



FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI



II CAIM 2010
Segundo Congreso Argentino
de Ingeniería Mecánica
San Juan - Noviembre 2010

Comparación de métodos aproximados para el cálculo de las frecuencias de vibración libre de torres de sección variable

De Rosa M.A., Lippiello M.¹, Martin H.², Maurizi M.J.³

Faculty of Engineering, Department of Structural Engineering, (DiSGG),
Viale dell'Ateneo Lucano, 10, 85100, Potenza, Italy
e-mail: dm868ing@unibas.it

⁽¹⁾ *Dipartimento di Costruzioni e Metodi matematici in Architettura (CoMMA),
via Forno Vecchio 36, 80134, Napoli, Italia*

⁽²⁾ *Facultad Regional Reconquista, Universidad Tecnológica Nacional,
Parque Industrial Reconquista, 3560, Reconquista, Santa Fe, Argentina
e-mail: hectordmartin@gmail.com – hdmartin@criba.edu.ar*

⁽³⁾ *Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Departamento de Ingeniería,
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina
e-mail: ima@criba.edu.ar*

RESUMEN

En este trabajo se propone comparar dos métodos de cálculo aproximado para el análisis dinámico de una torre, con vínculos elásticos en la base y con una masa concentrada excéntrica con su inercia rotacional en el extremo libre.

La primer solución aproximada se obtiene mediante el Método de Discretización por Celdas (CDM), el cual suministra límites inferiores a las frecuencias exactas de vibración. Ha sido ampliamente descrito y aplicado en estabilidad y comportamiento dinámico de otros sistemas estructurales.

La segunda solución ha sido determinada aplicando el Método de la Cuadratura Diferencial (DQM), también empleado en investigaciones previas y que rinde límites superiores a los valores exactos de las frecuencias naturales.

Una interesante comparación entre la convergencia de ambas metodologías, para la precisión deseada, puede ser deducida de los resultados expresados en dos tablas, en las cuales el caso de las primeras dos frecuencias naturales es presentado. Además, los valores numéricos reportados corroboran la ventaja de aplicar ambos procedimientos cuando se trata de evaluar las frecuencias naturales en función de diversas leyes de variación de la sección de la torre y de los otros parámetros gobernantes del problema.

Palabras Claves: métodos aproximados, torre de sección variable, masa excéntrica, vínculos elásticos, vibraciones libres.

1. INTRODUCCIÓN

En el análisis dinámico de las torres para generadores eólicos con vínculos elásticos en la base, nos encontramos a menudo con sección transversal variable, tanto por razones de optimización estructural, como por motivos económicos. A fin de evaluar las frecuencias naturales de vibración de una torre eólica, con un modelo suficientemente próximo a la realidad, se ha pensado en un esquema en ménsula a sección transversal circular, con reducción gradual hacia el extremo superior.

Diversos autores [1-6] han estudiado este tipo de estructura, afrontando en forma analítica la solución de la ecuación diferencial de movimiento mediante la introducción de las funciones de Bessel.

En este trabajo se propone comparar dos métodos de cálculo aproximado para el análisis dinámico de una torre con vínculos elásticos en la base y una masa excéntrica con inercia rotacional concentrada en el extremo superior.

Los métodos que se emplean son: El Método de Discretización por Celdas, también llamado CDM, y ya utilizado en otros estudios [7] y el Método de la Cuadratura Diferencial DQM, también utilizado en otros trabajos [8, 9].

Ambos métodos permiten evaluar las frecuencias naturales en función de parámetros de control.

2. LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Consideremos la torre de la Figura 1 de sección transversal variable con la altura, con radio medio R de la corona circular, δ espesor de la corona circular, área $A(z)$, inercia $I(z)$, módulo de Young E , longitud L y densidad de masa ρ . Se asume un sistema de referencia y - z en la base de la torre, con sentido horario positivo.

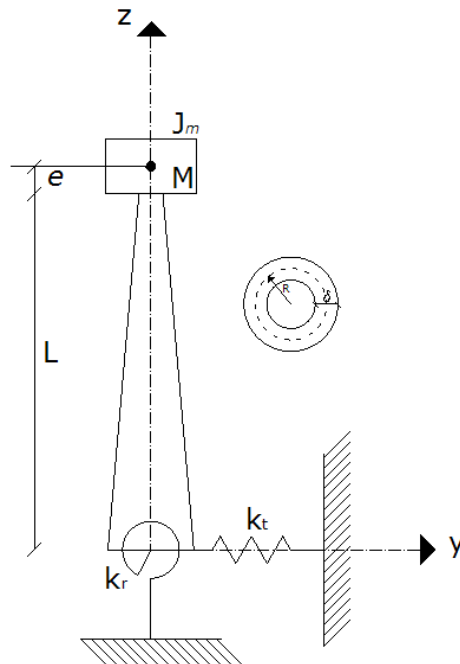


Figura 1: Torre a sección variable

En $z = 0$ existe un vínculo elástico a rotación y traslación, con rigidez rotacional k_r y rigidez traslacional k_t . En el otro extremo hay una masa concentrada M con excentricidad e y con inercia rotacional J_m . Sea $v(z, t)$ el desplazamiento normal al eje de la viga, en función de la variable espacial z y del tiempo t .

La ecuación del movimiento está dada por:

$$(EI(z) v''(z,t))'' + \rho A(z) \ddot{v}(z,t) = 0 \quad (1)$$

y las condiciones de contorno son:

$$EI'(0) v''(0,t) + EI(0) v'''(0,t) + k_t v(0,t) = 0 \quad (2)$$

$$EI(0) v''(0,t) - k_r v'(0,t) = 0 \quad (3)$$

$$EI'(L) v''(L,t) + EI(L) v'''(L,t) - M \dot{v}(L,t) - Me \ddot{v}(L,t) = 0 \quad (4)$$

$$-EI(L) v''(L,t) - J_m \ddot{v}'(L,t) - M e^2 \ddot{v}'(L,t) - Me \ddot{v}(L,t) = 0 \quad (5)$$

Dado que la ecuación de movimiento (1) es una ecuación diferencial con derivadas parciales a variables separables, se lleva a cabo la separación de la siguiente manera:

$$v(z,t) = v(z) e^{i\omega t} \quad (6)$$

La ecuación (1) se convierte en:

$$(EI(z) v''(z))'' - \rho A(z) \omega^2 v(z) = 0 \quad 0 < z < L \quad (7)$$

Para el cálculo de las frecuencias naturales de vibración se adoptan los dos métodos de discretización mencionados. El primero, de la Cuadratura Diferencial (DQM), que discretiza la ecuación diferencial, y el segundo, de Discretización por Celdas (CDM), que discretiza la estructura en celdas elásticas y masas concentradas.

2.1. Desarrollo de las ecuaciones diferenciales para el cálculo de las frecuencias libres por el método DQM

Adoptamos las siguientes leyes de variación de la inercia y el área

$$I(z) = I \left(1 + r \frac{z}{L}\right)^{3q} \quad A(z) = A \left(1 + r \frac{z}{L}\right)^q \quad (8)$$

siendo r el coeficiente de forma cónica, q el exponente de la ley de variación del radio, A e I , el área de la sección y la inercia en $z = 0$, respectivamente. Introduciendo:

$$g(z) = \left(1 + r \frac{z}{L}\right) \quad (9)$$

para la cual el área, la inercia y su primera derivada quedan:

$$I(z) = I g(z)^{3q} \quad A(z) = A g(z)^q$$

$$I'(z) = I 3q \frac{r}{L} \left(1 + r \frac{z}{L}\right)^{3q-1} = I 3q \frac{r}{L} g(z)^{3q-1} \quad (10)$$

Sustituyendo en la ecuación (7) los valores de inercia y área dados en (10):

$$(EI g(z)^{3q} v''(z))'' - \rho A g(z)^q \omega^2 v = 0 \quad (11)$$

Haciendo $K = IE$, $m = \rho A$ y derivando convenientemente, la ecuación (11) se convierte en:

$$K 3q (3q-1) \frac{r^2}{L^2} g(z)^{3q-2} v'' + K 6q \frac{r}{L} g(z)^{3q-1} v''' + K g(z)^{3q} v'''' - m g(z)^q \omega^2 v = 0 \quad (12)$$

Las condiciones de contorno (2-5) a su vez se transforman de la siguiente manera:

$$EI 3q \frac{r}{L} v''(0) + EI v'''(0) + k_t v(0) = 0 \quad (13)$$

$$EI v''(0) - k_r v'(0) = 0 \quad (14)$$

$$EI 3q \frac{r}{L} (1+r)^{3q-1} v''(L) + EI (1+r)^{3q} v'''(L) + \omega^2 M v(L) + \omega^2 M e v'(L) = 0 \quad (15)$$

$$EI (1+r)^{3q} v''(L) - \omega^2 J_m v'(L) - \omega^2 M e^2 v'(L) - M e \omega^2 v(L) = 0 \quad (16)$$

Pasando ahora del dominio físico $[0, L]$ al dominio natural gaussiano $[-1, 1]$, mediante la transformación:

$$\zeta(z) = 2 \frac{z}{L} - 1 \quad (17)$$

$$z = \frac{L}{2} (\zeta + 1) \quad (18)$$

para las cuales la ley de variación $g(z)$ se convierte en:

$$f(\zeta) = \left(1 + \frac{r}{2} (\zeta + 1) \right) \quad (19)$$

Sustituyendo (17-19) en la ecuación (12):

$$K \frac{16}{L^4} f(\zeta)^{3q} v''''(\zeta) + K \frac{8}{L^3} 6q \frac{r}{L} f(\zeta)^{3q-1} v'''(\zeta) + K \frac{4}{L^2} 3q(3q-1) \frac{r^2}{L^2} f(\zeta)^{3q-2} v''(\zeta) - m f(\zeta)^q \omega^2 v(\zeta) = 0 \quad (20)$$

Dividiendo la primera ecuación por $K \frac{16}{L^4} f(\zeta)^q$, y designando:

$$\Omega^2 = \frac{m L^4}{16K} \quad (21)$$

por lo cual la ecuación diferencial (20) se convierte en:

$$f(\zeta)^{2q} v''''(\zeta) + 3q r f(\zeta)^{2q-1} v'''(\zeta) + 3/4 q(3q-1) r^2 f(\zeta)^{2q-2} v''(\zeta) - \Omega^2 \omega^2 v(\zeta) = 0 \quad (22)$$

Efectuando la transformación de coordenadas también para las condiciones de contorno:

$$EI 3q \frac{r}{L} \frac{4}{L^2} v''(-1) + EI \frac{8}{L^3} v'''(-1) + k_t v(-1) = 0 \quad (23)$$

$$EI \frac{4}{L^2} v''(-1) - k_r \frac{2}{L} v'(-1) = 0 \quad (24)$$

$$EI 3q \frac{r}{L} (1+r)^{3q-1} \frac{4}{L^2} v''(1) + EI (1+r)^{3q} \frac{8}{L^3} v'''(1) + M \omega^2 v(1) + M e \omega^2 \frac{2}{L} v'(1) = 0 \quad (25)$$

$$EI (1+r)^{3q} \frac{4}{L^2} v''(1) - J_m \omega^2 \frac{2}{L} v'(1) - M e^2 \omega^2 \frac{2}{L} v'(1) - M e \omega^2 v(1) = 0 \quad (26)$$

Trabajando las fórmulas (23 - 26) y haciendo:

$$J_T = \frac{J_m L}{2EI}; \quad M_1 = \frac{M L}{2EI}; \quad M_2 = \frac{M L^2}{4EI}; \quad M_3 = \frac{M L^3}{8EI}; \quad (27)$$

$$C_R = \frac{2EI}{k_T L}; \quad C_T = \frac{8EI}{k_T L}; \quad (28)$$

las condiciones de contorno (23 - 26) se convierten en:

$$3/2 \text{ qr } C_T v''(-1) + C_T v'''(-1) + v(-1) = 0 \quad (29)$$

$$-C_R v''(-1) + v'(-1) = 0 \quad (30)$$

$$(1+r)^{3q} v''(1) - (J_T + M_1 e^2) \omega^2 v'(1) - M_2 e \omega^2 v(1) = 0 \quad (31)$$

$$(1+r)^{3q} v'''(1) + 3/2 \text{ qr } (1+r)^{4q-1} v''(1) + M_3 \omega^2 v(1) + M_2 e \omega^2 v'(1) = 0 \quad (32)$$

2.2. Método de la Cuadratura Diferencial

Para discretizar las ecuaciones diferenciales (22) se subdivide el intervalo natural de cada ecuación en n segmentos definidos por $n+1$ puntos de abscisas $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+1}$. Para ello asumimos $n+7$ incógnitas nodales:

$$\mathbf{d}^T = \{u_1, u'_1, u''_1, u'''_1, u_2, \dots, u_{n+1}, u'_{n+1}, u''_{n+1}, u'''_{n+1}\} \quad (33)$$

es decir, el desplazamiento en cada punto nodal y las tres primeras derivadas de los puntos extremos.

Al desplazamiento $v(\zeta)$ se lo puede aproximar:

$$v(\zeta) = \alpha C = \sum_{i=1}^{n+7} \alpha_i C_i \quad (34)$$

en donde α es el vector fila de monomios y C es el vector columna de coordenadas lagrangianas. Podemos asignarle a α , la siguiente serie de potencias:

$$\alpha = (1 \quad \zeta \quad \zeta^2 \quad \dots \quad \zeta^{n+6}) \quad (35)$$

donde los puntos nodales se definen de la siguiente forma:

$$\zeta_i = \frac{2(i-1)-n}{n}; \quad i=1, 2, \dots, n+1 \quad (36)$$

o los primeros elementos de los polinomios de Chebyshev de primer tipo:

$$\alpha = (T_0(\zeta) \quad T_1(\zeta) \quad T_2(\zeta) \quad \dots \quad T_{n+6}(\zeta)) \quad (37)$$

con los puntos del tipo Gauss-Chebyshev-Lobatto:

$$\zeta_i = -\cos\left(\frac{\pi(i-1)}{n}\right); \quad i=1, 2, \dots, n+1 \quad (38)$$

Derivando las ecuaciones (34) obtenemos:

$$v'(\zeta) = \alpha' C; \quad v''(\zeta) = \alpha'' C; \quad v'''(\zeta) = \alpha''' C \quad (39)$$

O matricialmente se tiene:

$$\mathbf{d} = (\alpha_1, \alpha'_1, \alpha''_1, \alpha'''_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}, \alpha'_{n+1}, \alpha''_{n+1}, \alpha'''_{n+1})^T C = \mathbf{N}_0 C \quad (40)$$

siguiendo el mismo procedimiento que la nota de Chen y otros [10] se obtiene:

$$\mathbf{A} = \mathbf{N}_0' \mathbf{N}_0^{-1}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{A}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{A}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{A} \quad (41)$$

Discretizando el operador diferencial:

$$\mathcal{L} = f(\zeta)^{2q} \frac{\partial^4}{\partial \zeta^4} + 3r q f(\zeta)^{2q-1} \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} + \frac{3}{4} q(3q-1) r^2 f(\zeta)^{2q-2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \quad (42)$$

como sigue:

$$\begin{pmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} & L_{1,3} & L_{1,4} & L_{1,5} & L_{1,6} & \dots & L_{1,n+4} & L_{1,n+5} & L_{1,n+6} & L_{1,n+7} \\ L_{2,1} & L_{2,2} & L_{2,3} & L_{2,4} & L_{2,5} & L_{2,6} & \dots & L_{2,n+4} & L_{2,n+5} & L_{2,n+6} & L_{2,n+7} \\ L_{3,1} & L_{3,2} & L_{3,3} & L_{3,4} & L_{3,5} & L_{3,6} & \dots & L_{3,n+4} & L_{3,n+5} & L_{3,n+6} & L_{3,n+7} \\ L_{4,1} & L_{4,2} & L_{4,3} & L_{4,4} & L_{4,5} & L_{4,6} & \dots & L_{4,n+4} & L_{4,n+5} & L_{4,n+6} & L_{4,n+7} \\ L_{3,1} & L_{3,2} & L_{3,3} & L_{3,4} & L_{3,5} & L_{3,6} & \dots & L_{3,n+4} & L_{3,n+5} & L_{3,n+6} & L_{3,n+7} \\ L_{4,1} & L_{4,2} & L_{4,3} & L_{4,4} & L_{4,5} & L_{4,6} & \dots & L_{4,n+4} & L_{4,n+5} & L_{4,n+6} & L_{4,n+7} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{n+6,1} & L_{n+6,2} & L_{n+6,3} & L_{n+6,4} & L_{n+6,5} & L_{n+6,6} & \dots & L_{n+6,n+4} & L_{n+6,n+5} & L_{n+6,n+6} & L_{n+6,n+7} \\ L_{n+7,1} & L_{n+7,2} & L_{n+7,3} & L_{n+7,4} & L_{n+7,5} & L_{n+7,6} & \dots & L_{n+7,n+4} & L_{n+7,n+5} & L_{n+7,n+6} & L_{n+7,n+7} \end{pmatrix} \quad (43)$$

Por lo tanto será:

$$L_{ij} = (f_i)^{2q} D_{ij} + 3r q (f_i)^{2q-1} G_{ij} + \frac{3}{4} q(3q-1) r^2 (f_i)^{2q-2} B_{ij} \quad (44)$$

Imponemos ahora las condiciones de contorno (29-32) y resulta conveniente intercambiar las filas (y columnas) (n +6) (n +7), con filas (y columnas) 3,4 para poder arribar a la matriz particionada de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{L}_{bb} & \mathbf{L}_{db} \\ \mathbf{L}_{db} & \mathbf{L}_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_c \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{\Omega}_{bd} \\ 0 & \mathbf{\Omega}_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_c \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \quad (45)$$

O bien:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{bb} \mathbf{w}_c + \mathbf{L}_{bd} \mathbf{w} &= \mathbf{\Omega}_{bd} \mathbf{w} \\ \mathbf{L}_{db} \mathbf{w}_c + \mathbf{L}_{dd} \mathbf{w} &= \mathbf{\Omega}_{dd} \mathbf{w} \end{aligned} \quad (46)$$

con el vector \mathbf{w}_c de coordenadas pasivas y el vector \mathbf{w} de las coordenadas activas de dimensión (n +3).

$$\mathbf{w}_c = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1' \\ v_{n+1}'' \\ v_{n+1}''' \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$w = \begin{pmatrix} v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n+1}'' \\ v_{n+1}''' \\ \cdot \\ v_1'' \\ v_1''' \end{pmatrix} \quad (48)$$

Tomando w_c de la primera y se sustituyéndola en la segunda, se arriba al siguiente problema de valores propios:

$$\left[\omega^2 (L_{db} L_{bb}^{-1} \Omega_{bd} - \Omega_{dd}) + (L_{bb} - L_{db} L_{bb}^{-1} L_{bd}) \right] w = 0 \quad (49)$$

2.3. Método de Discretización por Celdas

Consideremos la estructura de la Figura 2 discretizada en n celdas elásticas y t tramos de igual longitud l . El momento de inercia $I(z)$ y el área $A(z)$ se evalúan en la abscisa de cada una de las n celdas. De hecho, cada celda tendrá su rigidez $k_i = EI(z)/l$ y su masa concentrada $m_i = \rho A(z)l$.

Ambas cantidades se pueden organizar en una matriz de rigidez $k = \text{diag}\{k_i\}$ y en una matriz de masas $m = \text{diag}\{m_i\}$, con $i = 1, \dots, n$.

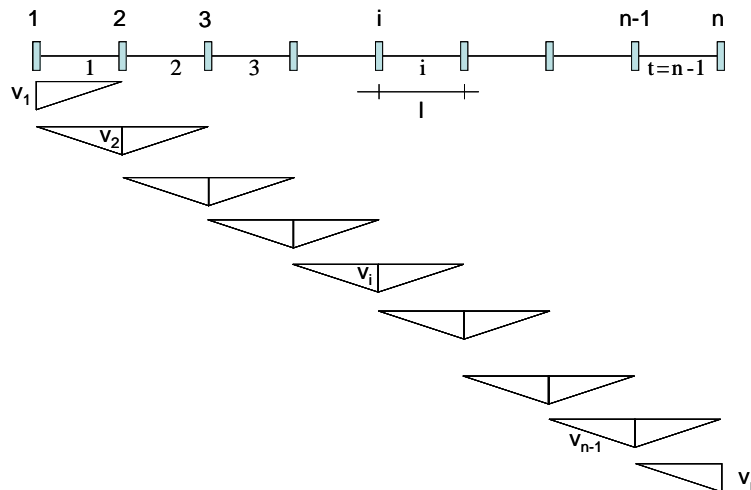


Figura 2: Discretización de la viga en celdas elásticas

De esta manera el sistema se reduce a un sistema homólogo con n grados de libertad. Los n desplazamientos verticales v_i de las abscisas de cada una de las celdas se pueden tomar como coordenadas Lagrangianas y organizarlas en un vector desplazamientos v de dimensión n . Las $n-1$ rotaciones rígidas de los tramos pueden ser calculadas en función de coordenadas Lagrangianas de la siguiente forma:

$$\phi_i = \frac{V_{i+1} - V_i}{l} \quad (50)$$

o en forma matricial $\phi = \mathbf{V}\mathbf{v}$ donde \mathbf{V} es la matriz de transformación rectangular con $n-1$ filas y n columnas.

Las rotaciones relativas entre los dos lados de las celdas serán las siguientes:

$$\varphi_1 = \phi_1, \quad \varphi_i = \phi_i - \phi_{i-1}, \quad \varphi_n = -\phi_{n-1} \quad (51)$$

o en forma matricial $\varphi = \Delta\phi$, siendo Δ una matriz rectangular de n filas y $n-1$ columnas.

La energía de deformación concentrada en las celdas será:

$$L_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_{ii} \varphi_i^2 = \frac{1}{2} \varphi^T \mathbf{k} \varphi \quad (52)$$

Sustituyendo (50-51) se obtiene:

$$L_e = \frac{1}{2} \varphi^T \mathbf{k} \varphi = \frac{1}{2} \phi^T \Delta^T \mathbf{k} \Delta \phi = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T (\mathbf{V}^T \Delta^T \mathbf{k} \mathbf{V} \Delta) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} \quad (53)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez ensamblada.

La energía cinética se la puede expresar como:

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} \quad (54)$$

siendo \mathbf{M} la matriz de masa ensamblada [7].

Aplicando el principio de Hamilton para los sistemas discretos se obtiene el clásico problema de valores propios que tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K} \mathbf{v} = 0 \quad (55)$$

y que proporcionará las frecuencias libres de vibraciones ω_i^2 y sus correspondientes formas modales.

3. EJEMPLOS NUMÉRICOS

La torre en estudio posee una longitud total $L = 27 \text{ m}$, radio en la base $R = 0,75 \text{ m}$, espesor de la corona circular $\delta = 0,01 \text{ m}$, área de la sección circular en la base $A = 2\pi\delta R = 0,0471239 \text{ m}^2$, momento de inercia de la sección transversal $I = \pi\delta R^3 = 0,0132536 \text{ m}^4$, módulo de Young del acero $E = 2068 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ y la densidad de masa del material de la torre $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$. Consideramos para mayor comodidad, los siguientes factores adimensionalizados $J_T^* = \frac{J_T}{\rho A L^3}$ para la inercia rotacional,

$M_T^* = \frac{M_T}{\rho A L}$ para la masa concentrada y para la excentricidad $e_T = e/L$.

Como se mencionó anteriormente la ley de variación de la sección transversal es una función del coeficiente de conicidad r . En nuestro caso r será siempre menor que 1 para una torre de sección variable, donde la sección transversal disminuye con la altura.

Se muestran ahora algunos ejemplos numéricos que nos proporcionan las frecuencias naturales de vibración al variar los parámetros de control, como excentricidad de la masa, el coeficiente adimensionalizado de la masa, la inercia rotacional y el coeficiente de conicidad.

El criterio de optimización adoptado consiste en encontrar una forma geométrica de torre de modo de rendir mínimos los valores de las frecuencias naturales haciendo variar el coeficiente de conicidad r .

3.1. Influencia del coeficiente de conicidad r en las dos primeras frecuencias naturales de vibración.

Consideramos una torre en ménsula con las características geométricas y físicas descriptas anteriormente. Fijamos el radio de la base igual a $R=0,75\text{ m}$ y se consideran siete valores del coeficiente de forma cónica $r = [0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3]$ para tratar de optimizar la estructura desde el punto de vista dinámico.

En la Tabla 1, para los valores de r dados, se muestran las frecuencias naturales de una torre sin masa excéntrica e inercia rotacional, calculado con DQM y con el método aproximado [7] (CDM).

Los resultados obtenidos demuestran que, al comparar los dos métodos, ambos convergen hacia los valores exactos de las frecuencias naturales, para una precisión deseada y aplicando convenientes niveles de discretización.

Los métodos que se confrontan son completamente diferentes entre sí, porque el DQM discretiza la ecuación diferencial y el CDM discretiza la estructura, por lo tanto el cotejo se realiza sobre los resultados, aunque en lo que respecta a los tiempos de evaluación ambos son equivalentes.

La primera frecuencia natural aumenta con la disminución del coeficiente de conicidad, pasando de $\omega_1 = 12.2903\text{ Hz}$ a $\omega_1 = 12.7576\text{ Hz}$, mientras que r se reduce.

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{12.2903} = 0.511231(\text{s}) \quad r = 0.9 \quad (56)$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{12.7576} = 0.492505(\text{s}) \quad r = 0.3 \quad (57)$$

Tabla 1. Valores de las dos primeras frecuencias naturales de vibración para $M_T^* = J_T^* = e_T = 0$.

Método de Cálculo	r	ω_1	ω_2
DQM	0.9	12.2903	103.246
CDM		12.2891	103.234
DQM	0.8	12.3521	101.081
CDM		12.3510	101.070
DQM	0.7	12.4192	98.8817
CDM		12.4182	98.8718
DQM	0.6	12.4923	96.6466
CDM		12.4914	96.6375
DQM	0.5	12.5725	94.3721
CDM		12.5716	94.3640
DQM	0.4	12.6606	92.0550
CDM		12.6599	92.0479
DQM	0.3	12.7583	89.6915
CDM		12.7576	89.6854

Como puede observarse, esta disminución del período es insignificante, por lo tanto, elegir una sección variable sólo puede tener ventajas económicas, ya que tiene poca influencia sobre el comportamiento dinámico de la estructura.

Pero la segunda frecuencia de vibración natural disminuye su valor de $\omega_1 = 103.246\text{ Hz}$ a $\omega_1 = 89.6854\text{ Hz}$, el período es cada vez mayor:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{103.246} = 0.0608565(\text{s}) \quad r = 0.9 \quad (58)$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{89.6854} = 0.700581(s) \quad r = 0.3 \quad (59)$$

Otro ejemplo numérico se muestra en la Tabla 2 donde se calcularon las dos primeras frecuencias naturales de vibración introduciendo la masa excéntrica y la inercia rotacional, $M_T^* = J_T^* = 0,1$, $e_r = 0,0185185$, correspondiente a $e = 0,5 m$, siempre variando el parámetro de conicidad.

Tabla 2. Valores de las dos primeras frecuencias naturales de vibración para $M_T^* = J_T^* = 0,1$, $e_r = 0,0185185$.

Método de Cálculo	r	ω_1	ω_2
DQM	0.9	9.7428	43.0741
CDM		9.7428	43.1072
DQM	0.8	9.6657	41.0730
CDM		9.6653	41.1066
DQM	0.7	9.5786	39.0763
CDM		9.5782	39.1102
DQM	0.6	9.4794	37.0858
CDM		9.4797	37.1201
DQM	0.5	9.3660	35.1037
CDM		9.3659	35.1383
DQM	0.4	9.2353	33.1327
CDM		9.2353	33.1677
DQM	0.3	9.0836	31.1760
CDM		9.0841	31.2112

Como se puede notar, las dos primeras frecuencias naturales disminuyen, esto significa que la masa y la inercia de rotación tienen un aporte beneficioso para el comportamiento dinámico.

La primera frecuencia natural disminuye con la disminución del coeficiente de conicidad, pasando de $\omega_1 = 9,7428 \text{ Hz}$ a $\omega_1 = 9,0841 \text{ Hz}$. La diferencia entre las dos frecuencias no es mucha, por lo tanto elegir un cambio de sección sólo puede tener las ventajas arriba mencionadas.

La segunda frecuencia natural de vibración disminuye del valor $\omega_2 = 43,0741 \text{ Hz}$ al valor $\omega_2 = 31,2112 \text{ Hz}$ y el período es cada vez mayor:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{43.0741} = 0.145869(s) \quad r = 0.9 \quad (60)$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{31.2112} = 0.201312(s) \quad r = 0.3 \quad (61)$$

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se confrontaron dos métodos aproximados para la obtención de las frecuencias naturales de vibración de torres a sección variable con la ley exponencial. Se ha incorporado una masa excéntrica con inercia rotacional en el extremo de la torre para simular el efecto de las palas de una turbina eólica terrestre. Aunque en este modelo simple la sección recta es homogénea y no existe fijación con diversa rigidez entre la torre y la masa. En la base se colocaron vínculos elásticos a rotación y traslación, para simular el abulonado de la torre a su base de fundación.

La convergencia a los valores exactos de las frecuencias está demostrada y el trabajo es, sin duda, susceptible de variaciones, como por ejemplo estudiar una torre inmersa en el mar.

Los resultados obtenidos pueden ser utilizados para el análisis forzado, como ejemplo, para simular un evento sísmico.

5. REFERENCIAS

- [1] H. H. Mabie, C.B. Rogers, *Transverse vibrations of double-tapered cantilever beams with end support and with end mass*, Journal of the Acoustical Society of America, **55**(5) 986-991, 1974.
- [2] R. P. Goel, *Transverse vibrations of tapered beams*, Journal of Sound and Vibration **47**(1), 1-7, 1976
- [3] W. L. Craver, P. Jampala, *Transverse vibrations of linearly tapered cantilever beam with constraining springs*, Journal of Sound and Vibration, **166**(3), 521-529, 1993
- [4] N. Auciello, *Transverse vibrations of a linearly tapered cantilever beam with tip mass of rotatory inertia and eccentricity*, Journal of Sound and Vibration, **194**(1), 25-34, 1996
- [5] Auciello N. Nolè G., *Vibrations of a cantilever tapered beam with varying section properties and carrying a mass at the free end*, Journal of Sound and Vibration, **214**(1), 105-119, 1998
- [6] M. C. Ece, M. Aydogdu and V. Taskin, *Vibration of a variable cross-section beams*, Mechanics Research Communications, 34, 78-84, 2007
- [7] M. A. De Rosa and M. Lippiello, *Natural vibration frequencies of tapered beams*, Engineering Transactions, 57,1, 45-66, 2009
- [8] N. Auciello, M. A. De Rosa, C. Franciosi, M. Lippiello y M. J. Maurizi." Vibraciones libres de vigas simplemente apoyadas de sección circular variable y yacentes sobre un suelo Pasternak-Kerr modificado." CAIM 2008, Octubre.
- [9] M. A. De Rosa, M. Lippiello, M.J. Maurizi, H. D. Martín. "El método de cuadratura diferencial en el análisis dinámico del sistema doble-viga, simplemente apoyado y de sección circular variable." CAIM 2008, Octubre.
- [10] W. Chen, A.G. Stritz, C.W. Bert, A new Approach to the differential quadrature method for fourth-order equations, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40, 1941-1956, 1997