



II CAIM 2010  
Segundo Congreso Argentino  
de Ingeniería Mecánica  
San Juan - Noviembre 2010

## Parametrización de Curvas y de Superficies: Una herramienta esencial para la enseñanza de Análisis Matemático II.

Susana Teresa Imperatore

*Facultad de Ingeniería.  
Universidad Nacional de Lomas de Zamora.  
Camino de Cintura km. 2. Llavallol. Buenos Aires. Argentina.  
e-mail: susanaimperatore@speedy.com.ar*

### RESUMEN

En  $\mathbb{R}^2$  los gráficos de curvas en coordenadas cartesianas y en coordenadas polares en la computadora, requieren en muchos casos, la parametrización de curvas. En las Funciones Vectoriales, las trayectorias son curvas dadas en forma paramétrica. En el cálculo de integrales dobles, se utilizan con frecuencia coordenadas polares, debiendo parametrizar las curvas que limitan el recinto de integración.

Análogamente, en  $\mathbb{R}^3$  los gráficos de superficies mediante el uso de un ordenador necesitan muchas veces la parametrización de superficies; como así también para graficar en coordenadas cilíndricas y en el cálculo de integrales triples.

Para calcular Integrales de Línea, es indispensable parametrizar las curvas correspondientes.

La parametrización de curvas y superficies constituye un recurso fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de Análisis Matemático II, con un fuerte impacto en las materias del Ciclo Superior de la Carrera de Ingeniería Mecánica.

Los objetivos específicos de la aplicación de la parametrización de curvas y superficies en el proceso de enseñanza-aprendizaje de Análisis Matemático II son lograr que el alumno utilizando el software especificado opere con funciones vectoriales, grafique curvas y superficies en 2D y en 3D, evalúe integrales de línea y calcule integrales múltiples en distintos sistemas de referencia.

Las clases son teórico-prácticas. Presentados los comandos necesarios, los alumnos resuelven ejercicios y problemas de aplicación en las computadoras en forma individual y/o grupal.

La evaluación consiste en la resolución de ejercicios y problemas de aplicación no estudiados con anterioridad usando el software adecuado, con la posibilidad de consultar material bibliográfico. El resultado de la misma condiciona la aprobación o no de Análisis Matemático II.

Los resultados esperados son que se superen las dificultades presentadas por los alumnos en la graficación de curvas y superficies y en el cálculo de integrales múltiples y/o integrales de línea, en las asignaturas de la carrera de Ingeniería Mecánica.

**Palabras Claves:** Parametrización de Curvas y de Superficies – Análisis Matemático II – Aplicaciones.

## 1. INTRODUCCIÓN

La importancia del estudio de la Parametrización de Curvas y Superficies en el proceso de enseñanza-aprendizaje de Análisis Matemático II consiste en preparar al alumno para que opere con funciones vectoriales, evalúe integrales múltiples en distintos sistemas de referencia, calcule integrales de línea y grafique curvas y superficies en 2D y en 3D.

Los objetivos específicos de la aplicación de la parametrización de curvas y superficies en el proceso de enseñanza-aprendizaje de Análisis Matemático II son lograr que el alumno utilizando el software especificado opere con funciones vectoriales, grafique curvas y superficies en 2D y en 3D, evalúe integrales de línea y calcule integrales múltiples en distintos sistemas de referencia.

Las clases son teórico-prácticas. Presentados los comandos necesarios, los alumnos resuelven ejercicios y problemas de aplicación en las computadoras en forma individual y/o grupal. Los resultados esperados son que se incremente la aplicación de estos conceptos fundamentales en las asignaturas de la carrera de Ingeniería Mecánica; por el rol fundamental que desempeña la modelización en esta rama de la Ingeniería, que estas herramientas computacionales propuestas permiten llevar a la práctica.

## 2. PARAMETRIZACIÓN DE CURVAS

La Parametrización de Curvas se utiliza en Análisis Matemático II, para graficar funciones vectoriales, dibujar curvas (en  $\mathbb{R}^2$  y en  $\mathbb{R}^3$ ), evaluar integrales dobles en distintos sistemas de referencia y para calcular integrales de línea. Para la fundamentación teórica ver [1,2].

### 2.1. Funciones Vectoriales

La Parametrización de Curvas permite graficar funciones vectoriales.

#### 2.1.1. Definiciones

- $f$  es una función vectorial  $\Leftrightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $f$  es un campo vectorial  $\Leftrightarrow f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $f$  es un campo escalar  $\Leftrightarrow f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

#### 2.1.2. Gráfico de funciones vectoriales

Si  $n=2$  la gráfica de una función vectorial es una curva en el plano.

Ejemplo: Graficar la función vectorial  $f(t) = (3t-2; 5\text{sen}(2t))$  para  $t \in [0; 10]$ .

```
ParametricPlot[{3t-2, 5*Sin[2t]}, {t, 0, 10}, AxesLabel->{"Eje x", "Eje y"}, PlotStyle->RGBColor[0, 0, 1]]
```

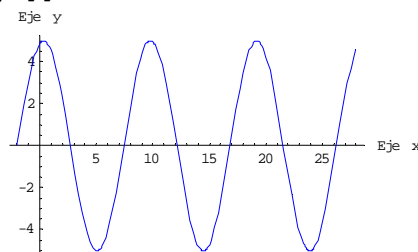


Figura 1 Curva en el plano.

Si  $n=3$  la gráfica de una función vectorial es una curva en el espacio.

Ejemplo: Graficar a función vectorial  $f(t) = (3t-2; 5\text{sen}(2t); -2t)$  para  $t \in [0; 10]$ .

```
ParametricPlot3D[{3t-2, 5*Sin[2t], -2t}, {t, 0, 10}, AxesLabel->{"Eje x", "Eje y", "Eje z"}, ViewPoint->{3.978, 1.798, 1.482}]
```

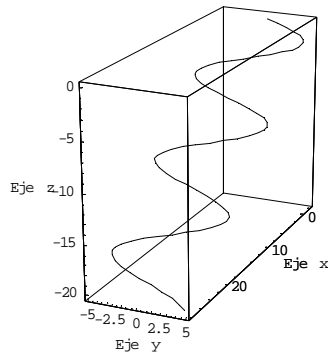


Figura 2 Curva en el espacio.

## 2.2. Curvas en $\mathbb{R}^2$

La Parametrización de Curvas permite graficar curvas en  $\mathbb{R}^2$  usando distintos sistemas de referencia.

### 2.2.1. Curvas en $\mathbb{R}^2$ utilizando coordenadas cartesianas

Para graficar una recta vertical en  $\mathbb{R}^2$  se debe parametrizar la ecuación que la define, usando un vector de dos componentes.

Ejemplo: Graficar la recta  $x = 5$  para  $y \in [-2; 5]$ .

```
ParametricPlot[{5, y}, {y, -2, 5}, AxesLabel -> {"Eje x", "Eje y"}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0.7]]
```

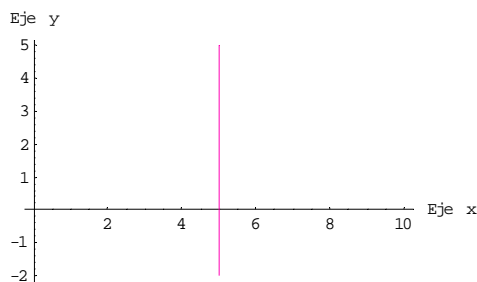


Figura 3 Recta en el plano, parametrizada en coordenadas cartesianas.

### 2.2.2. Curvas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ utilizando coordenadas polares y coordenadas hiperbólicas

Las curvas en el plano xy se parametrizan en coordenadas polares o en coordenadas hiperbólicas usando las siguientes fórmulas de cambio de coordenadas:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(t) \\ y = r \cdot \sin(t) \end{cases} \text{ o bien } \begin{cases} x = r \cdot \cosh(t) \\ y = r \cdot \sinh(t) \end{cases} \text{ o bien } \begin{cases} x = r \cdot \sinh(t) \\ y = r \cdot \cosh(t) \end{cases}$$

Ejemplos:

1) Graficar la elipse  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

Parametizamos:

Utilizando la identidad fundamental de la Trigonometría:  $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$  y comparando con la ecuación de la elipse, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} = \cos^2(t) &\Rightarrow x^2 = 4 \cos^2(t) \Rightarrow x = 2 \cos(t) \\ \frac{y^2}{9} = \sin^2(t) &\Rightarrow y^2 = 9 \sin^2(t) \Rightarrow y = 3 \sin(t) \end{aligned}$$

```
ParametricPlot[{2Cos[t], 3Sin[t]}, {t, 0, 2π}, AxesLabel -> {"Eje x", "Eje y"}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], AspectRatio -> Automatic]
```

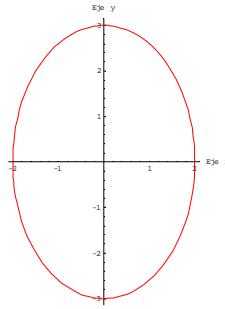


Figura 4 Elipse, parametrizada en coordenadas polares.

2) Graficar la hipérbola  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

Parametrizamos:

Utilizando la identidad fundamental de las funciones hiperbólicas:  $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$  y comparando con la ecuación de la hipérbola, resulta:

$$\frac{x^2}{4} = \cosh^2(t) \Rightarrow x^2 = 4 \cosh^2(t) \Rightarrow x = 2 \cosh(t)$$

$$\frac{y^2}{9} = \sinh^2(t) \Rightarrow y^2 = 9 \sinh^2(t) \Rightarrow y = 3 \sinh(t)$$

```
a=ParametricPlot[{2Cosh[t], 3Sinh[t]}, {t, -1, 1}, AxesLabel->{"Eje x", "Eje y"}, PlotStyle->RGBColor[1, 0.5, 0.8], AspectRatio->Automatic]
```

```
b=ParametricPlot[{-2Cosh[t], 3Sinh[t]}, {t, -1, 1}, AxesLabel->{"Eje x", "Eje y"}, PlotStyle->RGBColor[1, 0.5, 0.8], AspectRatio->Automatic]
```

Show[a, b]

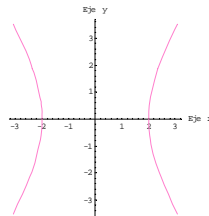


Figura 5 Hipérbola con eje real sobre el eje x, parametrizada en coordenadas polares.

3) Graficar la hipérbola  $-2(x+2)^2 + 4(y-1)^2 = 1$

$$-\frac{(x+2)^2}{\frac{1}{2}} + \frac{(y-1)^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

Parametrizamos:

Utilizando la identidad fundamental de las funciones hiperbólicas:  $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$  y comparando con la ecuación de la hipérbola, resulta:

$$\frac{(y-1)^2}{\frac{1}{4}} = \cosh^2(t) \Rightarrow (y-1)^2 = \frac{1}{4} \cosh^2(t) \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{2} \cosh(t)$$

$$\frac{(x+2)^2}{\frac{1}{2}} = \sinh^2(t) \Rightarrow (x+2)^2 = \frac{1}{2} \sinh^2(t) \Rightarrow x = -2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(t)$$

```
c = ParametricPlot[{-2 + \frac{1}{\sqrt{2}} Sinh[t], 1 + \frac{1}{2} Cosh[t]}, {t, -3, 3}, AxesLabel->{"Eje x", "Eje y"}, PlotStyle->RGBColor[0.4, 0.2, 0.8], AspectRatio->Automatic]
```

```
d = ParametricPlot[{-2 + 1/Sqrt[2] Sinh[t], 1 - 1/2 Cosh[t]}, {t, -3, 3}, AxesLabel -> {"Eje x", "Eje y"},
PlotStyle -> RGBColor[0.4, 0.2, 0.8], AspectRatio -> Automatic]
Show[c, d, Axes -> True, AxesOrigin -> {0, 0}]
```

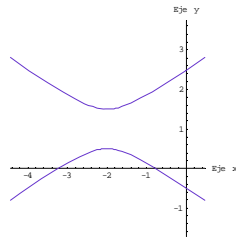


Figura 6 Hipérbola con eje real sobre el eje y, parametrizada en coordenadas polares.

4) Graficar la circunferencia  $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 1$  incluida en el plano de ecuación  $z=5$ .

Parametrizamos:

$$(x+3)^2 = \cos^2(t) \Rightarrow x+3 = \cos(t) \Rightarrow x = -3 + \cos(t)$$

$$(y-1)^2 = \sin^2(t) \Rightarrow y-1 = \sin(t) \Rightarrow y = 1 + \sin(t)$$

```
ParametricPlot3D[{-3+Cos[t], 1+Sin[t], 5}, {t, 0, 2π}, AxesLabel -> {"Eje x", "Eje y", "Eje z"},
ViewPoint -> {3.978, 1.798, 1.482}, BoxRatios -> {1, 1, 1}]
```

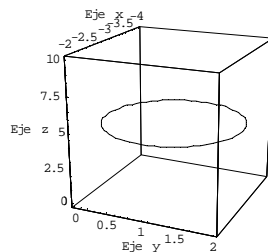


Figura 7 Curva en el espacio parametrizada en coordenadas polares.

### 2.3. Cálculo de Integrales Dobles

La Parametrización de Curvas permite evaluar integrales dobles en coordenadas polares, facilitando el cálculo de las mismas.

$$\int_a^b \int_c^d z \cdot r \, dr \, dt \quad \text{o bien} \quad \int_c^d \int_a^b z \cdot r \, dt \, dr$$

Las fórmulas de cambio de coordenadas son:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(t) \\ y = r \cdot \sin(t) \end{cases}$$

Ejemplo:

Calcular el área exterior a la curva  $x^2 + y^2 = 4$  e interior a la curva  $(x+4)^2 + y^2 = 16$ . Dibujar la región de integración.

Parametrizamos la circunferencia  $x^2 + y^2 = 4$ :

$$r^2 \cos^2(t) + r^2 \sin^2(t) = 4 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

Parametrizando la circunferencia  $(x+4)^2 + y^2 = 16$ , obtenemos:  $(r \cdot \cos(t) + 4)^2 + r^2 \sin^2(t) = 16 \Rightarrow r = -8 \cdot \cos(t)$

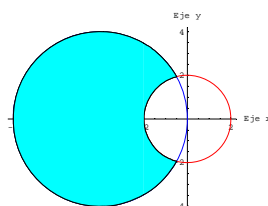


Figura 8 Dibujo de la región de integración.

Para hallar los ángulos, calculamos los puntos de intersección entre las dos curvas, resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x+4)^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

Los puntos de intersección son:  $P_1 = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$  y  $P_2 = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

y los ángulos son:  $t_1 = \pi - \arctg(\sqrt{15})$  y  $t_2 = \pi + \arctg(\sqrt{15})$

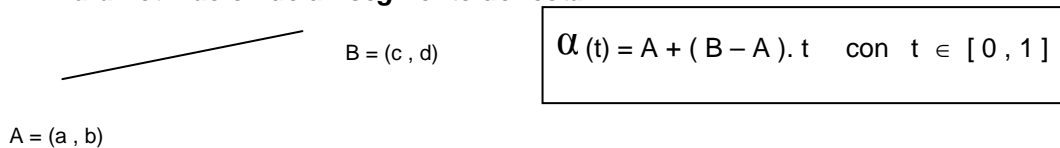
Por lo tanto resulta:

$$\text{Área} = \int_{\pi - \arctan[\sqrt{15}]}^{\pi + \arctan[\sqrt{15}]} \int_2^{8 \cdot \cos[t]} (1 \cdot r) dr dt = 2 (\sqrt{15} + 14 \arctan[\sqrt{15}]) \cong 44,6532$$

## 2.4. Cálculo de Integrales de Línea

La Parametrización de Curvas permite evaluar Integrales de Línea.

### 2.4.1. Parametrización de un segmento de recta



$A = (a, b)$        $B = (c, d)$

$$\alpha(t) = A + (B - A) \cdot t \quad \text{con } t \in [0, 1]$$

### 2.4.2. Parametrización de curvas

En toda la sección 2 analizamos la parametrización de curvas en distintos sistemas de referencia.

## 3. PARAMETRIZACIÓN DE SUPERFICIES

La Parametrización de Superficies se utiliza en Análisis Matemático II, para dibujar superficies en  $\mathbb{R}^3$  y para evaluar integrales triples en distintos sistemas de referencia. Para la fundamentación teórica ver [1,2].

### 3.1. Gráficos de funciones definidas por fórmulas en 3D

La Parametrización de Superficies permite graficar superficies en  $\mathbb{R}^3$  usando distintos sistemas de referencia.

#### 3.1.1. Superficies en $\mathbb{R}^3$ utilizando coordenadas cilíndricas y coordenadas hiperbólicas

Para graficar una superficie en  $\mathbb{R}^3$  se debe parametrizar la ecuación que la define, usando un vector de tres componentes. Las superficies en  $\mathbb{R}^3$  se parametrizan en coordenadas cilíndricas o en coordenadas hiperbólicas usando las siguientes fórmulas de cambio de coordenadas, si proyectamos sobre el plano xy:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(t) \\ y = r \cdot \sin(t) \\ z = z \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x = r \cdot \cosh(t) \\ y = r \cdot \sinh(t) \\ z = z \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x = r \cdot \sinh(t) \\ y = r \cdot \cosh(t) \\ z = z \end{cases}$$

En forma análoga se definen las fórmulas de cambio de coordenadas para proyectar sobre el plano xz.

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(t) \\ y = y \\ z = r \cdot \sin(t) \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x = r \cdot \cosh(t) \\ y = y \\ z = r \cdot \sinh(t) \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x = r \cdot \sinh(t) \\ y = y \\ z = r \cdot \cosh(t) \end{cases}$$

En forma análoga se definen las fórmulas de cambio de coordenadas para proyectar sobre el plano yz.

$$\begin{cases} x = x \\ y = r \cdot \cos(t) \\ z = r \cdot \sin(t) \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x = x \\ y = r \cdot \cosh(t) \\ z = r \cdot \sinh(t) \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x = x \\ y = r \cdot \sinh(t) \\ z = r \cdot \cosh(t) \end{cases}$$

Ejemplos:

1) Graficar la superficie  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$

Parametrizamos en el plano xy:

$$\begin{cases} x=2r.\cos(t) \\ y=3r.\sin(t) \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{z^2}{16} = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 - r^2 \Rightarrow z^2 = 16(1 - r^2) \Rightarrow |z| = 4\sqrt{1 - r^2} \Rightarrow z = 4\sqrt{1 - r^2} \vee z = -4\sqrt{1 - r^2}$$

```
k = ParametricPlot3D[{2 r * Cos[t], 3 r * Sin[t], 4 Sqrt[1 - r^2]},
  {r, 0, 1}, {t, 0, 2 Pi}, ViewPoint -> {3.978, 1.798, 1.482}]
```

```
l = ParametricPlot3D[{2 r * Cos[t], 3 r * Sin[t], -4 Sqrt[1 - r^2]},
  {r, 0, 1}, {t, 0, 2 Pi}, ViewPoint -> {3.978, 1.798, 1.482}]
```

Show[k, l]

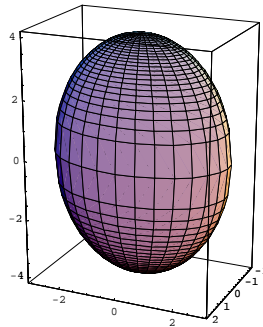


Figura 9 Gráfico de un elipsoide en coordenadas cilíndricas.

Observación: Esta superficie también puede parametrizarse en el plano xz o en el plano yz.

2) Graficar la superficie  $\frac{z^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Parametrizamos en el plano yz, considerando  $r = 1$

$$\begin{cases} x=x \\ y=4.\sinh(t) \\ z=3.\cosh(t) \end{cases}$$

```
m=ParametricPlot3D[{x, 4*Sinh[t], 3*Cosh[t]}, {t, -1, 1}, {x, -10, 10}, ViewPoint->{3.978, 1.798, 1.482}]
```

```
n=ParametricPlot3D[{x, 4*Sinh[t], -3*Cosh[t]}, {t, -1, 1}, {x, -10, 10}, ViewPoint->{3.978, 1.798, 1.482}]
```

Show[m, n]

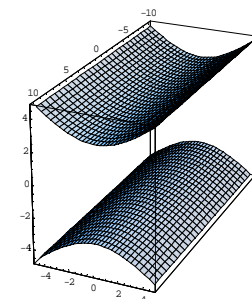


Figura 10. Gráfico de una cilindro hiperbólico

3) Graficar la superficie  $z = x^2 - y^2$

Parametrizamos en el plano xy.

```
ParametricPlot3D[{r * Cos[t], r * Sin[t], (r * Cos[t])^2 - (r * Sin[t])^2},
  {t, -2, 2}, {r, -1, 1}, ViewPoint -> {3.978, 1.798, 1.482}]
```

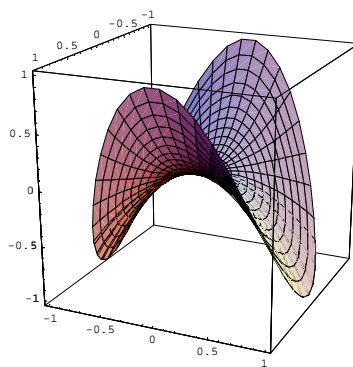


Figura 11. Gráfico de una paraboloides hiperbólico

### 3.1.2. Superficies en $\mathbb{R}^3$ utilizando coordenadas esféricas

Para graficar una superficie en  $\mathbb{R}^3$  se debe parametrizar la ecuación que la define, usando un vector de tres componentes. Las superficies en  $\mathbb{R}^3$  se parametrizan en coordenadas esféricas usando las siguientes fórmulas de cambio de coordenadas, si proyectamos sobre el plano xy:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(t) \cdot \sin(\gamma) \\ y = r \cdot \sin(t) \cdot \sin(\gamma) \\ z = r \cdot \cos(\gamma) \end{cases}$$

En forma análoga se definen las fórmulas de cambio de coordenadas para proyectar sobre el plano xz.

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(t) \\ y = r \cdot \cos(\gamma) \\ z = r \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(t) \end{cases}$$

En forma análoga se definen las fórmulas de cambio de coordenadas para proyectar sobre el plano yz.

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\gamma) \\ y = r \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(t) \\ z = r \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(t) \end{cases}$$

#### Ejemplo:

Graficar la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$  utilizando coordenadas esféricas.

$$r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$$

```
ParametricPlot3D[{6Sin[γ]*Cos[t], 6Sin[γ]*Sin[t], 6Cos[γ]}, {t, 0, 2π}, {γ, 0, π}, ViewPoint -> {3.978, 1.798, 1.482}]
```

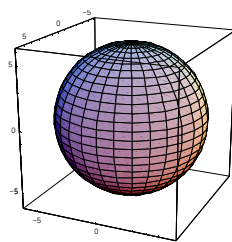


Figura 12. Gráfico de una esfera en coordenadas esféricas

## 3.2. Integrales Triples en Coordenadas Cilíndricas

### 3.2.1. Projectando sobre el plano (x,y)

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f w \cdot r \, dz \, dr \, dt \quad \text{o bien} \quad \int_c^d \int_a^b \int_e^f w \cdot r \, dz \, dt \, dr$$

Parametrizamos:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(t) \\ y = r \cdot \sin(t) \\ z = z \end{cases}$$

#### Ejemplo:

Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies  $z = 10 - x^2 - y^2$ ,  $z = x^2 + y^2 - 8$ .

Para hallar la región de integración igualamos:  $z = z \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$   
 $z = 10 - x^2 - y^2 \Rightarrow z = 10 - r^2 \wedge z = x^2 + y^2 - 8 \Rightarrow z = r^2 - 8$ . Además  $t \in [0; 2\pi]$ .

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{r^2-8}^{10-r^2} (1 * r) dz dr dt = 81 \pi$$

### 3.2.2. *Proyectando sobre el plano (x,z)*

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f w.r dy dr dt \quad \text{o bien} \quad \int_c^d \int_a^b \int_e^f w.r dy dt dr$$

Parametrizamos:

$$\begin{cases} x=r.\cos(t) \\ y=y \\ z=r.\sin(t) \end{cases}$$

Ejemplo:

Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide  $y = x^2 + z^2$  y por el plano  $y = 16$ .

Para hallar la región de integración igualamos:  $y = y \Rightarrow x^2 + z^2 = 16 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$   
 Además  $y \in [r^2; 16] \wedge t \in [0; 2\pi]$ .

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_{r^2}^{16} (1 * r) dy dr dt = 128 \pi$$

### 3.2.3. *Proyectando sobre el plano (y,z)*

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f w.r dx dr dt \quad \text{o bien} \quad \int_c^d \int_a^b \int_e^f w.r dx dt dr$$

Parametrizamos:

$$\begin{cases} x=x \\ y=r.\sin(t) \\ z=r.\cos(t) \end{cases}$$

Ejemplo:

Calcular la masa de un tanque cilíndrico limitado por  $y^2 + z^2 = 25$  y los planos de ecuación  $x = 0$ ,  $x = 10$  sabiendo que la densidad es  $f(x, z) = x$ .

Para hallar la región de integración consideramos:  $y^2 + z^2 = 25 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$ . Además  $x \in [0; 10]$  y  $t \in [0; 2\pi]$ .

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^5 \int_0^{10} (x * r) dx dr dt = 1250 \pi$$

### 3.3. *Integrales Triples en Coordenadas Esféricas*

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f w.r^2.\sin(\gamma) dr dt d\gamma \quad \text{o bien} \quad \int_c^d \int_a^b \int_e^f w.r^2.\sin(\gamma) dr d\gamma dt$$

Ejemplos:

1) Calcular el volumen de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$  utilizando integrales triples en coordenadas esféricas.

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^6 (r^2 * \sin[\gamma]) dr dt d\gamma = 288 \pi$$

2) Calcular el volumen de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  utilizando integrales triples en coordenadas esféricas.

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^a (r^2 * \sin[\gamma]) dr dt d\gamma = \frac{4 a^3 \pi}{3}$$

#### 4. UNA APLICACIÓN EN INGENIERÍA MECÁNICA.

Desarrollaremos un método analítico, la **Ecuación de Freudenstein** que permite resolver con facilidad, casos de síntesis de función mediante el mecanismo articulado de cuatro barras. En la figura 13, damos el carácter de vectores a los lados del mecanismo articulado. Escribimos la ecuación vectorial de cierre (denominada también ecuación de lazo cerrado):

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_4 = \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3$$

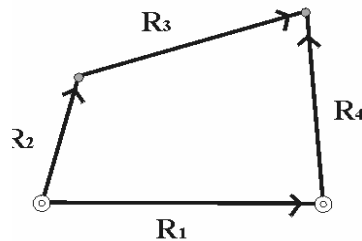


Figura 13. Gráfico del mecanismo articulado.

Proyectamos ahora sobre los ejes coordenados:

$$R_1 + R_4 \cos \theta_4 = R_2 \cos \theta_2 + R_3 \cos \theta_3$$

$$0 + R_4 \sin \theta_4 = R_2 \sin \theta_2 + R_3 \sin \theta_3$$

Despejamos los términos que tienen a  $\theta_3$ , y elevamos al cuadrado para eliminar este ángulo.

$$R_3^2 = R_1^2 + R_4^2 \cos^2 \theta_4 + R_2^2 \cos^2 \theta_2 + 2.R_1.R_4 \cos \theta_4 - 2.R_1.R_2 \cos \theta_2 - 2.R_4.R_2 \cos \theta_2 \cos \theta_4 + R_4^2 \sin^2 \theta_4 + R_2^2 \sin^2 \theta_2 - 2.R_4.R_2 \sin \theta_2 \sin \theta_4$$

Sacamos factor común, usamos Pitágoras y coseno de la diferencia:

$$R_3^2 = R_1^2 + R_4^2 + R_2^2 - 2.R_4.R_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + 2.R_1.R_4 \cos \theta_4 - 2.R_1.R_2 \cos \theta_2$$

Dividimos todos los términos por  $2.R_2.R_4$ :

$$\frac{R_1^2 + R_4^2 + R_2^2 - R_3^2}{2.R_2.R_4} + \frac{R_1}{R_2} \cos \theta_4 - \frac{R_1}{R_4} \cos \theta_2 = \cos(\theta_2 - \theta_4)$$

Finalmente, obtenemos la ecuación que sigue:

$$K_1 \cos \theta_4 - K_2 \cos \theta_2 + K_3 = \cos(\theta_2 - \theta_4) \quad [1] \quad \text{siendo:} \quad K_3 = \frac{R_1^2 + R_4^2 + R_2^2 - R_3^2}{2.R_2.R_4}, \quad K_1 = \frac{R_1}{R_2}, \quad K_2 = \frac{R_1}{R_4}$$

Como en la deducción hemos elevado al cuadrado, para cada valor de  $\theta_2$  tendremos dos valores de  $\theta_4$ .

Para la síntesis de función con tres puntos de precisión, el planteo del problema consiste en obtener las longitudes de los lados del articulado para determinados pares de valores de los ángulos  $\theta_2$  y  $\theta_4$ . Dado que en la ecuación [1] tenemos como incógnitas a  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$ , resultará que necesitaremos tres pares de valores de ángulos, para armar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Dado que para obtener las relaciones angulares, interesa la forma del articulado y no su tamaño, siempre podremos elegir la longitud de una barra (Consideramos  $R_1=1$ ), y las restantes surgirán cuando obtengamos los valores de  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$ .

Puesto que nos estamos planteando la obtención de una función, por ejemplo  $y = f(x)$ , de alguna forma deberemos relacionar a la variable independiente  $x$  con el ángulo que adoptemos como entrada del movimiento, que supondremos  $\theta_2$ , y otro tanto con la variable dependiente  $y$ , y el ángulo de salida  $\theta_4$ .

La función a obtener mecánicamente estará acotada entre dos extremos:  $x_0 \leq x \leq x_f$ ,  $y_0 \leq y \leq y_f$

Elegimos un intervalo mecánico para los ángulos de entrada y de salida:  $\theta_{20} \leq \theta_2 \leq \theta_{2f}$ ,  $\theta_{40} \leq \theta_4 \leq \theta_{4f}$

Planteamos una transformación lineal ("factor de escala"), para relacionar el intervalo de la variable matemática con el intervalo de la variable mecánica:  $\theta_2 = a.x + b$ ,  $\theta_4 = cy + d$

Si en la primer ecuación reemplazamos a  $x$  por los dos valores de los extremos y correspondientemente a  $\theta_2$ , tendremos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, las constantes  $a$  y  $b$ , cuyos valores podremos obtener. En forma análoga operamos para las constantes  $c$  y  $d$ .

Ejemplo: Función a sintetizar y extremos:  $y = 3 \cdot x^2$ ,  $0 \leq x \leq 3$

Los intervalos mecánicos serán:  $\theta_{20} = 30^\circ$   $\theta_{2f} = 120^\circ$ ,  $\theta_{40} = 40^\circ$   $\theta_{4f} = 160^\circ$

Los intervalos mecánicos, son valores que se adoptan para obtener el mejor resultado en la generación de la función.

Reemplazando obtenemos:  $30 = a \cdot 0 + b \therefore b = 30$  y además  $120 = a \cdot 3 + 30 \therefore a = 30 \Rightarrow \theta_2 = 30 \cdot x + 30$

Para  $\theta_4$ :  $40 = c \cdot 0 + d \therefore d = 40$  y también  $160 = c \cdot 27 + 40 \therefore c = 120/27 \Rightarrow \theta_4 = \frac{120}{27} \cdot y + 40$

Podemos ahora hacer la siguiente tabla de valores:

x	y	$\theta_2$	$\theta_4$
0	0	$30^\circ$	$40^\circ$
1.5	6.75	$75^\circ$	$70^\circ$
3.0	27	$120^\circ$	$160^\circ$

Tenemos entonces los tres pares de valores  $\theta_2$  y  $\theta_4$ , que nos permitirán plantear el sistemas de tres ecuaciones para encontrar las constantes  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  y luego las longitudes de las barras  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$ , en función de una longitud arbitraria de la barra 1.

## 5. RESULTADOS

La evaluación consiste en la resolución de ejercicios y problemas de aplicación no estudiados con anterioridad usando un software adecuado, con la posibilidad de consultar material bibliográfico. El resultado de la misma condiciona la aprobación o no de Análisis Matemático II.

Los resultados esperados son que se incremente el uso de esta herramienta esencial en las asignaturas de la carrera de Ingeniería Mecánica.

## 6. CONCLUSIONES

El presente documento es una breve síntesis del trabajo realizado en la Cátedra de Análisis Matemático II para estimular al alumno en el uso de la Parametrización de Curvas y Superficies, de fundamental importancia para su formación y posterior desarrollo profesional, en particular en el Área de Ingeniería Mecánica.

La medición que cuantifique la aplicación del tema propuesto se realizará en la materia integradora de Proyecto de Máquinas.

## 7. REFERENCIAS

- [1] L.Leithold, *El Cálculo*. Oxford University Press, 1998.
- [2] E. Swokowsky, *Cálculo con Geometría Analítica*. Iberoamérica, 1988.
- [3] G.Thomas, *Calculus and Analytic Geometry*. Addison Wesley, 1998.
- [4] James Stewart, *Cálculo*. Thomson Learning, 2005.
- [5] Samira Abdel Masih, *Análisis Matemático II aplicado a Matemática*. U.N.L.Z., 1998
- [6] A.M. Mariani, *Curso Introductorio sobre Matlab y Simulink*. U.N.L.Z., 2007