IV CAIM 2014
Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Resistencia Chaco - Rep. Argentina
FORO DOCENTE DEL AREA MECANICA DE LAS INGENIERIAS
FoDAMI

SIMULACIÓN DE MODELOS DE INGENIERÍA MECÁNICA UTILIZANDO RECURSOS INFORMÁTICOS EN LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL

Eduardo A. Gago *[1], Ada E. Mascheroni [2], Mirta G. Mechni [3] y Paola A. Szekieta [4]

*[1, 2, 3, 4] Laboratorio Informático de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Rosario
Zeballos 1341 Rosario Santa Fe Argentina
correo-e: egago@frro.utn.edu.ar.

RESUMEN

Los avances en el área de la informática y la comunicación han concebido un nuevo paradigma en la enseñanza de las ciencias básicas, particularmente en el campo de las Matemáticas, dónde los docentes que enseñan dicha asignatura persisten en la búsqueda de un perfeccionamiento continuo en la metodología utilizada para el tratamiento de los contenidos que requieren el uso de la abstracción.

Atento a estas consideraciones, es importante seleccionar situaciones ingenieriles que impulsen al alumno no sólo a aprender, sino también a desarrollar su creatividad; además, de usar recursos informáticos que optimizan la capacidad de conceptualización.

La formación del Ingeniero Mecánico debe contemplar conocimientos básicos indispensables en el área de Matemática para poder abordar y resolver modelos dinámicos que permita que el alumno emigre hacia una forma de aprendizaje autogestionado que les será de utilidad en el áreas de tecnologías aplicadas.

En este trabajo se presenta una experiencia de cátedra en el Laboratorio Informático de Ciencias Básicas donde se modeliza un sistema de flujo de fluidos cuando se quiere tratar el tema Autovalores y Autovectores, contenido que pertenece al programa de la Cátedra de Álgebra y Geometría Analítica.

Se propone una metodología de trabajo que concede igual relevancia tanto a los contenidos de Matemática que se pretenden enseñar como a las capacidades básicas que se intenta que el alumno alcance, para lograr un aprendizaje significativo y funcional.

Se busca desarrollar y enseñar modelos simples inherentes a la especialidad de Ingeniería Mecánica que son los paradigmas que los alumnos luego van a utilizar a lo largo de toda la carrera, además de integrar en una clase teórica práctica tecnológica con la aplicación de un software específico.

Palabras Claves: *Aprendizaje significativo, herramientas informáticas, modelización, enseñanza de Matemática.*

1. INTRODUCCIÓN

El diseño de las clases de Matemática para las carreras de Ingeniería requiere de una estrategia de enseñanza que permita realizar la modelización de una situación específica relacionada con aplicaciones del ámbito ingenieril.

No siempre los profesores de Matemática tienen incorporada esta visión, que acuerda con las reglamentaciones del CONFEDI, que propone que los alumnos deben adquirir competencias en esta disciplina del ciclo de materias básicas para obtener un aprendizaje significativo.

El objetivo de la enseñanza de las matemáticas en ingeniería debe encontrar el equilibrio adecuado entre la formulación de modelos matemáticos, y las destrezas que apliquen los estudiantes para resolver los desafíos que se plantearán en el área de tecnologías aplicadas y en su actividad profesional futura. [1]

La motivación juega un papel fundamental para logar que el proceso enseñanza aprendizaje sea funcional y significativo. Para la formación de los ingenieros y otros profesionales de la rama de la ingeniería, es atractivo utilizar modelos y métodos que brinda la matemática, ya que estos recursos son los que deben ofrecer las soluciones más óptimas a los distintos modelos planteados para poder alcanzar el pensamiento abstracto.

El alumno debe contar con una potencia creativa que le permita impulsar los mecanismos que internalicen el conocimiento y no limitarlo a un mero aspecto informativo basado en el aprendizaje de tipo operacional.

El uso de herramientas informáticas permite al estudiante explorar, inferir, hacer conjeturas, justificar, poner a prueba sus argumentos y de esta forma construir su propio conocimiento de manera independiente de la intervención del profesor. Estas herramientas además, posibilitan que el profesor se concentre en estimular y orientar el aprendizaje, pero este nuevo rol exige una mayor actividad del profesor, pues es necesaria una constante creatividad en el planteo de las situaciones que se presentan en las clases. [2]

2. CRITERIOS METODOLÓGICOS

La enseñanza de matemática en los primeros años en las carreras de Ingeniería es necesaria para la formación integral del estudiante, pero la profundidad de su estudio está destinado a ser limitado. Se deben impartir los conocimientos con el ánimo de preparar y formar al estudiante para que pueda encontrar los instrumentos que accionen sobre un aprendizaje autodeterminado.

Los programas de Matemática en la Universidad actual están orientados para que el alumno disponga de conocimientos previos suficientes que le permitan construir estructuras mentales tendientes a lograr que los aprendizajes sean significativos y funcionales. Esto implica que el alumno pueda establecer relaciones más complejas en sus aprendizajes. [2]

La génesis de un determinado conocimiento o saber, se ve sometido no sólo a un proceso de institucionalización, sino a dotarse de instrumentos que permitan aceitar los mecanismos que viabilicen un sistema de gestión que hagan del hecho educativo una experiencia superadora.

La utilización de recursos informáticos proporciona una ventaja en la enseñanza ya que la observación en un aula taller permite realizar construcciones mentales tendientes a generar un nuevo conocimiento.

El uso de representaciones semióticas que impliquen el manejo y la conversión en el lenguaje matemático produce una desarticulación en el pensamiento que se manifiesta en un aprendizaje significativo.

Esta aproximación a las matemáticas se comprende como un recurso lingüístico para describir y discernir los procesos que se ven en otras disciplinas, cómo la física o la química, dónde casi todas sus leyes se enuncian con ecuaciones matemáticas ó con procedimientos que derivan de ellas. La comprensión de un problema de ingeniería significa la conversión de este problema en un problema físico o químico, y su traducción en términos de matemática. [1]

En la enseñanza de asignaturas cómo Algebra y Geometría Analítica se distingue un cierto nivel de preocupación por el exiguo interés de los alumnos respecto de cómo son presentados los contenidos en la clase y de cómo se realiza la apropiación de los saberes que se utilizaran en cursos avanzados. Algunos estudiantes, sin embargo, manifiestan que esta problemática se origina por el mínimo entendimiento que tienen de los conceptos y en la forma en la que éstos son presentados durante las clases. Los docentes exhiben los conceptos con cierta dosis de generalización y abstracción, esta mecánica de trabajo no conforma las expectativas de los estudiantes.

En este trabajo, se diseña una clase para tratar de incorporar metodologías de aprendizaje tendientes a generar mecanismos intrínsecos en los estudiantes que les permitan descubrir el conocimiento y lograr aptitudes de independencia para el razonamiento y la inducción.

3. OBJETIVOS

Las acciones que se implementan para desarrollar las actividades programadas tienen como objetivo realizar una experiencia de laboratorio donde los alumnos ejerzan un trabajo autogestionado y colaborativo para conceptualizar el tema mediante el diseño de una situación ingenieril que estudia el flujo de un fluido cuando transita por dos tanques de agua. [1]

Se pretende con la experiencia convertir la clase de Álgebra en un aula taller donde el alumno experimente en un aprendizaje generado por técnicas de interacción entre el docente como sujeto pasivo y el alumno cómo protagonista activo del conocimiento.

Esta línea de trabajo, permite delinear una clase que contemple una transformación del aprendizaje que conduce al estudiante a abandonar el lugar central que históricamente ha tenido dentro del aula para ocupar otro espacio en la dinámica de la clase; espacio necesario para interactuar con sus compañeros y con la propuesta de trabajo.

La utilización de una herramienta valiosa como el cálculo simbólico y la utilización de recursos informáticos son la conexión entre la enseñanza de la Matemática y los modelos reales, lo que permite aumentar las habilidades que posee el alumno y contribuir al desarrollo de sus capacidades básicas.

4. PARTE EXPERIMENTAL

En el presente trabajo se describe una experiencia en el Laboratorio Informático de Ciencias Básicas, donde los alumnos aplican los conocimientos del tema Autovalores y autovectores que se desarrollaron en la clase de Álgebra y Geometría Analítica.. Se pretende además, que los alumnos integren conocimientos de otras asignaturas, como Física y Análisis Matemático I, que se utilizan para modelizar el sistema de flujo de fluidos propuesto. De Física, utilizan el concepto de caudal, concepto que pertenece al contenido Hidrodinámica; y de Análisis Matemático I, aplican el concepto de Ecuaciones diferenciales ordinarias a variables separables.

4.1 Caso en estudio: Fluido que circula por dos tanques conectados en serie

El sistema propuesto a los alumnos es el que se observa en la Figura 1, que muestra dos tanques interconectados en serie por los cuales circula un fluido. Si el caudal de alimentación en el tanque N° 1 es de $10m^3/h$, las resistencias hidráulicas son para el tanque Nº 1 y el tanque Nº 2 de $0{,}5h/m^2$ y $0{,}6h/m^2$ respectivamente; y las capacitancias son para el tanque Nº 1 y para el tanque

Nº 2 de $4m^2$ y $5m^2$ respectivamente, se plantea realizar una investigación de la situación técnica planteada. [3]

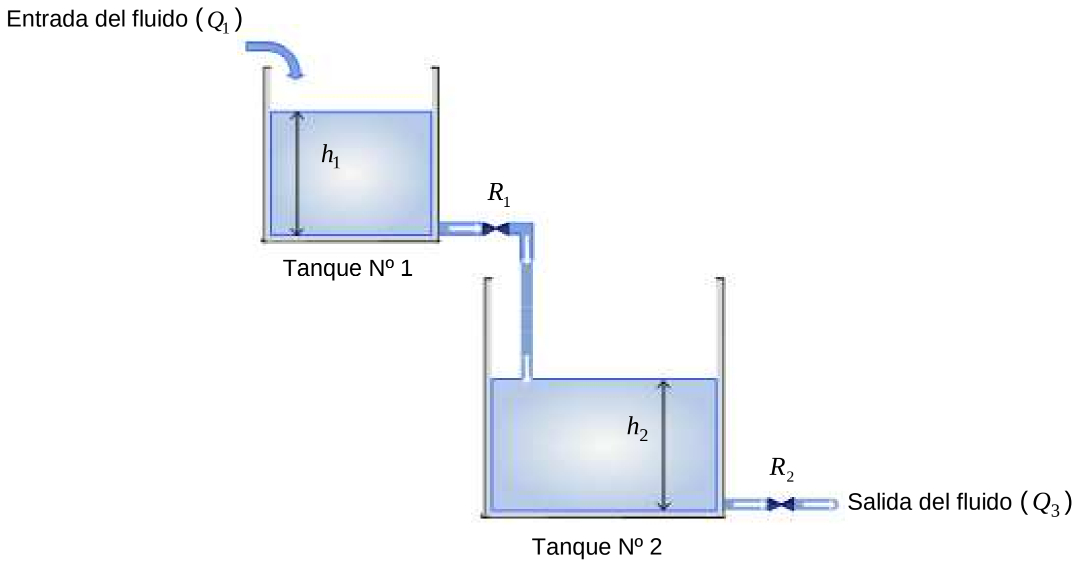

Figura 1 Esquema del sistema de almacenamiento y provisión de agua

Como primera actividad los alumnos realizaron los balances de energía del sistema con la guía de los docentes a cargo de la experiencia [3-5]. Los alumnos propusieron la Ecuación (1) y la Ecuación (2), para el tanque Nº 1 y para el tanque Nº 2, respectivamente.

$$Q_1 - Q_2 = c_1 \frac{dh_1}{dt} \tag{1}$$

$$Q_2 - Q_3 = c_2 \frac{dh_2}{dt} \tag{2}$$

Siendo, Q_1: caudal de alimentación del sistema; Q_2: caudal de salida del tanque Nº 1 y de entrada del tanque Nº 2; Q_3: caudal de salida del sistema; R_i: Resistencia hidráulica $R_i = \frac{h_i}{Q_{i+1}}$; c_i: capacitancia del tanque (área); T_i: constante de tiempo con $T_i = c_i R_i$; con $i = \{1,2\}$.

En el tanque Nº 1 como $R_1 = \frac{h_1}{Q_2}$ y $T_1 = c_1 R_1$; los alumnos dedujeron que $h_1 = \frac{T_1 Q_2}{c_1}$, y con dicho valor de h_1 lo reemplazaron en la Ecuación (1), y obtuvieron

$$Q_1 - Q_2 = T_1 \frac{dQ_2}{dt} \tag{3}$$

Mientras que en el tanque Nº 2 como $R_2 = \frac{h_2}{Q_3}$ y $T_2 = c_2 R_2$; dedujeron que $h_2 = \frac{T_2 Q_3}{c_2}$, y con este valor de h_2 lo reemplazaron en la Ecuación (2), y obtuvieron

$$Q_2 = Q_3 + T_2 \frac{dQ_3}{dt} \tag{4}$$

Luego, derivaron miembro a miembro la Ecuación (4), generando la Ecuación (5)

$$\frac{dQ_2}{dt} = \frac{dQ_3}{dt} + T_2 \frac{d^2 Q_3}{dt^2} \tag{5}$$

Finalmente reemplazaron en la Ecuación (3), la Ecuación (4) y la Ecuación (5), y obtuvieron

$$Q_1 = Q_3 + T_2 \frac{dQ_3}{dt} + T_1 \left(\frac{dQ_3}{dt} + T_2 \frac{d^2 Q_3}{dt^2} \right) \tag{6}$$

Después realizaron un adecuado trabajo algebraico en la Ecuación (6), deduciendo el modelo que representa al sistema dado por la Ecuación (7): [4]

$$T_1\, T_2 \frac{d^2 Q_3}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dQ_3}{dt} + Q_3 = Q_1 \tag{7}$$

Las condiciones iniciales para el modelo planteado son: el caudal de salida inicial es nulo $Q_3(0) = 0$; y la velocidad de salida inicial también es nula, $Q_3'(0) = 0$.

Luego de un proceso de análisis de las ecuaciones planteadas los alumnos formularon los siguientes interrogantes:

1º) ¿Cuál es el sistema de ecuaciones diferenciales equivalente a la ecuación que representa al modelo propuesto?

2º) ¿Cuáles son los autovalores y autovectores asociados al sistema de ecuaciones diferenciales?

3º) ¿Cuál es la matriz fundamental asociada al sistema y cuál su respectiva inversa?

4º) ¿Cuál es la ecuación que determina la evolución del caudal de salida en función del tiempo para los valores indicados?

5º) ¿Cuál es la gráfica del modelo?

5º) ¿Cómo se comporta el sistema?

6º) ¿El sistema podría presentar otros comportamientos diferentes?

7º) ¿A qué valor tiende el caudal de salida para tiempos extremadamente grandes?

8º) ¿Existe algún extremo relativo, o punto de inflexión en la gráfica que se pueda inferir que sea característico del sistema?

9º) ¿Qué sucede en el comportamiento del sistema cuando hay variaciones de las constantes de tiempo en ambos tanques?

Después de discutir y proponer soluciones a los interrogantes surgidos [5], determinaron que la Ecuación (7) puede expresarse mediante una ecuación diferencial vectorial del tipo:

$$q'(t) = A\,x(t) + B \tag{8}$$

siendo las condiciones iniciales dadas por el vector $x(0)$, y el sistema de ecuaciones diferenciales equivalente a la Ecuación (7) y Ecuación (8) es:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_3}{dt} = x \\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{Q_1}{T_1T_2} - \dfrac{Q_3}{T_1T_2} - \dfrac{T_1+T_2}{T_1T_2}x \end{cases} \tag{9}$$

Siendo $k = T_1 + T_2$, y de la Ecuación (9) obtienen la matriz fundamental $X(t)$

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(-k-\sqrt{4+k^2}\right)e^{\frac{1}{2}\left(k-\sqrt{4+k^2}\right)t} & \frac{1}{2}\left(-k+\sqrt{4+k^2}\right)e^{\frac{1}{2}\left(k+\sqrt{4+k^2}\right)t} \\ e^{\frac{1}{2}\left(k-\sqrt{4+k^2}\right)t} & e^{\frac{1}{2}\left(k+\sqrt{4+k^2}\right)t} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Proveniente de (10), calcularon la correspondiente matriz inversa $X^{-1}(t)$

$$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{e^{\frac{1}{2}\left(-k-\sqrt{4+k^2}\right)t}}{\sqrt{4+k^2}} & \dfrac{\left(-k+\sqrt{4+k^2}\right)e^{\frac{1}{2}\left(-k+\sqrt{4+k^2}\right)t}}{2\sqrt{4+k^2}} \\ \dfrac{e^{-\frac{1}{2}\left(k+\sqrt{4+k^2}\right)t}}{\sqrt{4+k^2}} & \dfrac{\left(k+\sqrt{4+k^2}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(k+\sqrt{4+k^2}\right)t}}{2\sqrt{4+k^2}} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Reemplazaron en la Ecuación (9) los datos suministrados, y obtuvieron la Ecuación (12)

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_3}{dt} = x \\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{6}Q_3 - \dfrac{5}{6}x \end{cases} \tag{12}$$

Las condiciones de contorno que aplicaron en la Ecuación (12) son:

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

, y de allí obtuvieron la matriz fundamental de la Ecuación (12), y su correspondiente inversa son:

$$X = \begin{pmatrix} -2e^{\frac{-t}{2}} & -3e^{\frac{-t}{3}} \\ e^{\frac{-t}{2}} & e^{\frac{-t}{3}} \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 3e^{\frac{t}{2}} \\ -e^{\frac{t}{3}} & -2e^{\frac{t}{3}} \end{pmatrix} \tag{15}$$

De la solución de la Ecuación (12), y aplicando las condiciones de contorno de la Ecuación (13), obtuvieron la Ecuación (16) que representa el caudal de salida Q_3

$$Q_3 = 10 + 20e^{-\frac{t}{2}} - 30e^{-\frac{t}{3}} \tag{16}$$

Los alumnos determinaron que la Figura 2 muestra la gráfica que determina la evolución del caudal de salida en función del tiempo, advirtieron además, que al principio el sistema desagota lentamente, mientras que en un tiempo de 5 horas la evacuación es significativa y en 10 horas queda un exiguo caudal para desagotar. En un tiempo de 15 horas prácticamente todo el fluido se evacuó. Además, determinaron que la gráfica de la figura 2 no posee extremos relativos, pero si un punto de inflexión en el punto de abcisa 2,43 (representa 2 horas 26 minutos del comienzo de la salida del fluido del tanque Nº 2), y en ese momento se desagotó sólo un 25% del caudal total. [3]

Por las características del sistema, y con el análisis que realizaron en la Figura 2 y de la Ecuación (11), los alumnos concluyen que el sistema es hiperamortiguado, y que el caudal de salida está acotado en $10\frac{m^3}{h}$ [3]. En la gráfica de la Figura 2, los alumnos indicaron con línea de puntos la asíntota que determina el valor del caudal de salida, y además verificaron este resultado calculando con el software el $\lim\limits_{x->\infty} Q_3(t)$ que permite comprobar el valor de $10\frac{m^3}{h}$. [4]

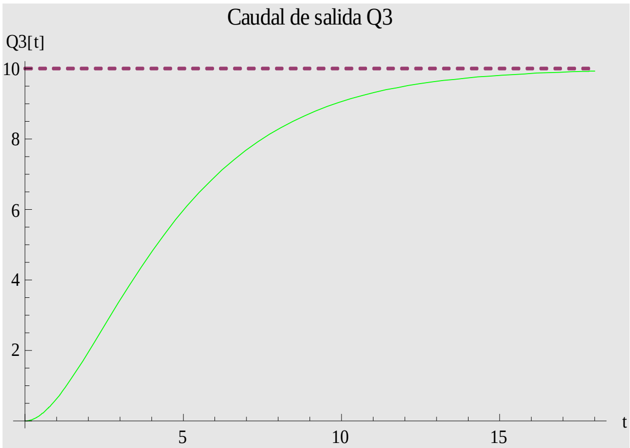

Figura 2 Gráfica de la función Caudal de salida final

Del análisis realizado, los alumnos determinaron que la expresión $(T_1 + T_2)^2 - 4T_1T_2$ es el discriminante del polinomio característico de la Ecuación (11), y además, verifica que

$$(T_1 + T_2)^2 - 4T_1T_2 = (T_1 - T_2)^2 \tag{17}$$

Los alumnos concluyeron que ambos miembros de la Ecuación (17) son siempre positivos, y en consecuencia el sistema es sobreamortiguado [3]. Además, manifestaron la imposibilidad que el sistema sea subarmortiguado ya que el segundo miembro de la Ecuación (17) nunca será negativa, y corroboraron que tampoco el sistema será críticamente amortiguado porque la relación las constantes T_1 y T_2 resultarían iguales y eso implicaría un caudal de salida nulo.

En la Figura 3 observaron el comportamiento del sistema tomando distintos valores de T_2 siempre mayores a un valor de T_1 constante, y concluyeron que a medida que la constante de tiempo del segundo tanque crece, el tiempo para la evacuación de los tanques es menor. Cuando ambas constantes son similares vieron que se necesita un tiempo considerable para producir su desagote.

Análogamente, en la Figura 4 identificaron la situación inversa, analizaron el comportamiento del sistema tomando distintos valores de T_1 siempre mayores a un valor de T_2 al que también mantienen constante. En este caso también observaron, que si la constante de tiempo del primer tanque crece se necesita mayor tiempo para su desagote.

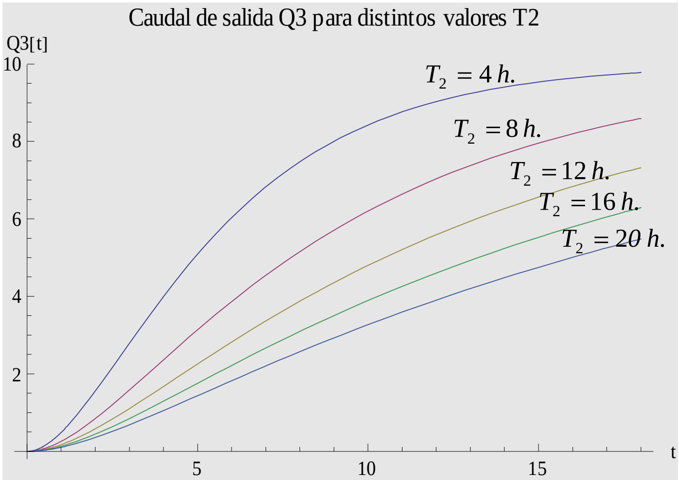

Figura 3 Gráfica de la función Caudal de salida final para $T_2 > T_1$ para valores constantes de T_1

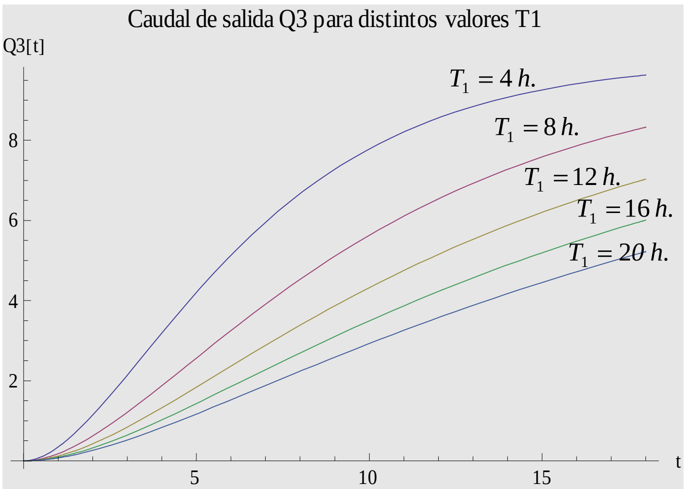

Figura 4 Gráfica de la función Caudal de salida final para $T_2 < T_1$, para valores constantes de T_2

En todos los casos, si extienden el dominio de las gráficas de la Figura 3 y de la Figura 4 comprueban que cuando el tiempo tiende a infinito el caudal de la corriente de salida tiende a $10 m^3 / h$.

5. CONCLUSIONES

El ambiente colaborativo desarrollado en el Laboratorio de Ciencias Básicas y la metodología de enseñanza aplicada otorgó a los alumnos una serie de estrategias y habilidades para resolver la actividad propuesta, que se tradujo en un incremento del interés y la motivación.

Los docentes que llevan a cabo la experiencia propiciaron el desarrollo y la articulación de los conceptos por medio de una situación didáctica de escasa complejidad que ofreció a los estudiantes integrar los conocimientos en un aprendizaje funcional y significativo.

La visualización realizada con el apoyo de herramientas computacionales permite explorar los conceptos del tema Autovalores y autovectores, y descubrir las relaciones que estos conceptos tienen con otros de la misma asignatura y con el modelo presentado.

La propuesta presentada en la clase se basa en un aprendizaje integrado y sistémico. Esta experiencia es diferente a la que se presenta en el resto de los cursos cuándo se trata el tema Autovalores y autovectores, la misma está basada en el diálogo permanente, la afinidad de criterios y fundamentalmente en la participación activa del protagonista principal del hecho educativo que es el alumno.

6. REFERENCIAS

[1] A.Tinnirello, E. Gago, Designing Interdisciplinary Interactive Work: Basic Sciences in Engineering Education. International Conference on Interdisciplinary Social Sciences. University of Cambridge, Cambridge. The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences. Publisher Site: http://www.SocialSciences-Journal.com. Año 2010.

[2] E. Gago, M. Dádamo. La importancia del enfoque multidisciplinar en la enseñanza en Ingeniería Mecánica, II CAIM - Segundo Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica. San Juan, 16 al 19 de noviembre de 2010. ISBN: 978-950-605-633-9. Editorial: Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de San Juan.

[3] K. Ogata, Ingeniería de Control Moderna, Editorial Pearson, México, 4ª Ed., 2010.

[4] R. Nagle, E. Saff, Ecuaciones diferenciales y problemas con los valores en la frontera, Editorial Pearson, México, 4ª Ed., 2005.

[5] D. Poole, Algebra lineal: una introducción moderna, Editorial Thomson, México, 2ª Ed., 2007.