

# ESTUDIO DE GRANDES MÁQUINAS ELÉCTRICAS APLICANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Tomás E. Pujal Mancera, Claudio A. Careglio, Anibal E. Mirasso

*Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo,  
Parque Gral. San Martín, Mendoza, Argentina*  
*tomy\_pujal@hotmail.com, ccareglio@uncu.edu.ar, aemirasso@uncu.edu.ar*  
*Casilla de Correo 947, 5500 Mendoza, Argentina*

## RESUMEN

Las máquinas eléctricas desempeñan un papel fundamental en los procesos de conversión y transformación de la energía eléctrica y deben ser lo más eficientes posibles. Particularmente en las máquinas de polos salientes, la forma de la expansión polar es determinante en la distribución de la inducción y en el flujo útil que llega al estator proveniente del rotor, y así en la eficiencia de la generación de energía.

Es bien conocida la posibilidad de utilizar métodos numéricos, en particular el método de elementos finitos, para ajustar parámetros de diseño en problemas gobernados por ecuaciones de campo.

En búsqueda de analizar distintas geometrías de polos salientes se resuelven, en este trabajo, las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo mediante el método de los elementos finitos. Se modela así el comportamiento de un generador sincrónico obteniendo valores de la inducción magnética y el flujo, que permitan lograr un compromiso entre factores constructivos de la máquina. Se analiza una sección transversal de modo que es posible considerar un modelo plano simplificado del problema. Se varía en forma paramétrica la expansión polar para analizar cómo sus modificaciones geométricas, inciden en el nivel de dispersión de las pérdidas que en general son muy difíciles de medir experimentalmente.

Seguidamente se plantea la simulación del ensayo de vacío de una máquina para una geometría ampliada, considerando permeabilidades no lineales del hierro.

Con la aplicación del método de los elementos finitos y ecuaciones análogas a las analizadas en el presente artículo, es posible extender la interpretación a casos más complejos que los analizados en ensayos de laboratorio y poder así obtener conclusiones sobre el funcionamiento y eficiencia de las máquinas.

**Palabras Claves:** Elementos Finitos, Generadores Eléctricos, Ensayo de Vacío, Inducción Magnética

## 1. INTRODUCCIÓN

La eficiencia de los procesos de conversión y transformación de la energía eléctrica depende de distintos aspectos de diseño. En el caso de generadores eléctricos de polos salientes, la forma de la expansión polar es determinante en la distribución de la inducción y en el flujo útil que llega al estator proveniente del rotor, y por lo tanto en la eficiencia de la generación de energía. Así resulta de interés para el diseñador poder analizar desde el punto de vista del flujo magnético, distintas geometrías mecánicamente adecuadas. Para tal fin, es de utilidad la aplicación de modelos numéricos que puedan representar el fenómeno, y evaluar para los distintos diseños, como sus modificaciones geométricas, inciden en el nivel de dispersión de las pérdidas de flujo que en general son de difícil y costosas formas de medición experimental.

Entre los distintos métodos numéricos de posible utilización para problemas de campo es de reconocida eficiencia el método de los elementos finitos [1]. La aplicación del método de los elementos finitos en problemas electromagnéticos fue introducida en la década del 70 por los trabajos pioneros de Silvester y Chari [2-3]; y Anderson [4] entre otros, donde se proponen formas de soluciones iterativas para contemplar las capacidades computacionales de la época.

Se presenta a continuación, la resolución de las ecuaciones básicas del electromagnetismo de Maxwell mediante el método de los elementos finitos, para modelar el comportamiento de un generador eléctrico, en la búsqueda de analizar distintas geometrías de polos salientes. Se considera una sección transversal de modo que es posible resolver un modelo plano simplificado del problema. Se analizan dos formas de la expansión polar para evidenciar como sus modificaciones geométricas, inciden en el nivel de dispersión del flujo interpolar que en general es muy difícil de medir experimentalmente.

Luego, basándose en lo estipulado en normas internacionales [9], se plantea la implementación del ensayo de vacío de la máquina para una geometría ampliada.

## 2. ECUACIONES QUE GOBIERNAN EL PROBLEMA

El estudio de la magnetostática se puede sintetizar en las ecuaciones de Maxwell para el campo magnético, particularizadas para el caso estacionario ([1], [5], [6]):

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} &= 0 \\ \nabla \times \bar{\mathbf{H}} &= \bar{\mathbf{J}}\end{aligned}\tag{1}$$

donde  $\bar{\mathbf{J}}$  es la densidad de corriente,  $\bar{\mathbf{B}}$  es la densidad de flujo magnético y  $\bar{\mathbf{H}}$  es la intensidad de campo magnético.

Ambos vectores se relacionan a través de la permeabilidad del medio  $\mu$ , en lo que es posible considerar como relación constitutiva para cada material:

$$\bar{\mathbf{B}} = \mu \cdot \bar{\mathbf{H}}\tag{2}$$

En el caso no lineal, es usual definir una curva que describe el comportamiento magnético del material. Para un primer análisis, se asumen como lineales los materiales del cobre y el aire con sus respectivas permeabilidades unitarias.

Por ser  $\bar{\mathbf{B}}$  un campo rotacional, puede definirse un potencial vector  $\bar{\mathbf{A}}$  tal que:

$$\bar{\mathbf{B}} = \nabla \times \bar{\mathbf{A}} \quad (3)$$

Así, al considerar las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (1), resulta:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{\mathbf{A}} \right) = \bar{\mathbf{J}} \quad (4)$$

Al tomar una sección plana cuyo eje coordenado normal es el eje z se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_y} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_x} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J \quad (5)$$

Siendo de esta manera A una función escalar incógnita; y J una función escalar dato. Ambas dependientes de las coordenadas x e y. En general las permeabilidades  $\mu_x$  y  $\mu_y$  pueden ser distintas en cada dirección coordenada.

Para resolver el problema planteado en la ecuación (5), es posible considerar el método de elementos finitos en su versión de Galerkin para operadores de orden par [1]. Es posible demostrar [1] que en este caso la solución de la ecuación diferencial (5) se consigue mediante la solución del siguiente problema integral:

$$\iint_A \left\{ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{1}{\mu_x} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{1}{\mu_y} \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \right\} dx dy - \iint_{A_n} \{ v(x, y) \cdot J(x, y) dx dy \} = 0 \quad (6)$$

para toda función de ponderación  $v(x, y)$  linealmente independiente.

Dado que la función incógnita requiere de continuidad C0 es posible considerar elementos finitos triangulares. Así se contempla una división del dominio en elementos triangulares tan simples como sea posible denominados en forma genérica "e", y definidos por sus vértices que son los nodos (i, j, k). En el interior de cada elemento se define la función incógnita como:

$$A_e = N_i A_i + N_j A_j + N_k A_k \quad (7)$$

siendo  $N_i$ ;  $N_j$ ;  $N_k$  las denominadas funciones de forma del elemento triangular que resultan lineales en las coordenadas x e y [1]; y  $A_i$ ;  $A_j$ ;  $A_k$  las incógnitas nodales.

Al considerar la interpolación dada por la ecuación (7), y tomar como funciones de ponderación a las mismas funciones  $N_i$ ;  $N_j$ ;  $N_k$ , la ecuación (6) resulta:

$$\sum_{n=1}^{NELEM} \iint_{A_n} \left\{ \frac{\partial N_m}{\partial x} \cdot \frac{1}{\mu_x} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial y} \cdot \frac{1}{\mu_y} \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \right\} dx dy - \iint_{A_n} \{ N_m \cdot J(x, y) dx dy \} = 0 \quad (8)$$

Con NELEM igual a la cantidad de elementos finitos utilizados; m tomando los valores de i, j y k de cada elemento.

Las ecuaciones (8) constituyen un sistema de ecuaciones lineales siempre que las permeabilidades sean constantes; y un sistema de ecuaciones no lineales, cuando no lo es. La solución del mismo permite obtener el potencial magnético para cada punto nodal de la malla definida en el dominio bajo estudio y mediante la interpolación dada por la ecuación (7) se tiene una aproximación en todo el dominio.

Conocido el potencial magnético A en todo el dominio, el campo magnético B se obtiene calculando las derivadas del potencial en cada punto. Es decir las componentes del flujo resultan:

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y}; \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} \quad (9)$$

Dado que las funciones de interpolación dadas por la ecuación (7) son lineales, resulta que el flujo es constante dentro de cada elemento finito triangular considerado.

### 3. ANÁLISIS DE GEOMETRÍAS

#### 3.1. Casos analizados

En los generadores eléctricos de polos salientes como los utilizados en centrales hidroeléctricas, el número de polos puede variar dependiendo de la velocidad de giro y de la frecuencia. Por ejemplo, en máquinas de baja potencia para grandes saltos hidráulicos con una velocidad de 600 rpm, se tiene 5 pares de polos. En contraparte, en generadores de gran potencia con velocidades bajas, alrededor de 75 rpm, la relación de sincronismo indica 40 pares de polos, es decir, máquinas de hasta 80 polos.

En la Fig.1 se puede observar uno de los diseños considerados. Se plantea la geometría del rotor de un generador eléctrico de polos salientes con su respectivo entrehierro. Al existir una simetría en cada una de las expansiones polares, se puede simplificar el análisis al tomar solo una mitad de las mismas. Para el modelo propuesto, también se incluye la zona del entrehierro (aire) y el bobinado rotórico que es el encargado de suministrar la corriente de campo. Con el fin de comparar distintas geometrías, ésta última se la mantiene constante e igual a 1000 A. El aire se lo define con permeabilidad unitaria. Análogas condiciones se imponen al cobre de la bobina con una conductividad eléctrica cercana a 60 MS/m.

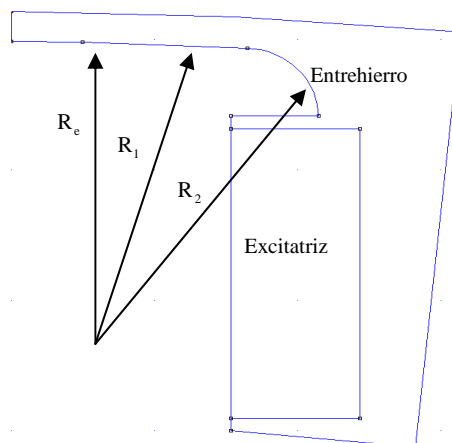


Fig. 1. Primer modelo de geometría utilizado. Se ilustran los tres arcos de radio empleados en el diseño de la expansión polar y la bobina rotórica junto con el entrehierro correspondiente.

En este primer modelo (Fig.1), la forma de la expansión polar de las máquinas eléctricas se ha definido con tres arcos de circunferencias. El primero caracterizado por el radio y el centro del estator; el segundo arco es de transición y el tercero conforman el cuerno polar.

En cambio, en el segundo modelo (Fig.2), sólo se han realizado dos arcos de circunferencias. El primero de ellos también es concéntrico con el estator pero de mayor extensión. Sin embargo, luego se ha corregido el otro arco por uno más pronunciado que termina de dar forma a la expansión polar, tal como se visualiza en la Fig. 2.

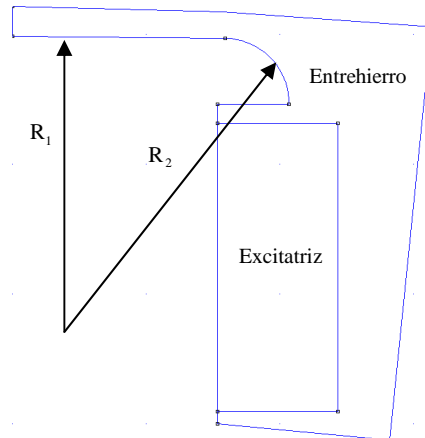


Fig.2. En este segundo modelo sólo se consideran dos radios de circunferencia.

### 3.2. Resultados

El problema discretizado por elementos finitos, es resuelto con el software FEMM 4.2 [7]. Con el postprocesador del software empleado, se obtiene la densidad de flujo magnético  $B$  para ambos modelos, como se puede ver en las Fig.3 y 4.

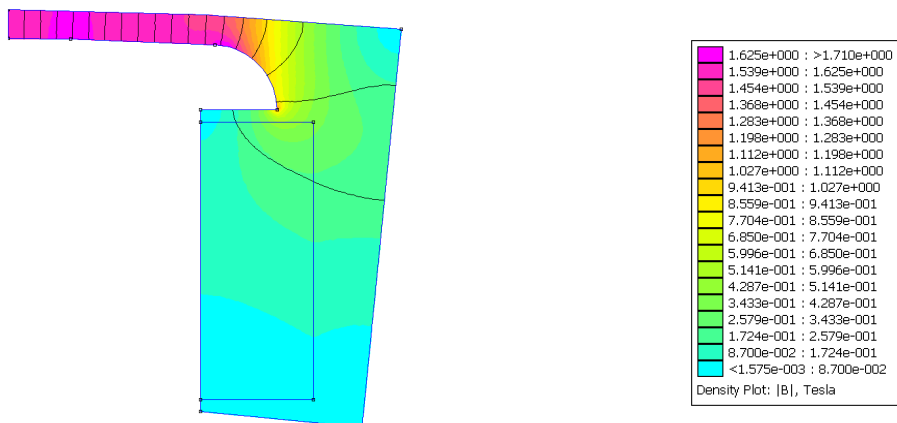


Fig. 3. Resultado del flujo magnético y escala cromática para el primer modelo de tres arcos de radio.

Se puede observar en la Fig.3 que la intensidad de la densidad del flujo magnético  $B$  a lo largo del entrehierro es bastante uniforme. A lo largo de la sección de simetría radial entre polos se produce un flujo de relativa baja intensidad comparado con la intensidad de flujo en el entrehierro.

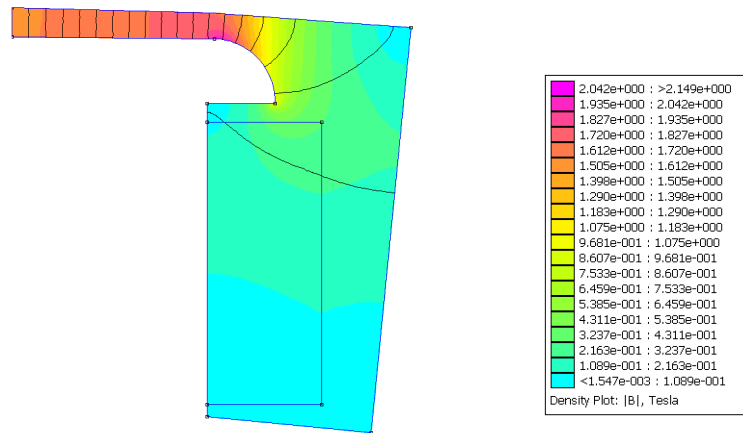


Fig. 4 Análisis del segundo modelo, donde se puede ver la variación del flujo magnético respecto del caso anterior.

Se puede observar que la intensidad de la densidad del flujo magnético B a lo largo del entrehierro no resulta uniforme en este caso.

#### 4. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

La evaluación del funcionamiento de un generador se lleva a cabo sometiéndolo, una vez que éste ha sido ensamblado, a una serie de pruebas para garantizar sus prestaciones. Una forma de referencia es la determinación y comparación de los parámetros del generador obtenidos en los ensayos de laboratorio.

Se busca simular la característica en vacío de la máquina, tomando como antecedente el trabajo de Vargas y Hernández [10]. Para ello, se siguen los pasos descritos en la IEEE Std 115 -1995 [9], variando la corriente de campo para obtener la densidad de flujo resultante.

En vistas a introducir materiales que no presentan una relación lineal en sus permeabilidades y salvando la dificultad enfrentada por otros autores [11]; se modelan 4 polos completos del rotor con su correspondiente sector del estator de la máquina. La geometría analizada con sus respectivos valores hallados con el software usado, se ilustran en la Fig. 5.

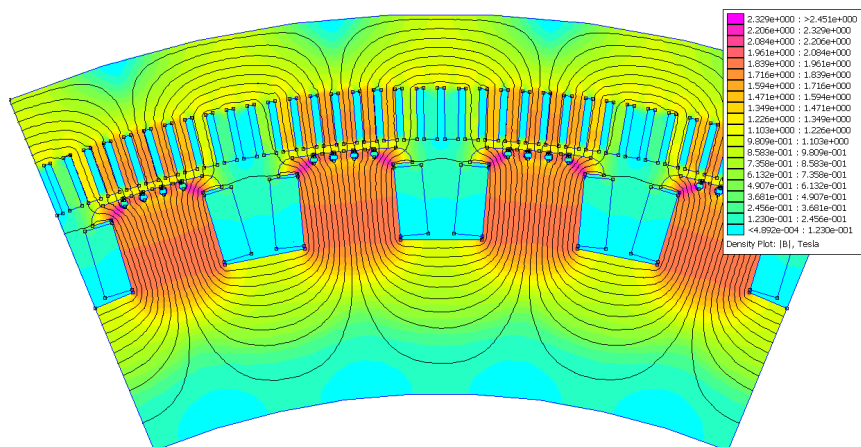


Fig. 5 Sector del generador empleado para el ensayo de vacío.

Cabe destacar cómo se cierran las líneas de campo entre los polos y cómo se concatena el flujo provenientes de la parte inductora hacia el inducido.

En la simulación del ensayo de circuito abierto realizada, se fue incrementando la corriente de excitación y registrando el valor pico de la densidad de flujo obtenida (Tesla). El material tanto del estator como del rotor, distintos tipos de acero, poseen gráficas B-H no lineales. Al graficar ambas magnitudes, se llega al comportamiento en vacío de la máquina cómo se muestra en la Fig. 6.

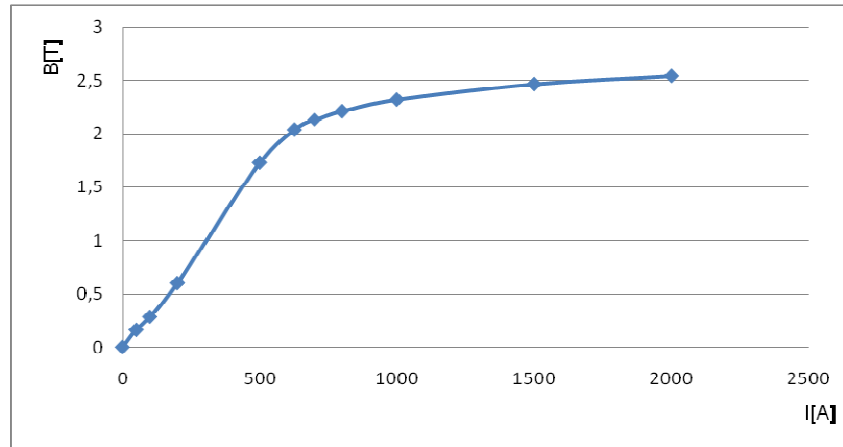


Fig. 6 Curva característica de circuito abierto de la máquina.

El primer tramo de la curva, denominado línea de entrehierro [8], presenta un comportamiento lineal. El mismo, continúa hasta alcanzar una saturación correspondiente a altas corrientes de campo. Dado que el hierro no saturado en el marco de la máquina sincrónica tiene una reluctancia varios miles de veces menor que la reluctancia del entrehierro, al principio casi toda la fuerza magnetomotriz se ejerce a través del entrehierro y el incremento en el flujo resultante es lineal. Luego, cuando finalmente se satura el hierro, su reluctancia se incrementa en forma notable y el flujo aumenta en forma más lenta.

## 5. CONCLUSIONES

Se ha presentado el empleo del método de elementos finitos para la solución de las ecuaciones básicas del electromagnetismo de Maxwell. Se ha desarrollado una síntesis de dichas ecuaciones y su discretización mediante funciones lineales de soporte local en elementos triangulares de dominio.

Se analizó el flujo magnético en una sección transversal de la expansión polar de generadores eléctricos, como los utilizados en centrales hidroeléctricas de generación. Para evidenciar cómo las modificaciones geométricas de posibles diseños mecánicos, inciden en el flujo, se consideraron dos diseños distintos de forma polar para una misma máquina.

Se obtuvo el flujo magnético en ambos casos y se comparó el flujo en el entrehierro entre rotor y estator. Ya que éste flujo es de difícil determinación experimental es que resulta de interés la utilización de este tipo método numérico para comparar diseños.

La geometría con tres radios de curvatura para definir el polo saliente presentó una distribución de flujo entre rotor y estator más uniforme que la geometría definido con sólo dos radios de curvatura, considerándose por lo tanto de mejor eficiencia.

Para expandir el análisis a todo un sector de la máquina incorporando el estator, se graficaron cuatro polos y se planteo el mismo desarrollo que para las otras geometrías. En este caso, al emplear materiales con permeabilidades no lineales, se pudo obtener distintas repuestas del flujo al variar la corriente de campo. De esta forma se esboza el ensayo de vacío del generador síncrono, posibilitando futuras aplicaciones y demás ensayos.

#### 4. REFERENCIAS

- [1] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The finite element method. Its basis & fundamentals*, McGraw Hill, 2006.
- [2] P. Silvester, M.V.K. Chari, *Finite element solution of saturable magnetic field problems*. IEEE Transaction, Volume, PAS-89, Sep/Oct. 1970. pp.1642-1651.
- [3] M.V.K. Chari, P. Silvester. *Analysis of turboalternator magnetic fields by finite elements*. IEEE Transaction, Volume, PAS-90, March/April. 1971. pp.454-464
- [4] O.W.Anderson. *Iterative solution of finite element equations in magnetic field problems*. IEEE PES Summer Meeting, San Francisco, California, 1972.
- [5] J. P. A. Bastos, N. Sadowsky: *Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods*. Marcel Dekker, INC, New York, 2003.
- [6]. Jianming Jin: *The Finite Element Methods in Electromagnetics*. John Wiley, New York (2002)
- [7]. Finite Element Method Magnetics, <http://www.femm.info>.
- [8] S. J. Chapman, *Máquinas Eléctricas*, McGraw Hill, Colombia, 2004.
- [9] Institute of Electrical and Electronics Engineers: *Test Procedures For Synchronous Machines*. Comité de Maquinas Eléctricas de la IEEE. ANSI/IEEE Std 115-1995.
- [10] C. Vargas, T. Hernández, *Estimación de los parámetros eléctricos del generador No. 15 de la central hidroeléctrica Simón Bolívar, basado en la aplicación del método de los elementos finitos*. XIII Encuentro Regional Iberoamericano de Cigré, Argentina, 2009.
- [11] E. H. José, A. Millán, J. Toledo, *Modelaje en máquinas sincrónicas de polos salientes de 220 MVA del proyecto hidroeléctrico Caruachi para la estimación de parámetros mediante simulaciones numéricas*, Venezuela, 2003.

#### Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo financiero brindado a través del proyecto 06/B175 otorgado por la SECTyP de la Universidad Nacional de Cuyo. El segundo autor agradece a CONICET por su beca doctoral.