análisis Matemático III, con resultados altamente satisfactorios.

Palabras Claves: *Suspensión de un automóvil - Ecuaciones Diferenciales– Mathematica.*



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

1. INTRODUCCIÓN

El sistema de suspensión de un automóvil es el conjunto de elementos mecánicos que permiten asegurar el contacto del neumático con el terreno, proporcionando estabilidad en la marcha del vehículo y un nivel adecuado de confort y seguridad dentro de él.

Las principales funciones de un sistema de suspensión son las siguientes:

- 1- Reducir las fuerzas causadas por las irregularidades del terreno y controlar la dirección del vehículo.
- 2- Aumentar la duración de los neumáticos, soportar la carga del automóvil y conservar su altura óptima.
- 3- Mantener la adherencia del vehículo con la superficie y una correcta alineación de las ruedas.
- 4- Enlazar la masa suspendida del automóvil (elementos sustentados por el chasis y el bastidor) con la masa no suspendida (resto de los elementos)

1.1. Elementos que componen un sistema de suspensión

La suspensión está compuesta básicamente por dos elementos: elementos elásticos y elementos amortiguadores. Explicaremos brevemente cada uno de ellos.

1.1.1 Elementos elásticos

Su finalidad es la de aislar en todo lo posible a la masa suspendida de las excitaciones transmitidas por las ruedas, debido a las irregularidades del terreno. Estas excitaciones provocan, tanto para el automóvil como para el pasajero, vibraciones que pueden ser nocivas si la amplitud oscilatoria de las mismas es excesiva [1] . Uno de los principales elementos que componen los elementos elásticos son los muelles helicoidales, llamados también resortes.

Están constituidos por varillas de acero arrollados en forma de hélice. Su funcionamiento se basa en la Ley de Hooke: la fuerza ejercida sobre un muelle es proporcional a su desplazamiento. El muelle helicoidal se comprime debido a la carretera y al peso de la masa suspendida, empujando la rueda hacia el pavimento.

1.1.2 Elementos amortiguadores

Su función es la de frenar el movimiento oscilatorio de los muelles. Los amortiguadores ejercen una fuerza que es directamente proporcional a la velocidad de desplazamiento del automóvil. Hay



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

varios tipos de amortiguadores: hidráulicos, presurizados (con aceite y gas) y no presurizados (con aceite).

1.1.3 Funcionamiento del sistema de suspensión

Existe un sistema de suspensión para cada rueda del coche. La siguiente figura ilustra su ubicación dentro del vehículo.

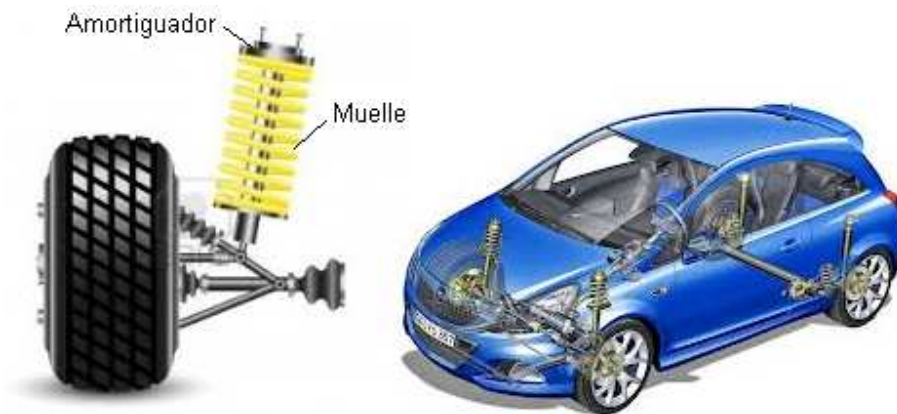


Figura 1 Ubicación del sistema de suspensión en un automóvil.

Según [2], cuando una rueda encuentra un obstáculo, la masa no suspendida se eleva y el muelle se comprime, almacenando la energía del impacto. Seguidamente, el muelle se estira empujando por un lado a la rueda contra el suelo y por el otro a la carrocería, que se eleva. Este proceso se repite después de una serie de compresiones y extensiones del muelle, cada vez más amortiguadas. Si no hubiese ningún tipo de suspensión, los movimientos de las ruedas se transmitirían directamente a la carrocería, produciendo golpes violentos y perjudiciales, tanto para los pasajeros como para el vehículo.

2. DISEÑO DEL MODELO MATEMÁTICO PARA EL ESTUDIO DE LA SUSPENSIÓN

Nuestro objetivo consiste en determinar, en cada instante, la altura del automóvil con respecto al piso. Para ello construiremos un modelo matemático que describa el comportamiento del sistema de suspensión del automóvil. Como mencionamos anteriormente, existe un sistema de suspensión para cada rueda y ésta se comporta como si fuera un resorte. Por otro lado, como las principales piezas de suspensión son el muelle helicoidal y el amortiguador, simplificaremos el modelo suponiendo que el sistema está formado por las siguientes componentes:



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERIA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

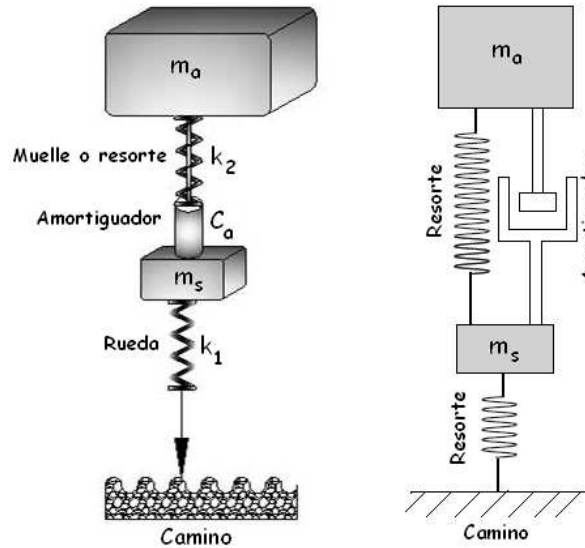


Figura 2 Modelo matemático para el sistema de suspensión en un automóvil.

Donde

m_a : Es la cuarta parte de la masa del coche. k_2 : Constante elástica del muelle helicoidal.

C_a : Constante de amortiguación del amortiguador. m_s : masa del sistema de suspensión.

k_1 : Constante elástica de la rueda.

Reduciremos aún más el modelo suponiendo que éste se mueve sólo en la dirección perpendicular al camino. Además, para facilitar el análisis de su comportamiento, lo rotaremos según indica la Figura 3. Fijaremos dos sistemas de coordenadas: uno para la masa m_s y otro para la masa m_a , de manera tal que el origen de coordenadas de dichos sistemas sea la posición de equilibrio de ambas masas.

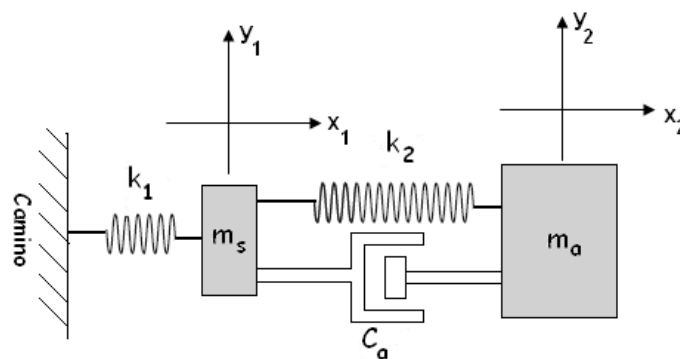


Figura 3 Sistema de coordenadas para el estudio de la suspensión de un automóvil.



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

De este modo, el sistema se mueve sólo en la dirección horizontal. Si $f_1(t) = (x_1(t), 0)$ y $f_2(t) = (x_2(t), 0)$ representan las funciones posición de la masa m_s y m_a respectivamente, nuestro objetivo es hallar dichas funciones, es decir, la altura del coche con respecto al piso. Para ello aplicaremos la Segunda Ley de Newton a ambas masas, a fin de plantear un sistema de ecuaciones diferenciales que permitan determinar $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Previamente mostraremos la expresión de las fuerzas ejercidas por un resorte y un amortiguador de base móvil, sobre una masa determinada.

2.1. Fuerza ejercida por un resorte

Según la Ley de Hooke [3], el módulo de la fuerza ejercida por un resorte sobre una masa m es proporcional a la variación de la longitud del resorte. Es decir,

$$|\vec{F}(t)| = k |\Delta L(t)| \quad (1)$$

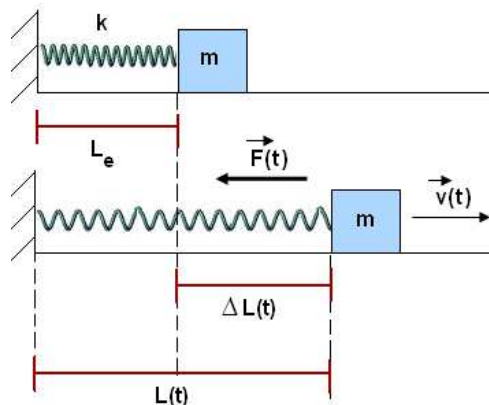


Figura 4 Ley de Hooke aplicada a un resorte que actúa sobre una masa m .

Donde

$\vec{F}(t)$ = Fuerza que ejerce el resorte sobre la masa m , en el instante t .

$\Delta L(t) = L(t) - L_e$.

$L(t)$ = Longitud del resorte en el instante t .

L_e = Longitud del resorte en estado de equilibrio

K = Constante de elasticidad del resorte.

$\vec{v}(t)$ = Velocidad de la masa en el instante t .

La fórmula (1) será utilizada al analizar la fuerza ejercida por la rueda y el muelle helicoidal, ya que ambos se comportan como resortes.



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

2.2. Fuerza ejercida por un amortiguador de base móvil

Si se ata un cuerpo a un amortiguador de base fija, se sabe que la fuerza que éste ejerce sobre el cuerpo en un instante t es

$$\vec{F}_a(t) = -c_a \vec{v}(t) \quad (2)$$

Donde

$\vec{F}_a(t)$ = Fuerza ejercida por el amortiguador. $\vec{v}(t)$ = Velocidad del cuerpo en el instante t .

c_a = Constante del amortiguador.

En particular, si el objeto se mueve sólo en la dirección horizontal, su función posición podemos escribirla como $f_2(t) = (x_2(t), 0)$. En consecuencia, la fuerza ejercida por el amortiguador tendrá la siguiente expresión:

$$\vec{F}_a(t) = -c_a (x_2'(t), 0) \quad (3)$$

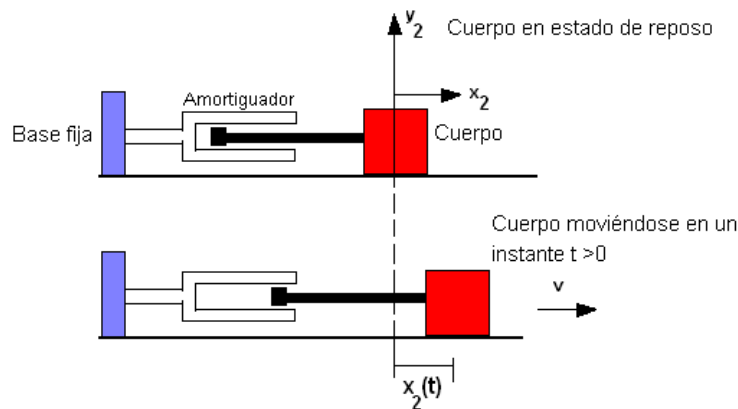


Figura 5 Cuerpo unido a un amortiguador de base fija.

Pero si la base del amortiguador es móvil, resultados experimentales muestran que

$$\vec{F}_a(t) = -c_a \vec{v}_R(t) \quad (4)$$

Donde

$\vec{v}_R(t)$ = Velocidad relativa del cuerpo con respecto a la base, en el instante t .

Para hallar la expresión de esta velocidad, supondremos también que el cuerpo se mueve sólo en la dirección horizontal, y llamaremos $f(t) = (x(t), 0)$ a la función posición del cuerpo con respecto a la base. De este modo, la ecuación (4) se escribe:

$$\vec{F}_a(t) = -c_a (x'(t), 0) \quad (5)$$



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

Ahora, sólo resta calcular $x'(t)$, y para ello se fijarán dos sistemas de coordenadas: uno para la base y otro para el cuerpo atado al amortiguador, según se ilustra en la siguiente figura:

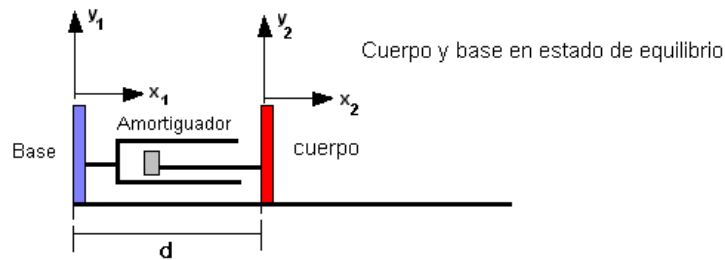


Figura 6 Sistema de coordenadas para la base móvil y el cuerpo.

Si analizamos la situación en la que la base y el cuerpo se desplazan en la dirección que se muestra continuación:

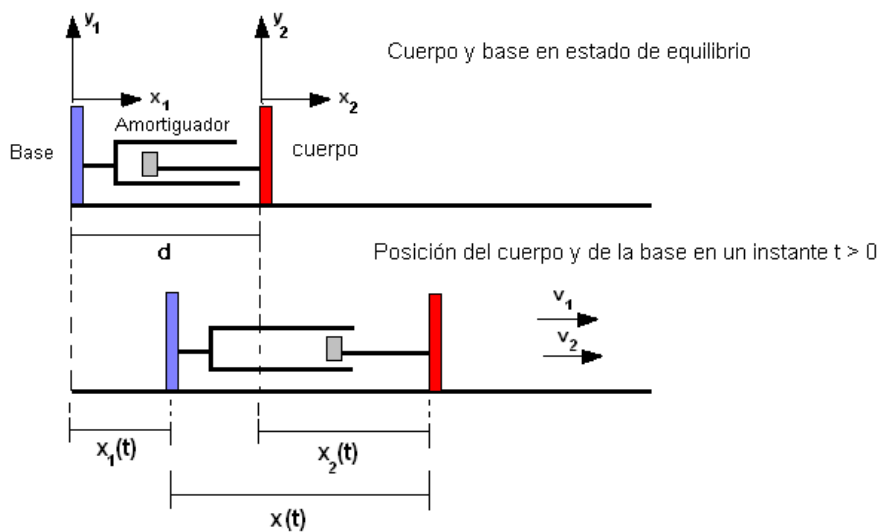


Figura 7 Posición relativa del cuerpo con respecto a la base del amortiguador.

De la Figura 7 se puede comprobar fácilmente que $x(t) = x_2(t) + d - x_1(t)$ y en consecuencia,

$$x'(t) = x'_2(t) - x'_1(t) \quad (6)$$

Reemplazando (6) en (5) resulta

$$\vec{F}_a(t) = -c_a (x'_2(t) - x'_1(t), 0) \quad (7)$$

La fórmula (7) será aplicada al analizar la fuerza del amortiguador del sistema de suspensión, ya que su base es la masa m_s de la suspensión, que es móvil.



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

2.3. Modelo matemático para el análisis del sistema de suspensión

Para hallar, en cada instante t , los desplazamientos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de las masas m_s y m_a , analizaremos la situación en la cual dichas masas se encuentran desplazadas a la derecha de sus posiciones de equilibrio, y moviéndose en el sentido que indican sus respectivas velocidades, según se muestra en la siguiente figura:

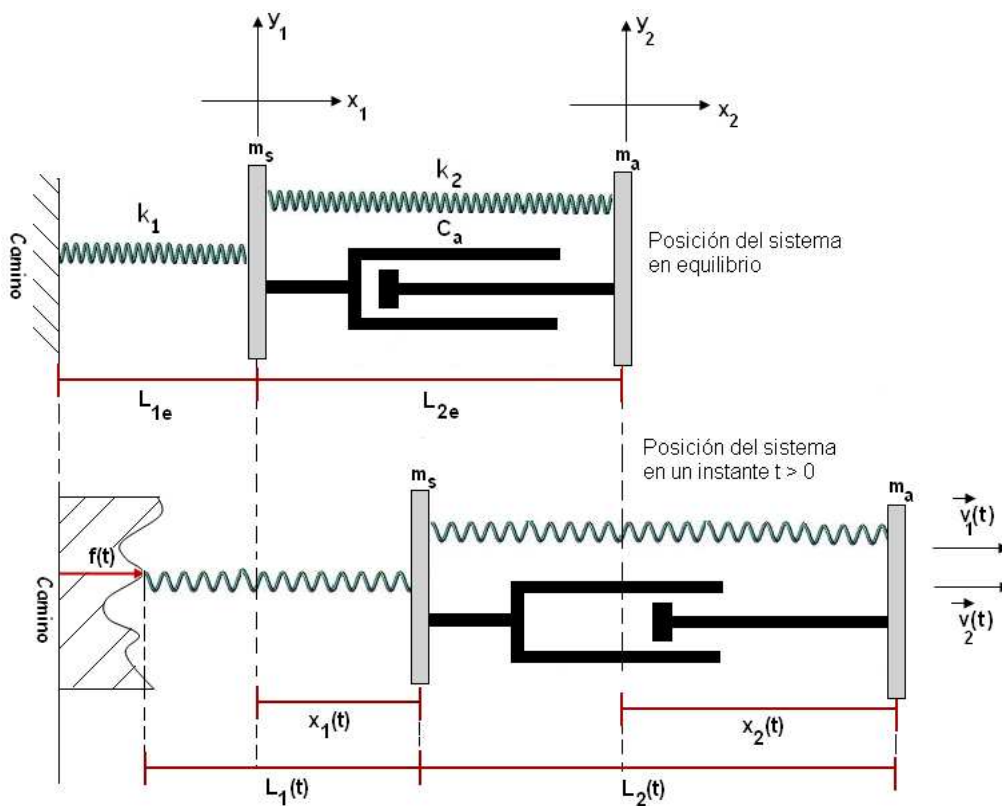


Figura 8 Diagrama de la posición del sistema de suspensión.

Donde

L_{1e} , L_{2e} : longitud de los resortes de constante k_1 y k_2 respectivamente, en estado de equilibrio.

$L_1(t)$, $L_2(t)$: longitud de los resortes de constante elástica k_1 y k_2 respectivamente, en el instante t .

$x_1(t)$, $x_2(t)$: Posición, en la dirección perpendicular al camino, de la masa m_s y m_a , en el instante t .

f = función en la variable t , cuya gráfica es una curva que representa el borde del camino.

De acuerdo a la Figura 8, el diagrama de cuerpo libre para las masas m_s y m_a en el instante t es el siguiente



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

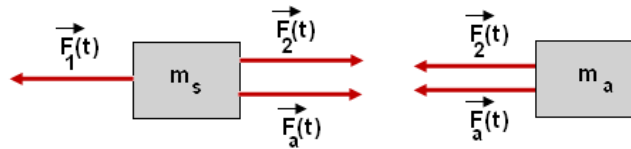


Figura 9 Diagrama de cuerpo libre para las masas m_s y m_a .

En este caso,

$\vec{F}_1(t)$ = Fuerza ejercida por el resorte de constante k_1 (que representa la rueda).

$\vec{F}_2(t)$ = Fuerza ejercida por el resorte de constante k_2 (que representa el muelle helicoidal)

$\vec{F}_a(t)$ = Fuerza ejercida por el amortiguador, con constante de amortiguamiento c_a .

Aplicando las fórmulas (1) y (7) y observando el diagrama de la Figura 8, podemos obtener las expresiones de estas fuerzas:

Para la masa m_a :

$$\begin{aligned} \vec{F}_2(t) &= (-|\vec{F}_2(t)|, 0) = (-k_2 |\Delta L_2(t)|, 0) = (-k_2 \Delta L_2(t), 0) = (-k_2 (L_2(t) - L_{2e}), 0) = \\ &= (-k_2 (x_2(t) + L_{2e} - x_1(t) - L_{2e}), 0) = (-k_2 (x_2(t) - x_1(t)), 0) \end{aligned}$$

$$\vec{F}_a(t) = -c_a (x'_2(t) - x'_1(t), 0)$$

Para la masa m_s :

$$\vec{F}_2(t) = (k_2 (x_2(t) - x_1(t)), 0)$$

$$\vec{F}_a(t) = c_a (x'_2(t) - x'_1(t), 0)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_1(t) &= (-|\vec{F}_1(t)|, 0) = (-k_1 |\Delta L_1(t)|, 0) = (-k_1 \Delta L_1(t), 0) = (-k_1 (L_1(t) - L_{1e}), 0) = \\ &= (-k_1 (L_1(t) - L_{1e}), 0) = (-k_1 (x_1(t) + L_{1e} - f(t) - L_{1e}), 0) = (-k_1 (x_1(t) - f(t)), 0) \end{aligned}$$

Si $\vec{a}_a(t)$ y $\vec{a}_s(t)$ representan las aceleraciones de las masas m_a y m_s respectivamente, al aplicar la

Segunda Ley de Newton se obtiene

Para la masa m_a :

$$\vec{F}_2(t) + \vec{F}_a(t) = m_a \vec{a}_a(t) \Rightarrow (-k_2 (x_2(t) - x_1(t)), 0) - c_a (x'_2(t) - x'_1(t), 0) = m_a (x''_2(t), 0)$$

Igualando las primeras componentes de estos vectores resulta



IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI

$$-k_2 (x_2(t) - x_1(t)) - c_a (x'_2(t) - x'_1(t)) = m_a x''_2(t) \quad (8)$$

Para la masa m_s :

$$\vec{F}_2(t) + \vec{F}_a(t) + \vec{F}_1(t) = m_s \vec{a}_s(t) \Rightarrow$$

$$(k_2 (x_2(t) - x_1(t)), 0) + c_a (x'_2(t) - x'_1(t), 0) + (-k_1 (x_1(t) - f(t)), 0) = m_s (x''_1(t), 0)$$

Nuevamente, al igualar las primeras componentes de estos vectores se tiene

$$k_2 (x_2(t) - x_1(t)) + c_a (x'_2(t) - x'_1(t)) - k_1 (x_1(t) - f(t)) = m_s x''_1(t) \quad (9)$$

De las ecuaciones (8) y (9) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en las incógnitas $x_1(t)$ y $x_2(t)$:

$$\begin{cases} k_2 (x_2(t) - x_1(t)) + c_a (x'_2(t) - x'_1(t)) - k_1 (x_1(t) - f(t)) = m_s x''_1(t) \\ -k_2 (x_2(t) - x_1(t)) - c_a (x'_2(t) - x'_1(t)) = m_a x''_2(t) \end{cases} \quad (10)$$

La solución de este sistema permitirá determinar los desplazamientos verticales del coche, para distintos tipos de caminos.

2.4. Simulación del sistema de suspensión

La simulación se llevó a cabo utilizando el software Wolfram Mathematica [4], Primeramente se resolvió el sistema (10), considerando tres tipos de caminos:

$$\text{Camino con cordón: } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 \\ 1 & \text{si } t > t_0 \end{cases}$$

$$\text{Camino empedrado: } f(t) = |0.4 A \sin(1.5 P t)| \quad \text{con } A \in [0.3 \text{ m}, 0.7 \text{ m}], P \in [1 \text{ seg}, 1.3 \text{ seg}]$$

$$\text{Camino ondulado: } f(t) = 1 - A \sin(2 P t) \quad \text{con } A \in [0.3 \text{ m}, 0.7 \text{ m}], P \in [1 \text{ seg}, 1.3 \text{ seg}]$$

Se tomó como parámetro a la constante del amortiguador $c_a \in [600 \text{ N m/seg}, 1500 \text{ N m/seg}]$.

La Figura 10 muestra el panel de control de la simulación, para el caso en que el vehículo circula por un camino ondulado y con valores $A = 0.6 \text{ m}$, $P = 1 \text{ seg}$. y $c_a = 1422 \text{ N m/seg}$. Se observa que, para estos valores, la gráfica de $x_2(t)$ tiene período o tiempo de oscilación $T = 3 \text{ seg}$. Los distintos ensayos realizados demuestran que, para disponer de una suspensión ideal, el número de oscilaciones por minuto debe estar comprendido entre 30 y 60. Es decir, $30 \leq \frac{60}{T} \leq 60$. Una cifra superior excita el sistema nervioso, mientras que una cifra inferior provoca mareo [1].

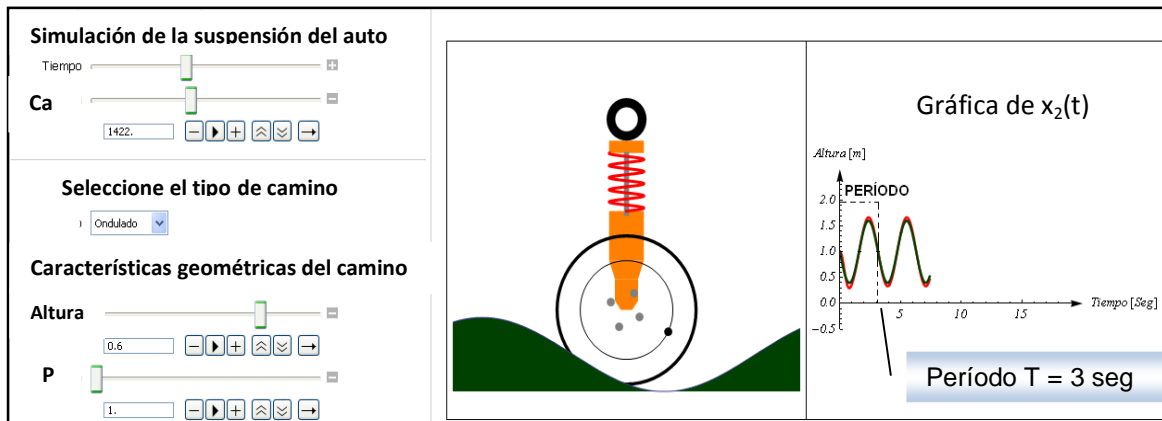


Figura 10 Simulación del sistema de suspensión.

En el ejemplo de la Figura 10, el sistema de suspensión produce 20 oscilaciones por minuto, con lo cual no resulta conveniente. Sin embargo, gracias a la simulación, podemos modificar automáticamente los valores de las constantes c_a y k_2 , y así lograr la suspensión deseada.

3. CONCLUSIONES

Las posibilidades de simulación que brinda el software Wolfram Mathematica, además de la potencia y simplicidad de su manejo, lo convierten en una poderosa herramienta que producirá un marcado interés en el estudio de temas relacionados con Matemática, Física e Ingeniería. Gracias a ello, se puede visualizar mejor el fenómeno que se estudia y elaborar conclusiones de una manera más sencilla y rápida. En particular, la simulación de la suspensión del automóvil ha producido gran motivación en los estudiantes de Ingeniería Mecánica, pues pudieron comprender, con mayor claridad, el mecanismo de su funcionamiento. Finalmente, el trabajo presentado será sumamente útil a nivel enseñanza y aprendizaje, ya que podrá ser aplicado en futuras simulaciones que aborden temáticas similares u otro tipo de sistemas físicos.

4. REFERENCIAS

- [1] Balakumar Balachandran. Vibraciones. Cenage Learning Mexico. 2004
- [2]. Bernd Heibing. Chassis handbook. Vieweg. Alemania. 2011.
- [3] Dennis G. Zill. Ecuaciones Diferenciales. Thomson. México. 2010.
- [4] Samira Abdel Masih. Aplicaciones del Mathematica a Ecuaciones Diferenciales. UNLZ. Argentina. 2007.