



*II CAIM 2010  
Segundo Congreso Argentino  
de Ingeniería Mecánica  
San Juan - Noviembre 2010*

## **Aplicaciones del MatLab al Álgebra Lineal**

González Verónica<sup>(1)</sup>, Guiotto Esteban<sup>(1)</sup>, Ame Ricardo, Comoglio Marta,  
Charczuk Norberto<sup>(1)</sup>, Moret Pablo, Wysocki Rafael, No Irma

*Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional de Lomas de Zamora  
Juan XXIII y Cno de Cintura - Campus Universitario – Buenos Aires – Argentina  
Tel/Fax: +54-(011)4282 - 7880 - E-mail: [investigacion-fi@ingenieria.unlz.edu.ar](mailto:investigacion-fi@ingenieria.unlz.edu.ar)*

<sup>(1)</sup>[veronica\\_andrea\\_gonzalez@hotmail.com](mailto:veronica_andrea_gonzalez@hotmail.com) - [guiottoe@yahoo.com.ar](mailto:guiottoe@yahoo.com.ar) - [norcknet@gmail.com](mailto:norcknet@gmail.com)

### **RESUMEN**

El cambio de paradigma sobre la enseñanza de la matemática a partir de la utilización de nuevas tecnologías computacionales nos ha introducido a experimentar grandes transformaciones en las formas de enseñar, ya que la incorporación de la computadora ofrece una oportunidad diferente de la enseñanza tradicional, mostrando la importancia de ella para modelar la realidad, comprenderla, analizarla y tomar decisiones.

Se observa a menudo ciertos obstáculos entre los alumnos en relación al aprendizaje de asignaturas del áreas de Ciencias Básicas, en particular, Matemática tales como falta de motivación, bajos niveles de conocimiento al ingreso esto sumado a que docentes del Ciclo Superior de la carreras de Ingeniería reclaman el uso del Matlab, esgrimiendo la variedad de áreas de aplicación y argumentando que es la herramienta más adecuada para la resolución de problemas en ingeniería y ciencias. Se decidió experimentar con simulaciones, presentar algunas aplicaciones de esta herramienta e integrar conocimientos a través de trabajos interdisciplinarios en el área de la física, electrotecnia y termodinámica que muestren al alumno su empleo en distintos temas específicos de su formación profesional.

Comentamos en primer lugar las razones que estimularon esta experiencia y presentamos una síntesis del proyecto: objetivos, método e hipótesis, la utilización de Matlab como herramienta pedagógica y presentamos algunas ideas y conclusiones preliminares.

**Palabras Claves:** MatLab – Aplicaciones matemáticas – Docencia - Modelado

## 1. Introducción

La incorporación de las Tics en los procesos de enseñanza y aprendizaje (E/A) de las instituciones educativas en los últimos años, es ya una realidad de la que también se hace partícipe la educación matemática. En el caso de la enseñanza de la Matemática en carreras de Ingeniería se observa como docentes de los Ciclos Superiores plantean la necesidad de que los alumnos desarrollen habilidades para el uso de diversos software, en particular del programa de cálculo científico Matlab (Matrix Laboratory) argumentando que se trata de una potente herramienta de cálculo numérico y visualización de uso muy difundido a nivel mundial en los ambientes industrial y académico en tareas de investigación, desarrollo y diseño, en diversas áreas tales como procesamiento de señales e imágenes, diseño de sistemas de control, ingeniería financiera entre otros.<sup>1</sup>

Se trata de un diseño abierto que facilita su uso y al que el usuario puede incorporar nuevas funciones a través de aplicaciones particulares, existiendo también extensiones de Matlab denominadas Toolboxes que son colecciones de funciones de Matlab que permiten resolver problemas específicos en diversas áreas de la ciencia e ingeniería.

Estas alternativas, que permiten explorar datos y crear herramientas personalizadas, facilitan la adquisición de visiones profundas y tempranas lo que en largo plazo constituye ventajas competitivas para el futuro profesional. Además, como mencionamos antes, es la herramienta más adecuada para la resolución de problemas en ingeniería y ciencias.

Por las razones señaladas, algunas cátedras de las carreras de Ingeniería de la UNLZ, vienen trabajando coordinadamente en un proyecto de investigación aplicado que pretende desarrollar objetos didácticos a partir de este software y utilizarlos en la formación temprana de los alumnos, con el objetivo de despertar la motivación de los alumnos y producir un impacto positivo en los aprendizajes..

## 2. Objetivos

S partir de las cuestiones planteadas en el apartado precedente, valorando la importancia que a la estructura del pensamiento lógico aporta MatLab, y sus posibles aportes a incrementar la motivación de los alumnos por un lado y mejorar el rendimiento académico por el otro, el equipo de trabajo se ha propuesto experimentar con innovaciones en las estrategias de enseñanza incorporando la utilización de software específicos en los primeros años de estudio. Esta metodología ofrece una oportunidad diferente a la enseñanza tradicional facilitando transferir los aspectos operativos y calculísticos de la matemática para ser realizados en la computadora y reservando las clases, para exponer las ideas y los conceptos que son importantes en las aplicaciones, mostrando el aporte que ella hace para modelar la realidad, comprenderla, analizarla y tomar decisiones, a través de la integración de conocimientos por medio de trabajos interdisciplinarios que muestren al alumno dónde y cómo se aplican los temas que se le enseñan, y la contribución matemática – en este caso – para la solución de problemas del mundo que los rodea.

De este modo, nos propusimos

- ✓ Analizar y evaluar estrategias pedagógicas y técnicas destinadas a optimizar la eficiencia de proceso de enseñanza-aprendizaje.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> GOMEZ, Juan Carlos et al *Teoría de Sistemas y Señales*. Universidad Nacional de Rosario. 2009

- ✓ Iniciar a los alumnos en la utilización del MatLab, para mejorar la calidad de la enseñanza de la asignatura en concordancia con el avance de las tecnologías como marco metodológico para la consolidación con el resto de la comunidad universitaria.
- ✓ Incentivar en los alumnos la necesidad de la utilización del Matlab como poderosa herramienta de cálculo, simulación y modelado matemático.
- ✓ Valorar el lenguaje flexible e interactivo del Matlab que otorga a los ingenieros y científicos un medio para expresar sus ideas técnicas con simplicidad.
- ✓ Lograr que el alumno de la Facultad de Ingeniería de la UNLZ pueda perfeccionar una metodología de pensamiento lógico, corregir sus propias respuestas, desarrollar su ingenio y creatividad en la resolución de problemas.
- ✓ Emplear la computadora no como un fin en sí mismo, sino como una herramienta más al servicio de fines determinados.

### 3. Hipótesis

Nuestra hipótesis de trabajo es la siguiente:

*La incorporación de herramientas tecnológicas como el MatLab a la enseñanza de la matemática promueve una mayor profundidad del basamento teórico de los alumnos si se lo compara con el proceso de adquisición de conocimientos a través de estrategias tradicionales de enseñanza y aumenta la motivación por la materia, impactando positivamente en los indicadores de aprobación.*

Las preguntas que guiaron la presente investigación son:

¿El uso del MatLab promueve la adquisición de una mayor profundidad de basamento teórico para medir los índices de aprobación de la asignatura?

¿El uso de la tecnología influye en la motivación en las asignaturas de Ciencias Básicas, específicamente en el área de Matemática?

¿De qué manera el uso del MatLab favorece la adquisición y aplicación de de conocimiento matemático en comparación con los métodos tradicionales, para la posterior implementación a otros contenidos del área?

¿En qué medida influye esta herramienta informática en el desarrollo de las competencias del futuro ingeniero?

### 4. Materiales y métodos

Se trata de un estudio con una primera fase exploratoria en los aspectos vinculados a la indagación de las posibilidades de aplicación del software MatLab a la enseñanza del Álgebra Lineal y su aplicación práctica a problemas de la ingeniería, así como también, la revisión y análisis de los programas de Matemática II (donde aparecen los contenidos de Álgebra Lineal). En relación a los resultados que se obtengan respecto de la calidad de los aprendizajes, medidos a través de los indicadores de aprobación y complejidad de resolución de situaciones problemáticas, se prevé un diseño descriptivo y transeccional que permitirá evaluar la tendencia de series históricas de aprobación a partir de las calificaciones de los alumnos que participen de la experiencia y del nivel de dificultades en el área de solución de problemas aplicados a la ingeniería. Así mismo se medirá la motivación de los alumnos a través de encuestas de opinión.

En esta primera etapa exploratoria, se diseñaron de materiales de apoyo a la enseñanza del álgebra con la utilización intensiva del software MatLab. Se trata de una experiencia piloto que ha facilitado la integración

de los mismos al proceso de enseñanza. Durante su desarrollo se pudo medir la respuesta de los alumnos ante cada estímulo didáctico: creatividad en la resolución de problemas, incorporación y fijación de conocimientos, satisfacción, motivación entre otras dimensiones.

En el caso de los docentes participantes, evaluar percepciones sobre impacto de las competencias logradas en el aprendizaje de los alumnos y posibilidades futuras de desarrollo. La recolección de datos tiene lugar a través de encuestas y entrevistas estructuradas.

Se utilizó el laboratorio de computación de la facultad, el software MatLab, proyector y materiales didácticos especialmente diseñados para este proyecto tales como guías de trabajos prácticos y de investigación. Se utilizaron, asimismo, libros de texto y artículos de revistas científicas sobre la temática.

## 5. Ejemplos de actividades

Los ejemplos varían desde empleo dentro de la Matemática misma hasta las aplicaciones a la Ingeniería y desde aquello que es viable, de resolución inmediata hasta las aplicaciones a otras áreas de mayor nivel de complejidad, en donde fue necesario acercarles la resolución y las fórmulas que el ejemplo requería.

1- Sean los vectores  $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$  y  $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$  utilizar MATLAB para calcular el producto  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  de estos vectores de dos formas distintas:

- Definiendo  $\mathbf{u}$  como vector fila y  $\mathbf{v}$  como vector columna usar el producto común
- Usando el comando `dot`.

## 2- Sistemas equivalentes de fuerzas (suma de vectores)

Se aplican tres fuerzas a un soporte, tal y como se muestra en la figura. Determinar la fuerza total (equivalente) aplicada al soporte

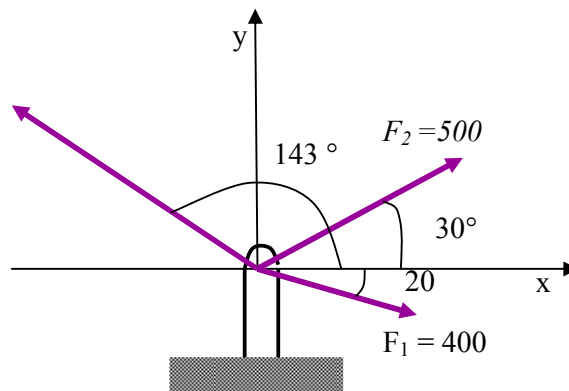


Figura 1 Sistemas equivalentes de fuerzas

## Solución

Una fuerza puede considerarse como un vector que, desde el punto de vista físico, posee un módulo y una dirección. En un sistema de coordenadas cartesianas un vector  $\mathbf{F}$  puede ser expresado como

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} = F \cos \theta \mathbf{i} + F \sin \theta \mathbf{j} = F (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \quad (1)$$

donde  $F$  es el modulo de la fuerza, y  $\theta$  es el ángulo respecto al eje  $x$ .  $F_x$  y  $F_y$  son las componentes de  $F$  en las direcciones de los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente, e  $i$  y  $j$  son los vectores unitarios en esas direcciones.  $F$  y  $\theta$  pueden calcularse usando

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{tg } \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad (2)$$

La fuerza total (equivalente) aplicada al soporte se obtiene sumando todas las fuerzas que actúan sobre él. Utiliza MATLAB para determinar la fuerza total y su dirección.

3- Se dispara un proyectil con una velocidad inicial de 250 m/s, con un ángulo relativo al suelo de  $\theta = 65^\circ$ . El proyectil se dispara en dirección norte. Debido a fuertes vientos que soplan hacia el oeste, el proyectil se mueve también en esa dirección a una velocidad de 30 m/s. Calcular y trazar la trayectoria del proyectil hasta que éste alcanza el suelo.

A modo de comparación, trazar también (en la misma figura) la trayectoria que supuestamente debía haber seguido el proyectil si no hubiera intervenido el viento.

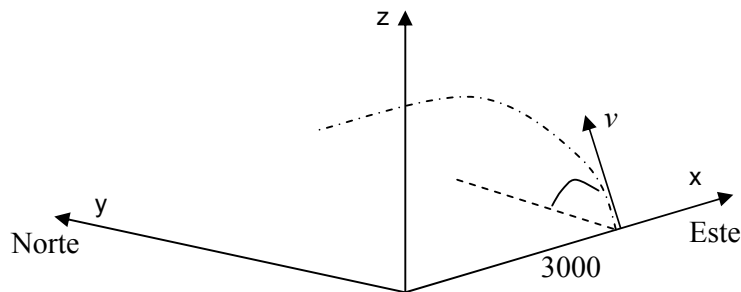


Figura 2 Movimiento de un proyectil

### Solución

Como se muestra, el sistema se ha establecido de forma que los ejes  $x$  e  $y$  apuntan en dirección este y norte. Por lo tanto, el movimiento del proyectil se puede analizar considerando la dirección vertical  $z$ . Como el proyectil se dispara hacia el norte, la velocidad inicial  $v_0$  se puede descomponer en su componente horizontal  $y$  y su componente vertical  $z$ :

$$v_{0y} = v_0 \cos \theta \quad v_{0z} = v_0 \sin \theta \quad (3)$$

Además, a causa del viento el proyectil adquiere una velocidad constante en la dirección del eje  $x$  negativo,  $v_x = -30$  m/s.

La posición inicial del proyectil está en el punto  $(3000;0;0)$ . En la dirección vertical la velocidad y la posición del proyectil vienen dadas por:

$$v_z = v_{0z} - g t \quad \text{y} \quad z = z_0 + v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (4)$$

El tiempo que necesita el proyectil para alcanzar la altura máxima ( $v_z = 0$ ) es

$$t_{max} = \frac{v_{0z}}{g} \quad (5)$$

El tiempo total de vuelo es dos veces ese tiempo,  $t_{tot} = 2 t_{max}$ . En la dirección horizontal, la velocidad es constante (en ambas direcciones  $x$  e  $y$ ), y la posición del proyectil viene dada por

$$x = x_0 + v_x t \quad y = y_0 + v_{0y} t \quad (6)$$

Resolver el problema con MATLAB aplicando los siguientes pasos:

- Definir las variables  $v_0, g, \theta, x_0, v_x$
- Introducir como funciones  $v_{0z}, v_{0y}$  y  $t_{max}$ .
- Crear un vector con 100 elementos entre 0 y t (usar el comando linspace).
- Calcular las coordenadas x, y, z del proyectil en cada instante.
- Usar el comando **plot3** para graficar.

### Soluciones dadas por los alumnos al ejemplo 3

#### Sentencias para MATLAB

```
>> v0= 250; g=9.81; theta=65;x0=3000;vx=-30;
>> v0z=v0*sin(theta*pi/180);
>> v0y=v0*cos(theta*pi/180);
>> t=2*v0z/g;
>> tplot=linspace(0,t,100);
>> z=v0z*tplot-0.5*g*tplot.^2;
>> y= v0y*tplot;
>> x= x0+vx*tplot;
>> plot3(x,y,z,'k')
>> grid on
>> axis([0 6000 0 6000 0 2500])
>> hold on
>> X0(1:length(y))=x0;
>> plot3(X0,y,z,'g')
>> hold off
>> xlabel('x(m)');ylabel('y(m)');zlabel('z(m)');
```

(\*) En la sentencia indicada la gráfica aparece en color negro, se le cambia el color y el grosor de la línea desde el gráfico con **Property Editor** de la solapa **View** en la ventana donde aparece la figura.

El gráfico que obtenemos es

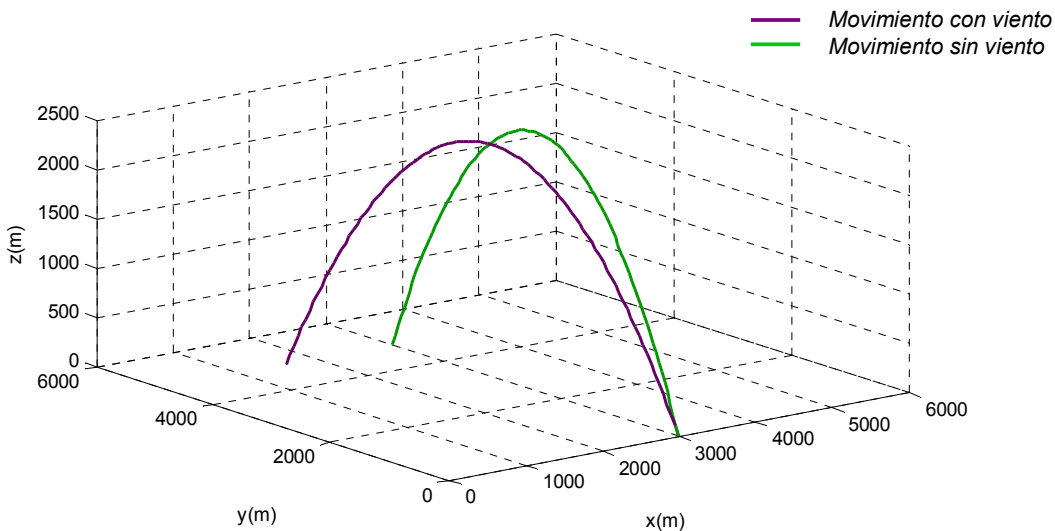


Figura 3 Trayectoria del proyectil

#### 4. Conclusiones preliminares

Los resultados preliminares de la prueba piloto durante el primer cuatrimestre del año 2010, con alumnos de la asignatura Matemática II a través de los ejercicios nos permitió trabajar desde el rol docente la presentación de las actividades y el desarrollo de estrategias tendientes a la motivación de los alumnos. Como se trata de cursos ubicados en los primeros años de la carrera, donde aún no cuentan con elementos teóricos específicos de la ingeniería, se tuvo que revelar el proceso de inducción que diera el marco para el desarrollo de la práctica a través de disparadores de indagación de la realidad.

En un primer momento, se encontró cierta resistencia a la estrategia que se implementaba, sin embargo, y a partir de los resultados que en esta etapa exploratoria hemos obtenido a través de la observación de grupos, se han hallado respuestas satisfactorias respecto de la propuesta didáctica.

Se ha observado que, una vez realizada la práctica, las preguntas y reflexiones grupales han alcanzado un mayor nivel de profundidad, que se advierte a partir de la complejidad de las cuestiones que plantearon durante la exposición de los docentes. Asimismo se advierte la significancia del conocimiento adquirido, en virtud de una menor fragmentación del mismo, al momento de realizar el cierre de los temas desarrollados. Sin embargo y por encontrarnos en una etapa exploratoria y siendo que los resultados corresponden a una experiencia piloto, no podemos considerar los mismos como definitivos.

En una próxima etapa, se aplicarán los desarrollos en forma sistemática y se evaluarán los aprendizajes a través de herramientas que consideren el aporte de la utilización del software al conocimiento.

#### 5. Referencias

- [1] GROSSMAN Stanley, *Álgebra Lineal con aplicaciones al Matlab*, Grupo Editorial Iberoamericana Octubre de 2007.
- [2] BÁEZ López David, *Matlab con aplicaciones a la Ingeniería, Física y Finanzas* Alfaomega Grupo Editor México septiembre 2006
- [3] AYRES Frank, *Teoría y problemas de fundamentos de matemáticas superiores* McGraw Hill
- [4] BOLTON W, *Ingeniería de control*. Alfaomega.
- [5] BOLTON W, *Mecatrónica: Sistemas de control electrónico en la ingeniería mecánica y eléctrica*. Alfaomega.
- [6] HUESO PAGOADA J. L. – MARTINEZ ROCA A – TORREGNOSA SANCHEZ J.R., *Matemática Aplicada. Práctica con ordenador*. Universidad Politécnica de Valencia.
- [7] MARIANI Amadeo, *Aplicaciones de MatLab a la ingeniería de control, sistemas continuos y CTT*. Ed CEIT.
- [8] MARIANI Amadeo, *Simulink. Aplicaciones a la ingeniería del control*. Ed CEIT.