



II CAIM 2010  
Segundo Congreso Argentino  
de Ingeniería Mecánica  
San Juan - Noviembre 2010

## CÁLCULO DE COJINETES CORTOS UTILIZANDO EL CRITERIO DE OCKVIRK.

Antonio José Lukjaniec\*<sup>1</sup>, Nelso Piacentini<sup>2</sup> y Juan Carlos Lopez<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ingeniería, UNIVERSIDAD DE MORON  
Cabildo 134, (B1708JPD) Morón, Buenos Aires, República Argentina.  
e-mail: alukjaniec@unimoron.edu.ar

<sup>2</sup>Facultad de Ingeniería, UNIVERSIDAD DE MORON,  
e-mail: npiacentini@unimoron.edu.ar

<sup>3</sup>Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, UNIVERSIDAD DE MORON,  
e-mail: licjclopez@hotmail.com

### RESUMEN

Los desarrollos de cojinetes de deslizamiento se basan en las expresiones de Reynolds (año 1886) y la solución de Sommerfeld (año 1904) con la hipótesis de longitud infinita. Basándose en esta solución se definen los estudios de Raimondi y Boyd (año 1958) y los de Cameron y Wood (año 1976), los que a través de factores aplicados a las expresiones de Petroff, permiten el cálculo de las condiciones reales de funcionamiento (caudales de lubricante, potencia perdida por fricción, posición relativa entre gorrón y cojinete). A partir de estos estudios se puede determinar la temperatura con que el lubricante deja el cojinete, permitiendo elegir el lubricante más apto.

Ockvirk (año 1955) realizó un estudio sobre cojinetes cortos planteando que los cojinetes reales se comportan siguiendo un comportamiento acorde a esta situación.

El trabajo a presentar quiere mostrar un método planificado y sistemático, basándose en el análisis de Ockvirk para conseguir las condiciones de funcionamiento a partir de la teoría desarrollada completamente en cojinetes cortos.

Para ello se calcularán la potencia perdida por fricción y el caudal de lubricante, en función de la viscosidad (una de las variables que aparece en las expresiones de potencia perdida por fricción y caudal expulsado por los extremos del cojinete). Haciendo el balance térmico entre el calor generado por fricción y el calor retirado por la circulación del lubricante, se determina para cada viscosidad de funcionamiento propuesta, la temperatura a la que estaría trabajando el cojinete, graficándose la curva operativa del cojinete.

Observando el cruce de esta línea operativa con las curvas que representan la variación de viscosidad de los lubricantes, puede elegirse el lubricante adecuado o, si las condiciones lo exigieran, la variación dimensional que debería realizarse.

### Palabras Claves:

**Ecuación de Reynolds:** ecuación diferencial que rige la distribución de la presión y el espesor de película en los cojinetes.

**Ecuación de Petroff:** ecuación del par de torsión de fricción en cojinetes concéntricos dada por:

$$Fr = T_o = \eta \frac{\pi^2 d^3 l n'}{C_d}$$

**Excentricidad:** desplazamiento del centro del eje en relación con el centro del buje.

**Línea de centros:** línea que contiene los centros del buje y del eje.

**Lubricación hidrodinámica:** lubricación activada por el movimiento de las superficies del cojinete.

\*1 Ing. Mecánico – Profesor Titular; <sup>2</sup> Ing. Electromecánico– J.T.P.; <sup>3</sup> Lic. en Química – Profesor Adjunto

## 1. INTRODUCCIÓN

### 1.1. Nomenclatura y unidades

Símbolo	Variable	Unidades SI
Cd, Cr	holgura diametral y radial	m
D, d	diámetro	
f	fuerza de fricción	N
h	espesor de la película de lubricante	m
$K\varepsilon$	parámetro no dimensional	ninguna
l	longitud	m
$n'$	velocidad angular	rps
$O_N$	número de Ockvirk	ninguna
P	fuerza o carga	N
p	presión	N/m <sup>2</sup>
r	radio	m
S	número de Sommerfeld	ninguna
T	par de torsión	N-m
U	velocidad lineal	m/sec
$\varepsilon$	razón de excentricidad	ninguna
$\varepsilon_x$	razón de excentricidad empírica	ninguna
$\phi$	ángulo con la fuerza resultante	rad
$\Phi$	potencia	watts
$\eta$	viscosidad absoluta	Pa-s
$\theta_{max}$	ángulo a la presión máxima	rad
$\rho$	densidad (de masa)	kg/mm <sup>3</sup>
$\omega$	velocidad angular	rad/sec

### 1.2. Fundamentos teóricos

La investigación analítica realizada por Reynolds (1886), basándose en los experimentos de Tower (1883) y Petroff (1883), usando las ecuaciones de Navier-Stokes en una forma reducida se puede representar con la expresión:[1]

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right)}_{\text{Poiseuille}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\rho h(u_a + u_b)}{2} \right]}_{\text{Couette}} + \underbrace{\rho \left( w_a - w_b - u_a \frac{\partial h}{\partial x} \right)}_{\text{Empuje}} + \underbrace{h \frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{Dilatación local}} \quad (1)$$

Desarrollando el término de Couette se obtiene:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\rho h(u_a + u_b)}{2} \right]}_{\text{Couette}} = \underbrace{\frac{h(u_a + u_b)}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x}}_{\text{Cuña de densidad}} + \underbrace{\frac{\rho h}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_a + u_b)}_{\text{Alargamiento}} + \underbrace{\frac{\rho(u_a + u_b)}{2} \frac{\partial h}{\partial x}}_{\text{Cuña física}} \quad (2)$$

En un cojinete con hipótesis de funcionamiento hidrodinámico, las propiedades del fluido no tienen una variación significativa en todo el cojinete y como consecuencia de esto la densidad  $\rho$  y la viscosidad  $\eta$  pueden considerarse constantes. Basándose en esto, la ecuación de Reynolds resultará:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12\tilde{\alpha}\eta_0 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3)$$

Partiendo de esta expresión se desarrollan dos líneas de cálculo, una fue la de considerar el cojinete largo (Longitud infinita) cuyo autor fue Sommerfeld y la otra "SOLUCIÓN PARA COJINETES CORTOS" [2] fue desarrollada por Ockvirk y DuBois. Por diversas razones, en las máquinas modernas no suelen montarse cojinetes largos. En un cojinete largo, pequeñas deflexiones o falta de alineación en las flechas pueden reducir a cero las tolerancias radiales; además, consideraciones de empaquetamiento a menudo exigen cojinetes cortos. Las razones típicas  $l/d$  en los cojinetes modernos ocurren en un rango de 1/4 a 1. La solución de cojinetes largos de Sommerfeld supone que no habrá fugas de aceite en los extremos del cojinete, pero en estas razones  $l/d$  pequeñas, las fugas por los extremos pueden ser un factor importante. Ockvirk y DuBois resolvieron una forma de la ecuación de Reynolds que incluye el término por fuga en los extremos.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\eta U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4)$$

En esta expresión se aprecia que no se considera el término que considera el flujo circunferencial alrededor del cojinete. Integrando esta ecuación se obtiene la expresión de la presión en la película de aceite en función de  $\theta$  y de  $z$  y considerando que:

$$C_r = C_d / 2 \text{ y } \varepsilon = .e / C_r \quad (5)$$

$$p = \frac{\eta U}{rc_r^2} \left( \frac{l^2}{4} - z^2 \right) \frac{3\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \quad (6)$$

Esta ecuación es conocida como la *solución de Ockvirk* o la *solución para cojinetes cortos*. Se da validez a esta expresión para valores de  $\theta = 0$  hasta  $\theta = \pi$  y con la suposición de que la presión  $p = 0$  en la otra mitad de la circunferencia.

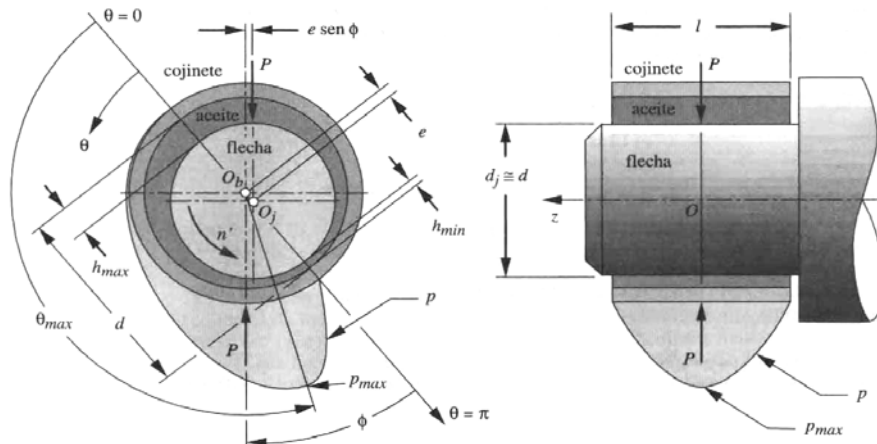


Figura 1: Distribución de presiones en un cojinete corto (Espesor de la película muy exagerado)

En la figura se muestra la distribución de presiones alrededor y a lo largo del cojinete (dirección z). A lo largo de z la distribución es parabólica y toma su valor máximo en el centro de la longitud l del cojinete, tomando valor p = 0 en los extremos del mismo.

Se obtiene el valor de  $\theta_{\max}$  en  $p_{\max}$  con:

$$\theta_{\max} = \cos^{-1} \left( \frac{1 - \sqrt{1 + 24\epsilon^2}}{4\epsilon} \right) \quad (7)$$

Este ángulo se mide a partir del eje que une la línea de los centros del cojinete y el gorrón  $O_b$  y  $O_j$ , correspondiendo esta línea al ángulo  $\theta = 0$ . La posición de esta línea se define a partir de la recta de acción de la carga aplicada en el gorrón, tomando el ángulo entre estas dos rectas el valor  $\phi$  y se calcula a partir de:

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\pi \sqrt{1 - \epsilon^2}}{4\epsilon} \right) \quad (8)$$

La carga aplicada en el gorrón se vincula con la excentricidad, la viscosidad y la velocidad de funcionamiento a través de las expresiones:

$$P = K\epsilon \frac{4\pi\eta d n' l^3}{C_d^2} \quad (9)$$

Siendo

$$K\epsilon = \frac{\epsilon [\pi^2(1 - \epsilon^2) + 16\epsilon^2]^{1/2}}{4(1 - \epsilon^2)^2} \quad (10)$$

#### Número de Ockvirk

Trabajando sobre las expresiones (9) y (10) se obtiene un factor adimensional, **número de Ockvirk**, de estructura similar a la **variable adimensional de Sommerfeld** y que también es dependiente de la excentricidad.

$$O_N = \left( \frac{P_{prom}}{\eta n'} \right) \left( \frac{d}{l} \right)^2 \left( \frac{c_d}{d} \right)^2 = 4\pi K\epsilon = \frac{\pi\epsilon [\pi^2(1 - \epsilon^2) + 16\epsilon^2]^{1/2}}{(1 - \epsilon^2)^2} \quad (11)$$

#### Razón de excentricidad (Empírica)

Una curva empírica que relaciona  $\epsilon$  con  $O_N$  ha sido ajustada por los datos, y muestra que los valores teóricos quedan por debajo de la magnitud de la razón de excentricidad. La curva empírica se puede aproximar mediante

$$\epsilon_x \cong 0.21394 + 0.38517 \log O_N - 0.0008(O_N - 60) \quad (12)$$

#### Par de torsión y pérdidas de potencia en cojinetes

En la figura 1 se muestra la película de fluido cortada entre gorrón y cojinete. La fuerza de corte que actúa en cada miembro crea pares de torsión en direcciones opuestas,  $T_r$  en el miembro en rotación y  $T_s$  en el miembro estacionario. Sin embargo, debido a la excentricidad, estos pares de torsión  $T_r$  y  $T_s$  no son iguales.

El par de fuerzas P, de la Figura 10-8 uno de cuyos miembros actúa en el centro de la flecha O<sub>j</sub> y el otro en el centro del cojinete O<sub>b</sub> forman un par de magnitud P e sen φ, que se agrega al par de torsión estacionario, para formar el par de torsión de rotación.

$$T_r = T_s + P e \text{ sen } \phi \quad (13)$$

Se puede determinar el par de torsión estacionario T<sub>s</sub> a partir de

$$\frac{T_s}{T_0} = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} \quad (14)$$

Siendo T<sub>0</sub> el par de torsión obtenido por Petroff y que se dará en cojinetes descargados y por lo tanto con un funcionamiento concéntrico y su valor se obtiene con:

$$T_0 = \eta \frac{\pi^2 d^3 l n'}{c_d} \quad (15)$$

La potencia  $\Phi$  perdida en el cojinete se puede determinar a partir del par de torsión de rotación Tr y la velocidad de rotación n'

$$\Phi = T_r \omega = 2 \pi T_r n' \quad (16)$$

Por otra parte, el caudal de fluido Q<sub>s</sub> que debe suministrarse al cojinete a través de un orificio central o ranura debe ser igual al flujo axial de fluido que sale del mismo por sus laterales [3]. El caudal adimensional (q<sub>s</sub>) será:

$$q_s = Q_s / (R n' C_r l) \quad \text{con } R=D/2 \quad (17)$$

Cabe mencionar que el cálculo de caudal realizado utilizando la solución de Ockvirk presenta una sencillez excepcional que resulta muy ventajosa, ya que el caudal adimensional calculado por este método se expresa como:

$$q_{sOckvirk} = 2 \pi \varepsilon \quad (18)$$

A partir de estas expresiones se obtiene el caudal a suministrar Q<sub>s</sub>

$$Q_s = 2 \pi \varepsilon R n' C_r l \quad (19)$$

La potencia generada por fricción se puede calcular con el conocimiento de la potencia perdida  $\Phi$  afectándola por el equivalente mecánico del calor:

$$H_{gen} = \Phi / J \quad (20)$$

La circulación del lubricante retirará el calor generado disipándolo al mezclarse con el aceite frío que está en el depósito de alimentación. Siendo ρ la densidad del aceite lubricante, C<sub>p</sub> la capacidad de calor específico del mismo y ΔT el incremento de temperatura del aceite, el calor disipado será: [4]

$$H_{dis} = \rho C_p Q_s \Delta T \quad (21)$$

Cuando se equilibran ambos valores podemos determinar el incremento de temperatura del aceite y con el conocimiento de la temperatura de ingreso del lubricante, obtendremos la temperatura de salida del mismo:

$$H_{gen} = H_{dis} \quad (22)$$

$$\Phi / J = \rho C_p Q_s \Delta T \quad (23)$$

$$\Delta T = (\Phi / J) / \rho C_p Q_s \quad (24)$$

$$\Delta T = t_s - t_1 \quad (25)$$

$$t_s = t_1 + (\Phi / J) / \rho C_p Q_s \quad (26)$$

### 1.3. Desarrollo del método

Partiremos con el conocimiento de los datos que corresponden al apoyo del árbol que se desea verificar:

d: diámetro del cojinete

$c_d$ : huelgo diametral entre cojinete y gorrón

l: longitud del cojinete

P: carga que descarga el árbol en el apoyo

n: velocidad de rotación del árbol

$t_1$ : temperatura del lubricante en el depósito

$\rho$ : densidad del aceite

$C_p$ : calor específico del aceite

J: equivalente mecánico del calor

A partir del valor de la carga P, las dimensiones del cojinete, la velocidad de giro del árbol y suponiendo valores de la viscosidad de funcionamiento  $\eta$ , se obtienen los valores del **Número de Ockvirk** en función de la viscosidad y a partir de estos obtenemos la variación de la excentricidad relativa  $\varepsilon$ .

A continuación se obtendrá el valor del ángulo  $\phi$ , que nos da la posición de la línea de los centros con respecto a la recta de acción de la carga aplicada.

Calculando el valor de la cupla por fricción hidrodinámica, calculamos la pérdida de potencia  $\Phi$ .

Por otro lado se calcula para cada valor de  $\eta$  cual es el caudal de lubricante  $E_s$  que circulará por el cojinete.

Finalmente y con el equilibrio entre el calor generado por fricción y el calor disipado por la circulación del lubricante, se obtiene el incremento de temperatura del aceite y finalmente la temperatura a la que el aceite sale del cojinete.

Se grafican los valores de temperatura de funcionamiento para cada valor de viscosidad supuestos, obteniéndose la curva de operación del cojinete.

Teniendo las curvas de variación de viscosidad de diferentes tipos de aceite, la intersección de la línea operativa con estas curvas, nos permiten obtener los valores de viscosidad y temperatura de funcionamiento del cojinete para cada calidad de aceite.

La aplicación del método propuesto fue llevada a cabo utilizando **TKSolver**, programa propuesto y con problemas desarrollados en el Libro DISEÑO DE MÁQUINAS de Robert L. NORTON.

### Esquema del desarrollo del método.

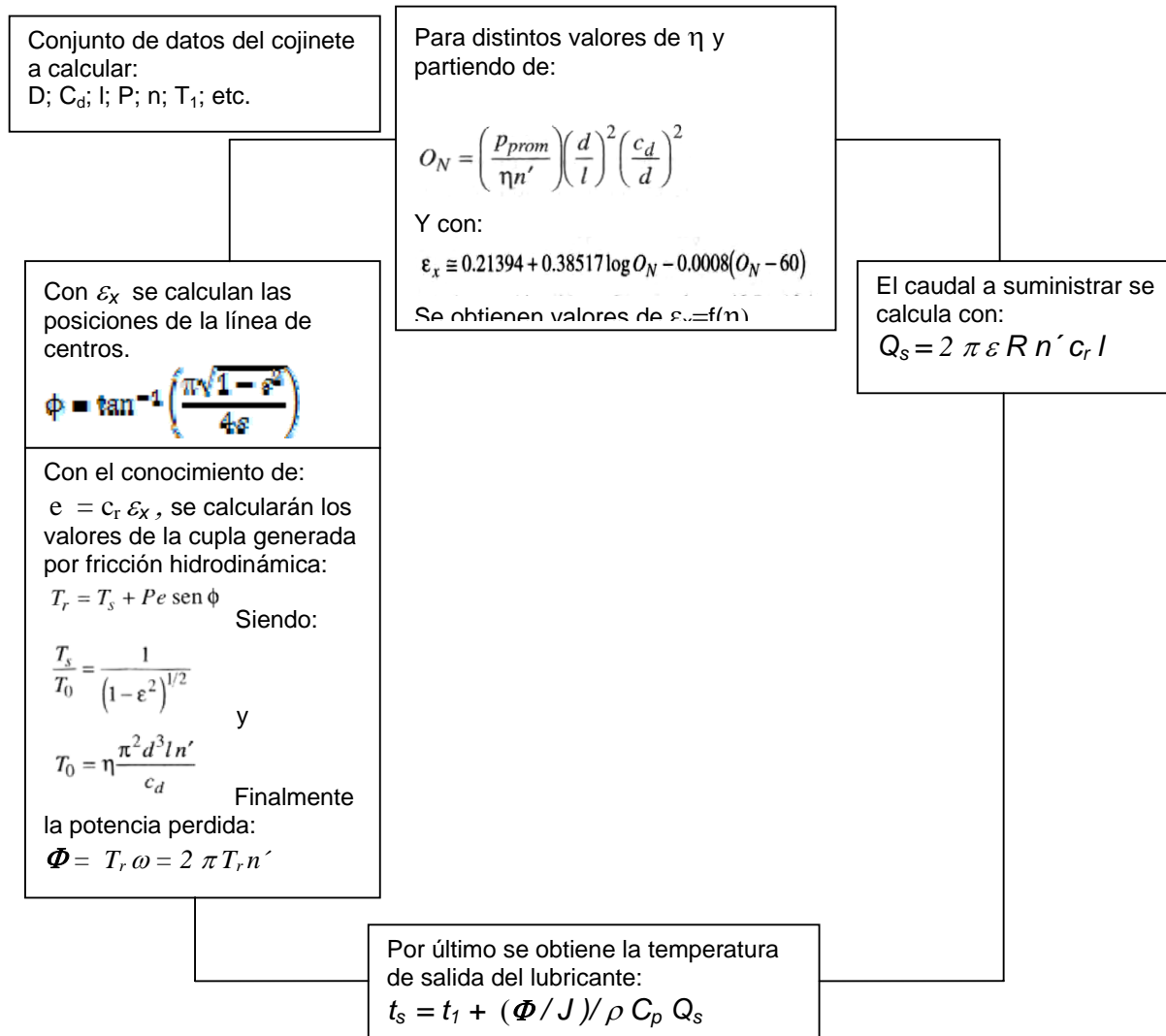


Figura 2: Diagrama de desarrollo del cálculo

### Aplicación Práctica y Resultados.

Se adjuntan los datos y gráficos obtenidos en una aplicación de ejemplo.

Status	Input	Name	Output	Unit	Comment
	3000	P		N	Carga sobre el cojinete
	,04	l		m	Longitud del cojinete
	,06	d		m	Diámetro del cojinete
L	1	η		Pa-s	Viscosidades de calculo
	25	n		rps	Velocidad de giro del gorrón del árbol
	,00004	cd		m	Huelgo diametral
	50	t1		oC	Temperatura de alimentación del lubricante
	1	J			Equivalente mecánico de calor (N-m/N-m)
	9000	ρ		N/m <sup>3</sup>	Densidad del Aceite. Varía de 8450 N/m <sup>3</sup> a 9200 N/m <sup>3</sup>
	147,33	Cp			Calor específico del lubricante

Figura 3: Tabla de variables de entrada (datos utilizados en el ejemplo)

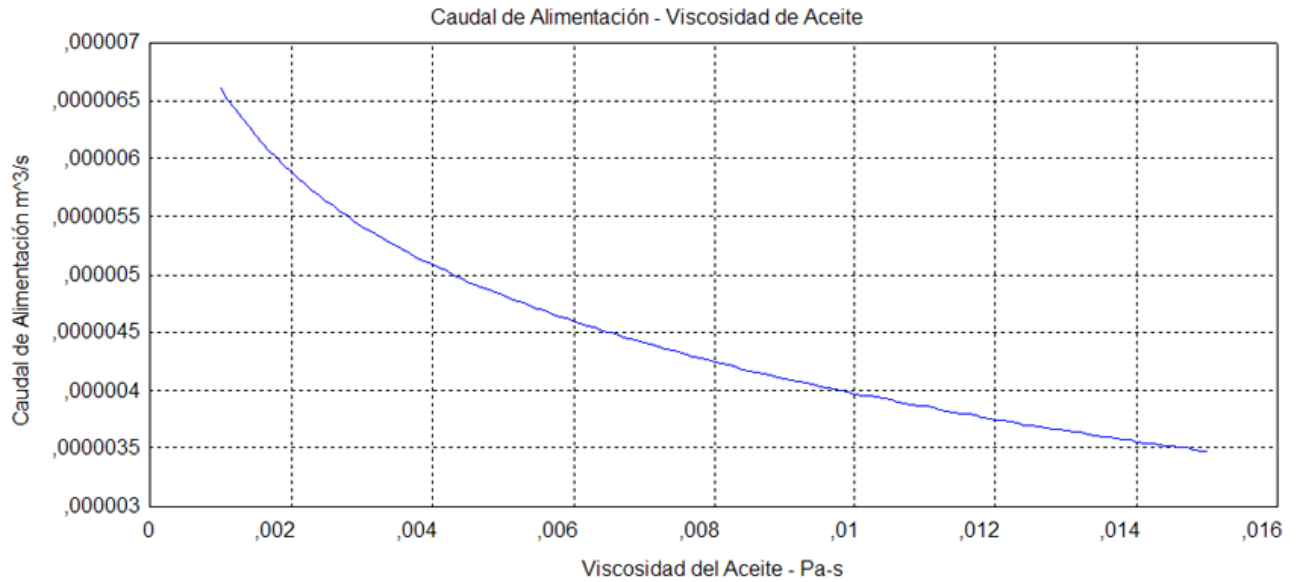


Figura 4: Gráfico del Caudal de Lubricante en función de la Viscosidad de Aceite

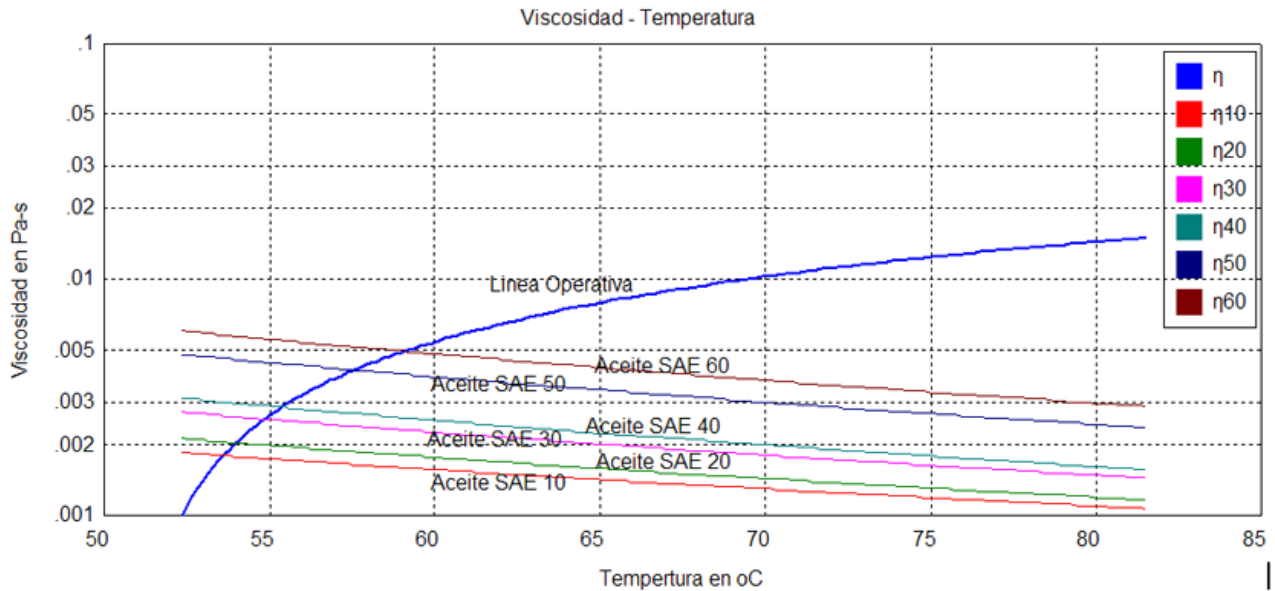


Figura 5: Gráfico de Viscosidad de Aceite y de Operación del Cojinete en función de la Temperatura

## CONCLUSIONES

Al ser este un método que utiliza las expresiones obtenidas en base a una teoría que se desarrolló para **cojinetes cortos**, en las expresiones se utiliza la relación entre el diámetro y la longitud del cojinete, sin necesidad de utilizar gráficos que introducen factores en función de la relación  $l/d$  que corrigen el caudal y la potencia perdida, necesarios para modificar expresiones surgidas por aplicación de hipótesis de **longitud infinita**.

Los valores de viscosidad y temperatura de operación obtenidos presentan variaciones lógicas en función de la calidad del lubricante utilizado. Lo mismo ocurre con la variación del caudal de lubricante necesario para mantener la película que separe las superficies del cojinete en movimiento relativo.

## REFERENCIAS

- [1] B.J. Hamrock, S.R Schmid y Bo Jacobson. *Elementos de Máquinas*, McGraw Hill 2000 pag. 474, 479.
- [2] R.L. Norton. *Diseño de Máquinas*. Pearson, 1999 pag. 653,658-661.
- [3] GUSTAVO G. VIGNOLO, DANIEL O. BARILÁ, LIDIA M. QUINZANI, *Análisis del Comportamiento del Cojinete de Longitud Finita Usando el Método de Perturbación Regular*, 2007
- [4] BUDYNAS Y NISBETT, *Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley*, McGraw Hill 2008