



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL ÁREA  
MECÁNICA  
DE LAS  
INGENIERÍAS

FoDAMI

## APLICACIÓN DEL ALGORITMO DE DENAVIT – HARTENBERG Y DE MATRICES DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA PARA LA OBTENCIÓN DEL MODELO CINEMÁTICO DIRECTO EN MANIPULADORES ROBÓTICOS INDUSTRIALES

Hossian Alejandro Armando<sup>\*1</sup>, Verónica Olivera<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Neuquén.  
Juan Manuel de Rosas y Soufal – Ciudad de Plaza Huincul – Pcia de Neuquén – Argentina.

[alejandrohossian@yahoo.com.ar](mailto:alejandrohossian@yahoo.com.ar)

[verolivera@gmail.com](mailto:verolivera@gmail.com)

### RESUMEN

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación y desarrollo con asentamiento en el departamento de Ciencias Básicas de la Facultad Regional Neuquén de la Universidad Tecnológica Nacional, cuyo eje central se focaliza en introducir a los estudiantes en el campo de la Robótica Industrial. En esta línea de acción, uno de los ejes centrales del proyecto consiste en usufructuar todo el potencial que proporcionan las correspondientes asignaturas del ciclo básico (Análisis Matemático I, Álgebra y Geometría Analítica y Física I entre otras), las cuáles actúan a modo de soporte en el análisis y diseño de los *manipuladores robóticos industriales*.

En esta primera etapa del proyecto, el equipo de investigación focaliza sus investigaciones en el estudio de la *“Cinemática de un Manipulador Robótico Industrial”*, teniendo como objetivo central la obtención del *“Modelo Cinemático Directo”* de una determinada configuración. Mediante este modelo es posible determinar la posición y orientación del extremo final del brazo manipulador con respecto a un sistema de referencia asociado a la base del dispositivo, siendo conocidos los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos del manipulador (variables angulares y longitud de eslabón).

La herramienta analítica que se propone en el presente trabajo para la obtención del modelo cinemático directo, consiste en la aplicación del algoritmo de *“Denavit – Hartenberg”*. Este modelo consiste en un método matricial que establece la localización de cada sistema de coordenadas  $\{S_i\}$  asociado a cada eslabón  $i$  de una cadena articulada, permitiendo así obtener las distintas matrices de transformación que describen la posición y orientación del sistema de referencia solidario al eslabón  $i$  con respecto al sistema de referencia solidario al eslabón  $i-1$ .

A modo de conclusión, con estas matrices se determina la *“Matriz de Transformación Homogénea”* que vincula el sistema de referencia asociado al extremo del manipulador con el vinculado a la base del mismo.

**Palabras Claves:** *Asignaturas del Ciclo Básico, Manipulador, Modelo Cinemático Directo, Matriz de Transformación y Algoritmo de Denavit – Hartenberg.*



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

## 1. INTRODUCCIÓN

A comienzo de la década de los sesenta los robots industriales han conseguido superar serias dificultades tanto de carácter tecnológico como socioeconómico, alcanzando un grado de madurez interesante promediando los años noventa que es cuando comienza a estabilizarse su demanda y obtienen un pleno reconocimiento en los ámbitos de la industria [1]. Por otra parte, además del sector industrial, también se tienen los robots para cirugías, limpieza de tuberías, vigilancia, etc [2].

### 1.1. Antecedentes

En función de lo expuesto, es muy importante la formación de profesionales de la ingeniería en las diferentes ramas de la mecánica, automatización, informática y electrónica entre otras. Por tal razón, en diferentes países industrializados la robótica forma parte del cuerpo de conocimientos que debe poseer un ingeniero en la actualidad para satisfacer la demanda de los distintos sectores [4]. En este sentido, el “*Grupo de Investigación en Robótica Aplicada*” de la Facultad Regional Neuquén ha incluido la temática correspondiente a la robótica industrial; y más específicamente, el análisis cinemático y dinámico de los brazos robóticos.

### 1.2. Objetivos

Uno de los objetivos centrales del presente trabajo es de carácter didáctico – pedagógico, tal como se expuso en el resumen del artículo; en tal sentido, se considera fundamental que los estudiantes se focalicen en aprovechar todo el potencial que proporcionan diversos tópicos tales como *el Álgebra Matricial, Sistemas de Referencia Fijos y Móviles, la Cinemática y Dinámica de los Cuerpos Rígidos y el Control Clásico entre otros*, que se aplican para modelar el funcionamiento de un brazo robótico industrial. En este marco de estudio y a modo de síntesis, cabe señalar que el grupo de investigación se focalizó, en una primera etapa, en el estudio de la obtención de los Modelos Cinemático Directo e Inverso de los brazos manipuladores industriales; para luego avocarse al estudio del Modelo Dinámico de estos brazos manipuladores en una fase posterior, y poder obtener un primer prototipo en escala real. Dentro del desarrollo de esta primera fase, se comenzó con el estudio de modelos cinemáticos correspondientes a configuraciones sencillas de brazos robóticos, para lo cual fue suficiente la aplicación de operaciones matriciales de Matrices de Transformación Homogénea y los Sistemas de Referencia Móviles. Asimismo, para el estudio de configuraciones más avanzadas, se hace uso de la representación de Denavit – Hartenberg (D – H); que es la que se utiliza en el presente trabajo para la obtención de modelo cinemático directo.

En función de lo expuesto, el objetivo de este trabajo consiste en la obtención del Modelo Cinemático Directo de un manipulador robótico, mediante la aplicación de las *Matrices de Transformación Homogénea y la Representación de D – H*.

## 2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

La obtención del Modelo Cinemático Directo de un brazo robótico, consiste en determinar cuál es la posición y orientación del extremo final del robot con respecto a un sistema de referencia, conocidos los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot (variables angulares y longitud de eslabón). A su vez, el Modelo Cinemático Inverso consiste en hallar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot para que su extremo adopte una posición y orientación determinadas [3]. En figura 1 se ilustran estos conceptos.

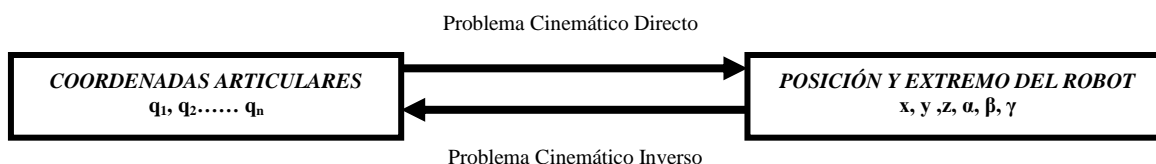


Figura 1 Vinculación entre el Problema Cinemático Directo y el Problema Cinemático Inverso [1]

Asimismo cabe destacar, que ambos modelos han sido desarrollados por el grupo de investigación para casos simples de no más de dos eslabones; utilizando métodos geométricos y basados en cambios de sistemas de referencia. En el presente artículo, se obtiene el modelo cinemático directo de una configuración de dos eslabones haciendo uso del método matricial de Denavit y Hartenberg (D – H). Más precisamente, la aplicación de este método permite obtener la Matriz de Transformación Homogénea que vincula el sistema de referencia asociado al extremo del manipulador con el vinculado a la base del mismo.

## 3. CONCEPTOS MECÁNICOS Y ANALÍTICOS PARA EL ABORDAJE DEL PROBLEMA

La resolución del modelo cinemático directo de un manipulador robótico industrial, precisa del conocimiento de conceptos de carácter mecánico y analítico [5]. En la subsección 3.1 se explican los conceptos fundamentales para la conformación de un robot manipulador; tales como la noción de articulación, cadena cinemática y grados de libertad. En la subsección 3.2 se explican las “*Matriz de Transformación Homogénea*”; asumiendo conocidos los tópicos relacionados con el cálculo matricial, la rotación y traslación de sistemas de referencia y la obtención de las matrices de



rotación y traslación que definen la posición y orientación de un sistema de referencia con respecto a otro. Mientras que en la subsección 3.3, se explica el método matricial de Denavit y Hartenberg (D – H) para la obtención de la Matriz de Transformación Homogénea.

### 3.1 Estructura mecánica de un Robot Manipulador

Un manipulador robótico industrial, como el que se estudia en este artículo, se puede representar como una “Cadena Cinemática” [8] formada por objetos rígidos llamados “eslabones”. Estos se encuentran unidos entre sí por medio de articulaciones que permiten un movimiento relativo entre cada par de eslabones consecutivos. En las llamadas cadenas cerradas se puede acceder desde cualquiera de sus eslabones a cualquier otro por medio de al menos dos caminos posibles; en las abiertas, existe solo un camino posible. Este concepto se ilustra en las figuras 2 y 3.

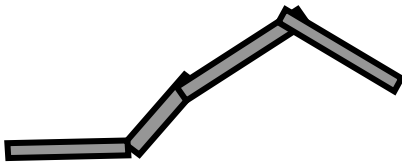


Figura 2 Cadena Cinemática Abierta

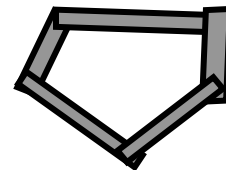


Figura 3 Cadena Cinemática Cerrada

Las articulaciones más utilizadas en robótica son las de rotación y prismática, las cuales se visualizan en las figuras 4 y 5. A su vez, cada uno de los movimientos independientes que puede llevar a cabo cada articulación en relación con la anterior se llama “Grado de Libertad” (GL); siendo que tanto la articulación de rotación como la prismática tienen un solo GL.

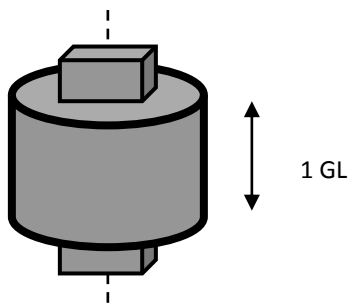


Figura 4 Articulación Prismática

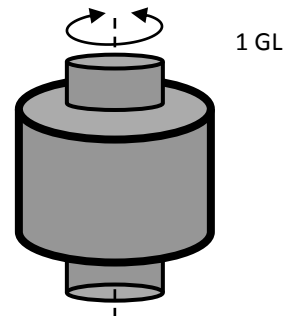


Figura 5 Articulación de Rotación

El número de grados de libertad de una cadena cinemática se obtiene por la fórmula de Grubler:

$$NGdL = \lambda(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i \quad (1)$$



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

Siendo:  $\lambda$ : grados de libertad del espacio de trabajo (tres en el plano y seis en el espacio),  $n$ : número de eslabones de la cadena, incluyendo el eslabón fijo o base,  $j$ : número de articulaciones,  $f_i$ : grados de libertad permitidos a la articulación  $i$ . De esta forma, para la cadena cinemática de figura 2 se tiene que  $\lambda = 3$ ,  $n = 4$ ,  $j = 3$ , ( $f_1 = f_2 = f_3 = 1$ ); con lo que el NGdL = 3. Para la cadena cinemática de figura 3 se tiene que  $\lambda = 3$ ,  $n = 5$ ,  $j = 5$ , ( $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = 1$ ); con lo que el NGdL = 2. Por lo general, los robots manipuladores están conformados por cadenas cinemáticas abiertas con articulaciones de tipo rotación o prismáticas, donde el NGdL del mecanismo robótico en su conjunto, coincide con la cantidad de articulaciones que posee el mismo.

### 3.2 Matriz de Transformación Homogénea

Estas matrices permiten la representación conjunta de la posición y orientación de un sólido en el espacio introduciendo las llamadas coordenadas homogéneas, donde un elemento de un espacio  $n$  – dimensional se representa por  $(n + 1)$  dimensiones. Un vector  $r$  ( $x, y, z$ ) se representa como  $r$  ( $w_x, w_y, w_z$ ), donde  $w$  posee un valor cualquiera y representa un factor de escala. Un vector como  $r = ai + bj + ck$  en un sistema de referencia OXYZ, se representa en coordenadas homogéneas:

$$r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw \\ bw \\ cw \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con las coordenadas homogéneas se define la matriz de transformación homogénea  $T$  como una matriz de orden  $4 \times 4$ ; que representa la transformación de un vector de coordenadas homogéneas de un sistema de coordenadas a otro. Esta matriz posee cuatro submatrices de diferente orden cada una, a saber:  $R_{3 \times 3}$  que se corresponde con una matriz de rotación,  $p_{3 \times 1}$  que se corresponde con un vector de traslación,  $f_{1 \times 3}$  que simboliza una transformación de perspectiva y  $w_{1 \times 1}$  que hace referencia a un escalado global. En robótica interesan las matrices  $R_{3 \times 3}$  y  $p_{3 \times 1}$ , asumiendo que son nulas las componentes de  $f_{1 \times 3}$  y la unidad para  $w_{1 \times 1}$ . La figura 6 ilustra la estructura de una matriz de transformación homogénea para robótica con sus correspondientes submatrices:

$$\begin{bmatrix} \boxed{\text{Rotación}} & \boxed{\text{Traslación}} \\ \boxed{0} & \boxed{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{R_{3 \times 3}} & \boxed{p_{3 \times 1}} \\ \boxed{0} & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

Figura 6 Matriz de Transformación Homogénea en el contexto de la aplicación en robótica

Estas matrices se pueden aplicar para la traslación y rotación de un sistema de referencia con respecto a otro. Si se tiene un sistema O'UVW que se halla trasladado un vector  $r = ai + bj + ck$



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

# FoDAMI

con respecto a un sistema OXYZ, tal como se ilustra en figura 7, tiene una matriz homogénea de traslación compuesta por la matriz unitaria como matriz de rotación y el vector de traslación:

$$T(r) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

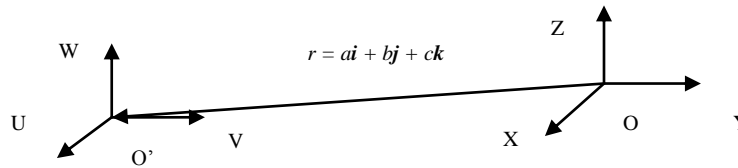


Figura 7 Sistema O'UVW que se halla trasladado un vector  $r = ai + bj + ck$  con respecto a un sistema OXYZ

Si el sistema O'UVW se halla solo rotado con respecto a un sistema fijo OXYZ, entonces la submatriz  $R_{3 \times 3}$  es la que define la rotación [6]. En este sentido, se tienen tres matrices homogéneas básicas de rotación donde cada una de las cuales representan rotaciones distintas según el eje coordenado X (un ángulo  $\alpha$ ) o Y (un ángulo  $\beta$ ) o Z (un ángulo  $\gamma$ ); las cuales son:

$$\text{Rot}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{Rot}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \text{sen}\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{Rot}(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\text{sen}\gamma & 0 & 0 \\ \text{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se ve que cada uno de los vectores de traslación correspondientes a cada una de las matrices de rotación es el vector nulo, dado que estas matrices solo representan movimientos de rotación respecto a cada uno de los ejes X, Y, Z. La figura 8 muestra los sistemas OXYZ y OUVW coincidentes y las figuras 9, 10 y 11 representan las respectivas rotaciones.

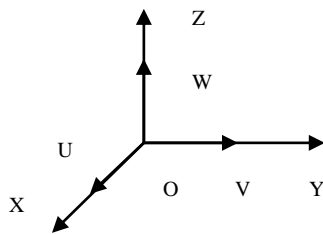


Figura 8 Sistemas OXYZ y OUVW coincidentes

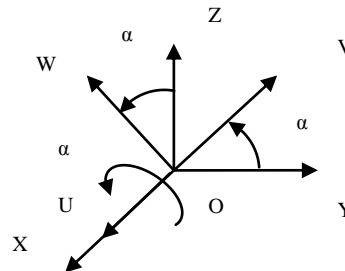


Figura 9 Rotación de un ángulo  $\alpha$  del sistema OXYZ con respecto al eje X obteniendo el sistema OUVW

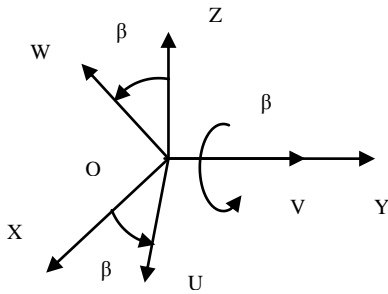


Figura 10 Rotación de un ángulo  $\beta$  del sistema OXYZ con respecto al eje Y obteniendo el sistema OUW

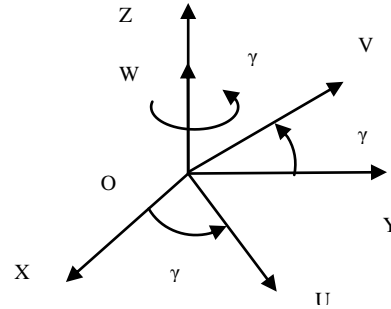


Figura 11 Rotación de un ángulo  $\gamma$  del sistema OXYZ con respecto al eje Z obteniendo el sistema OUV

### 3.3 Método de Denavit – Hartenberg (D – H)

El presente método permite describir la relación entre dos elementos contiguos de la cadena cinemática que representa el brazo robótico. En 1955 Denavit y Hartenberg [8] propusieron un método matricial que establece la localización que debe tomar cada sistema de referencia  $\{S_i\}$  vinculado a cada eslabón  $i$  de una cadena articulada, con el objeto de sistematizar la obtención de las ecuaciones cinemáticas de la cadena en su conjunto [1]. En un robot manipulador, de acuerdo a la figura 12, una articulación “ $i$ ” conecta dos eslabones (“ $i - 1$ ” e “ $i$ ”); por consiguiente, el eslabón “ $i$ ” es controlado por la articulación “ $i$ ” y su movimiento es referido al eslabón anterior “ $i - 1$ ” [7].

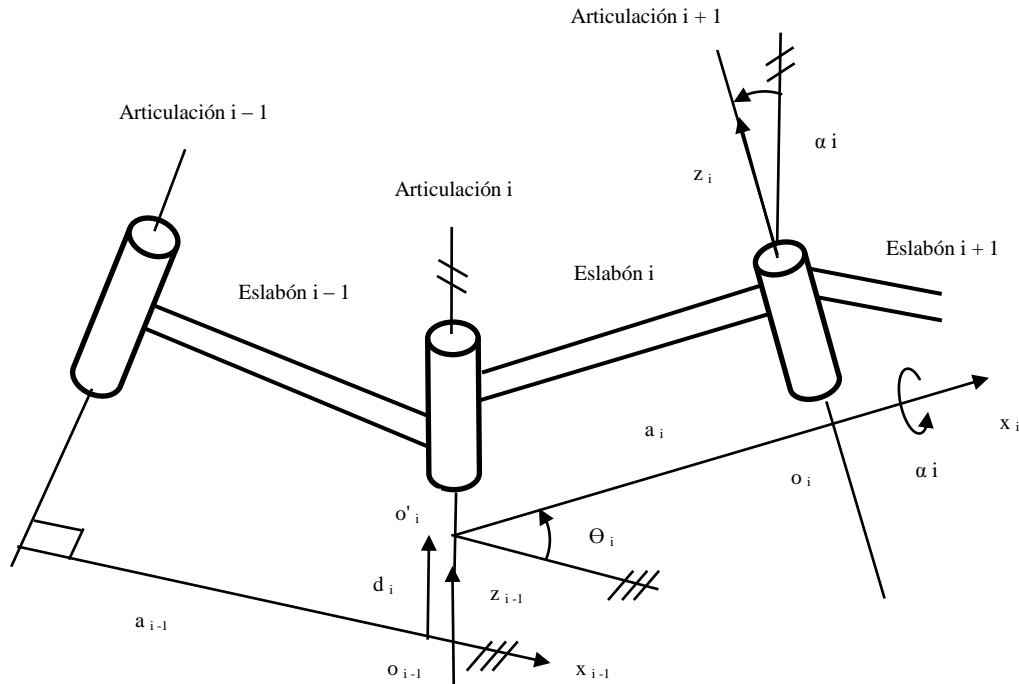


Figura 12 Parámetros de D – H donde los eslabones y articulaciones no están necesariamente en un plano



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

El método de D – H opera en el sistema “i – 1” hasta que este coincide con el sistema “i”, para así poder obtener la matriz de transformación  ${}^{i-1}A_i$ . Observando la figura 12, el pasaje del sistema  $\{S_{i-1}\}$  al  $\{S_i\}$  se realiza mediante las siguientes 4 transformaciones: a) Traslación del origen  $O_{i-1}$  a lo largo del eje  $z_{i-1}$  una distancia  $d_i$  hasta que  $O_{i-1}$  coincide con  $O_i$ ; b) Rotación del eje  $x_{i-1}$  alrededor del eje  $z_{i-1}$  un ángulo  $\Theta_i$  hasta que  $x_{i-1}$  coincide con la dirección de  $x_i$ ; c) Traslación del origen  $O_i$  una distancia  $a$  hasta que  $O_i$  coincide con  $O_i$  y d) Rotación del eje  $z_{i-1}$  alrededor del eje  $x_i$  un ángulo  $\alpha_i$  hasta que  $z_{i-1}$  coincide con la dirección de  $z_i$ . Estas 4 transformaciones aseguran la coincidencia de los sistemas  $\{S_{i-1}\}$  y  $\{S_i\}$ ; y como estas fueron realizadas con respecto al sistema en movimiento, el estudiante debe interpretar que las matrices parciales deben posmultiplicarse para obtener  ${}^{i-1}A_i$ .

$${}^{i-1}A_i = T_{z,d} R_{z,\Theta} T_{x,a} R_{x,\alpha} \quad (2)$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Mediante el uso de la matriz (3)  ${}^{i-1}A_i$ , para un punto  $P_i$  dado en el sistema  $\{i\}$ , se obtienen las coordenadas del mismo en el sistema  $\{i-1\}$  como:  $P_{i-1} = {}^{i-1}A_i P_i$ . Se indica “c” y “s” en vez de “cos” y “sen” respectivamente; y donde  $\Theta_i$ ,  $d_i$ ,  $a_i$  y  $\alpha_i$  constituyen los 4 parámetros de D – H del eslabón  $i$ , los cuales dependen solo de las características geométricas del eslabón y de las articulaciones que lo conectan con el eslabón anterior y con el siguiente. Siempre con referencia en la figura 12, el parámetro  $\Theta_i$  es el ángulo que forman los ejes  $x_{i-1}$  y  $x_i$  medido en un plano perpendicular al eje  $z_{i-1}$ , haciendo uso de la regla de la mano derecha; se lo llama *ángulo articular*, y es variable para articulaciones giratorias. El parámetro  $d_i$  es la distancia medida a lo largo del eje  $z_{i-1}$  desde  $O_{i-1}$  hasta  $O_i$ ; se lo llama *longitud articular*, y es variable para articulaciones prismáticas. El parámetro  $a_i$  es la distancia medida a lo largo del eje  $x_i$  desde  $O_i$  hasta  $O_i$  en articulaciones giratorias; para articulaciones prismáticas, es la distancia más corta entre los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$ . Se lo llama *longitud del eslabón* (en cierto modo define su tamaño). El parámetro  $\alpha_i$  es el ángulo de separación entre los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$  medido en un plano perpendicular al eje  $x_i$ , haciendo uso de la regla de la mano derecha; se lo llama *ángulo de torsión del eslabón* (en cierto modo define su forma).



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL ÁREA  
MECÁNICA  
DE LAS  
INGENIERÍAS

FoDAMI

Por lo general, se elige  $a_i > 0$  (es una distancia), mientras que  $\Theta_i$ ,  $d_i$  y  $\alpha_i$  poseen signo; siendo que para articulaciones rotativas la única variable es  $\Theta_i$ , y para las prismáticas, la única variable es  $d_i$ . Cabe destacar, que para establecer correctamente los parámetros eslabón y aplicar las 4 transformaciones propuestas por el método de D – H, a los efectos de que la matriz  ${}^{i-1}A_i$  relacione los sistemas  $\{S_{i-1}\}$  y  $\{S_i\}$  solidarios a los eslabones  $i - 1$  e  $i$ , dichos sistemas deben elegirse de acuerdo a unas normas determinadas. Estas normas, junto a la determinación de los parámetros eslabón, conforman el algoritmo de D – H para la obtención del modelo cinemático directo [1]. De forma sintética, los pasos que conforman este algoritmo son los siguientes: **I)** la base fija del robot es el eslabón 0, luego el primer eslabón móvil de la cadena es el 1, hasta el último que es el n. **II)** se numeran las articulaciones empezando con 1 para el primer grado de libertad y concluyendo en n. **III)** se localiza cada eje de la articulación; si esta es rotativa el eje es su propio eje de giro, y si es prismática el eje es sobre el que se produce su desplazamiento. **IV)** para  $i$  de 0 a  $n - 1$  ubicar el eje  $z_i$  sobre el eje de la articulación  $i + 1$ . **V)** se ubica el origen del sistema base  $\{S_0\}$  en cualquier punto del eje  $z_0$ ; y situar los ejes  $x_0$  e  $y_0$  de modo que formen un sistema dextrógiro con  $z_0$ . **VI)** para  $i$  de 1 a  $n - 1$ , ubicar el origen  $O_i$  del sistema  $\{S_i\}$  (solidario al eslabón  $i$ ) en la intersección del eje  $z_i$  con la normal común a  $z_{i-1}$  y  $z_i$  (se ve en figura 12 que  $O_i$  es el punto de intersección de la normal común con  $z_{i-1}$ ); si ambos ejes se cortasen  $\{S_i\}$  se ubica en el punto de corte, y si fuesen paralelos,  $\{S_i\}$  se sitúa en la articulación  $i + 1$ . **VII)** se ubica  $x_i$  a lo largo de la normal común a  $z_{i-1}$  y  $z_i$  (en el sentido de la articulación  $i$  a la articulación  $i + 1$ ). **VIII)** se ubica  $y_i$  de modo que forme un sistema dextrógiro con  $x_i$  y  $z_i$ . **IX)** se ubica  $\{S_n\}$  en el extremo del robot con  $z_n$  coincidiendo con la dirección de  $z_{n-1}$  y  $x_n$  normal a  $z_{n-1}$  y  $z_n$ . Los pasos **X)**, **XI)**, **XII)** y **XIII)** se refieren a la obtención de los parámetros eslabón  $\Theta_i$ ,  $d_i$ ,  $a_i$  y  $\alpha_i$ , explicado en página 8. En el paso **XIV)** se obtiene  ${}^{i-1}A_i$  por la expresión (3). **XV)** se obtiene la matriz de transformación homogénea  $T$  que relaciona el sistema de la base del robot  $\{S_0\}$  con el sistema del extremo del mismo  $\{S_n\}$ :  $T = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot \dots \cdot {}^{n-1}A_n$ . **XVI)**  $T$  define la orientación (por la submatriz de rotación) y posición (por la submatriz de traslación) del extremo del robot referido a su base, en términos de las coordenadas articulares.

## 4. CASO DE ESTUDIO

En esta sección se presenta el caso de un brazo robótico de dos grados de libertad tal como el que se muestra en figura 13, donde en función de lo analizado en las secciones anteriores, se pide obtener: 1) los sistemas de referencia, 2) los parámetros eslabón, 3) las matrices  ${}^{i-1}A_i$  y 4) la matriz total de transformación homogénea  ${}^0T_2$ . Para el punto 1) se elige el sistema  $\{S_0\}$  conectado a la base fija, luego el sistema  $\{S_1\}$  al final del eslabón 1, y el sistema  $\{S_2\}$  al final del eslabón 2.



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

# FoDAMI

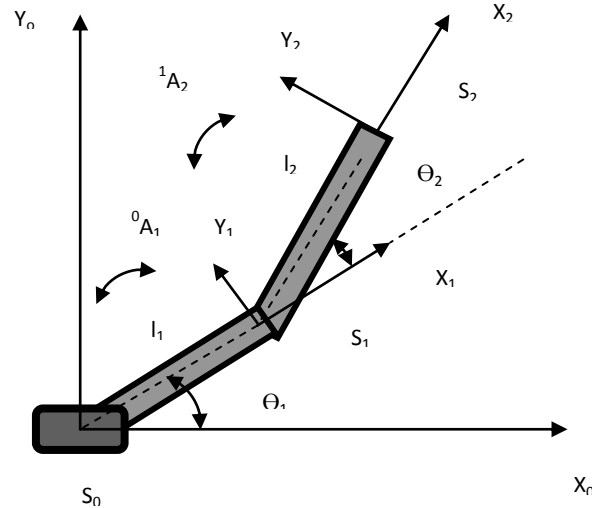


Figura 13 Brazo Robótico de dos GL con sus sistemas de referencia y matrices de transformación homogénea

Para la obtención de los parámetros eslabón en el punto 2), se ve que para el presente caso las distancias más cortas entre los ejes z corresponden a la longitud de los respectivos eslabones; y como los ejes  $z_i$  son paralelos se elige  $a_i$  como más conviene, o sea, en correspondencia con la longitud de los eslabones ( $a_1$  con  $l_1$  y  $a_2$  con  $l_2$ ). De esta forma, el origen de cada sistema está en la intersección del eslabón y el eje z correspondiente, el eje  $x_i$  en la dirección de  $a_i$ , y los ejes  $y_i$  que formen un sistema dextrógiro. Como son solo articulaciones rotatorias, los  $\Theta_i$  son variables; también los  $\alpha_i$  son cero, dado que los ejes  $z_i$  son paralelos entre sí. Por último, las distancias  $d_i$  son todas nulas, dado que los ejes  $x_{i-1}$  cortan a los ejes  $z_i$  en el origen del sistema  $i \{S_i\}$ . La tabla 1 muestra los parámetros de D – H para este caso. La expresión (3) permite obtener las matrices eslabón, para luego obtener la matriz total  ${}^0T_2$ .

Tabla 1 Parámetros de D – H para el brazo robótico de dos grados de libertad

Articulación	$\Theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$\Theta_1$	0	$l_1$	0
2	$\Theta_2$	0	$l_2$	0

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & l_1c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & l_1s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_2c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & l_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^0T_2 = [{}^0A_1 \cdot {}^1A_2]$$

Efectuando el producto matricial se  ${}^0T_2$ , y de esta forma, el modelo cinemático directo para el brazo robótico propuesto; donde  $\cos(\Theta_1 + \Theta_2) = c_{12}$  y  $\sin(\Theta_1 + \Theta_2) = s_{12}$ .



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & (l_1c_1 + l_2c_{12}) \\ s_{12} & c_{12} & 0 & (l_1s_1 + l_2s_{12}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

## 5. CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Se pueden extraer las siguientes conclusiones respecto a la presente propuesta: 1) se han introducido los conceptos de matriz de transformación homogénea y método de D – H para la obtención del modelo cinemático directo de brazos robóticos, 2) se ha presentado el algoritmo de D – H mediante un conjunto de pasos que permite: 2.1) obtener los sistemas  $\{S_i\}$  solidarios a cada eslabón, 2.2) obtener las matrices  ${}^{i-1}A_i$  que vinculan los sistemas  $\{S_{i-1}\}$  y  $\{S_i\}$  solidarios a los eslabones  $i - 1$  e  $i$ , 2.3) obtener los parámetros eslabón y 2.4) obtener la matriz total  ${}^0T_n$ . 3) Desde lo pedagógico, se ha logrado una motivación especial en los estudiantes al aplicar conceptos como los Sistemas de Referencia y las Transformaciones Matriciales. 4) Los estudiantes han aprovechado la gran capacidad de representación conjunta de posición y orientación que poseen las Matrices de Transformación Homogénea, así como también la facilidad para realizar composición de transformaciones ya sea con respecto a sistemas de referencia fijos como móviles.

Como futuras líneas que sigue desarrollando el grupo de investigación se citan: 1) El uso del método de H – D para configuraciones más complejas. 2) Hallar las relaciones existentes entre las velocidades del movimiento de las articulaciones y del extremo del manipulador a partir de la Matriz Jacobiana. 3) Estudio del Modelo Dinámico para obtener un primer prototipo en escala real.

## 5. REFERENCIAS.

- [1] Barrientos, Antonio; Peñín, Luis Felipe; Balaguer Carlos y Aracil Rafael (2007). “*Fundamentos de Robótica*”. Madrid – España. Segunda Edición. Editorial McGraw – Hill. Madrid – España.
- [2] Gates Bill. “*A Robot in Every Home*”. Scientific American Journal. (2007). EEUU.
- [3] Ollero Baturone, A. (2007). “*Robótica Manipuladores y robots móviles*”. Barcelona – España. Ed. Alfaomega – Marcombo. Barcelona – España.
- [4] Gómez-Elvira J. y A. Ollero (1993) “*Proyecto MINIMAN. Demostrador de la tecnología de pequeños manipuladores espaciales*”. *Automatización y Robótica Integrada*. Comunicaciones del “Tercer Congreso de la Asociación Española de Robótica”, pp. 305-310.



# IV CAIM 2014

Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Resistencia Chaco - Rep. Argentina

FORO  
DOCENTE  
DEL AREA  
MECANICA  
DE LAS  
INGENIERIAS

FoDAMI

- [5] Santos, J. Evolución Artificial y Robótica Autónoma, Ed. Alfaomega – Ra-Ma, México (2005).
- [6] Spong, Mark; Hutchinson, Seth (2006) *“Robot Modeling and Control”*. Ed. John Wiley & Sons
- [7] Craig, J. J (1989) *“Introduction to Robotics”*. Ed. Addison Wesley, Reading, MA
- [8] Paul, R. P., *“Homogeneous Transformations – Robot Manipulators: Mathematics, Programming & Control”*. The MIT Press, Massachussets. (1981).