



II CAIM 2010
Segundo Congreso Argentino
de Ingeniería Mecánica
San Juan - Noviembre 2010

Diseño de resortes helicoidales de compresión con geometría variable

Julio Massa, Hernán Quiroz y Jorge Muract

Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales – Universidad Nacional de Córdoba
Departamento de Estructuras, Casilla de Correo 916, (5000) Córdoba, Argentina
Tel: (0351) 4334145 int 34 - E-mail: jmassa@efn.uncor.edu

RESUMEN

Se presenta un método para analizar resortes helicoidales de compresión de sección circular donde el diámetro del resorte, el ángulo de la hélice y el diámetro del alambre varían a lo largo del resorte de una manera “suave”. El desarrollo obedece a las exigencias actuales de la industria, en especial la automotriz, que requieren resortes con diagramas característicos no lineales, es decir resortes en los cuáles la rigidez varía haciéndose más rígido a medida que crece la carga aplicada. En este trabajo se establecen hipótesis simplificadoras que facilitan el análisis de resortes donde la geometría tiene una variación “suave”.

Para determinar la curva carga-deformación del resorte teniendo en cuenta el bloqueo gradual de las espiras y su rigidización se aproxima la curva característica por un número finito de tramos rectos, válidos entre dos contactos sucesivos. En cada tramo recto del diagrama característico, la flexibilidad o rigidez del resorte se mantiene constante, pero varía de tramo en tramo. De esta manera la curva característica es una poligonal.

A medida que la carga crece, se producen contactos entre espiras antes de producirse el bloqueo total del resorte, lo que origina una variación en la pendiente de la curva carga-deformación. Durante este proceso algunas espiras se tornan inactivas y el resorte se hace progresivamente más “rígido”. En cada paso se suma la contribución de los tramos en que se discretizó el resorte para actualizar la flexibilidad y se determina el menor valor de incremento de carga que provoca el contacto entre dos espiras contiguas.

El algoritmo de cómputo utiliza el lenguaje de programación MATLAB, lo que permite aprovechar sus capacidades gráficas, visualizando mediante “animaciones” la deformación del resorte, la evolución de la luz entre las espiras y la curva carga-deformación.

Los resultados provistos por el método propuesto fueron contrastados con valores obtenidos ensayando un resorte de geometría variable usado en la industria automotriz dando diferencias en los desplazamientos que en promedio son del orden del 1 %.

Palabras Claves: Resortes helicoidales, compresión, resortes no lineales.

1. INTRODUCCIÓN

Los resortes se utilizan en las máquinas con el objeto de ejercer fuerzas, proporcionar flexibilidad y almacenar o absorber energía [1, 2, 3]. La mayoría de los resortes helicoidales de compresión que se fabrican tienen propiedades constantes y presentan un diagrama característico (carga vs. deformación) lineal, es decir la deformación es proporcional a la carga mientras no se sobrepasa el límite elástico del material; pero las exigencias actuales de la industria, en especial la automotriz, requieren resortes con diagramas característicos no lineales, es decir resortes en los cuáles la rigidez aumenta con la carga aplicada (ver Figura 1-a).

En este trabajo se obtiene la relación entre la carga aplicada y la deformación resultante, para resortes helicoidales de compresión de sección circular donde el diámetro del resorte, el ángulo de la hélice y el diámetro del alambre varían a lo largo del resorte de una manera "suave". Se desarrolló un algoritmo de cómputo utilizando el lenguaje de programación MATLAB para determinar la curva característica del resorte teniendo en cuenta el bloqueo gradual de las espiras y el consecuente "endurecimiento" del resorte.

2. RESORTES DE GEOMETRÍA VARIABLE

Si el diámetro exterior, el ángulo de la hélice y la sección del alambre son constantes en todo el resorte, la deformación en función de la carga aplicada es una ley lineal hasta el punto en que se produce el bloqueo total [4], es decir hasta el punto en que todas las espiras entran en contacto al mismo tiempo y el resorte no puede seguir deformándose. Pero si alguno de los parámetros que definen la geometría, varían a lo largo del resorte, se producen contactos entre espiras antes de producirse el bloqueo total del resorte, lo que origina una variación en la pendiente de la curva carga-deformación. Durante este proceso algunas espiras se tornan inactivas y el resorte se hace progresivamente más "duro".

Un resorte helicoidal de compresión con propiedades constantes (radio del resorte, ángulo de la hélice y radio del alambre) puede analizarse fácilmente debido a la axilsimetría que permite considerar al problema como isostático (ver Figura 1-b). Además, si el ángulo de la hélice es pequeño la sollicitación de flexión resulta insignificante y basta considerar sólo el momento torsor constante ($M_t = PR$) en todo el recorrido del alambre.

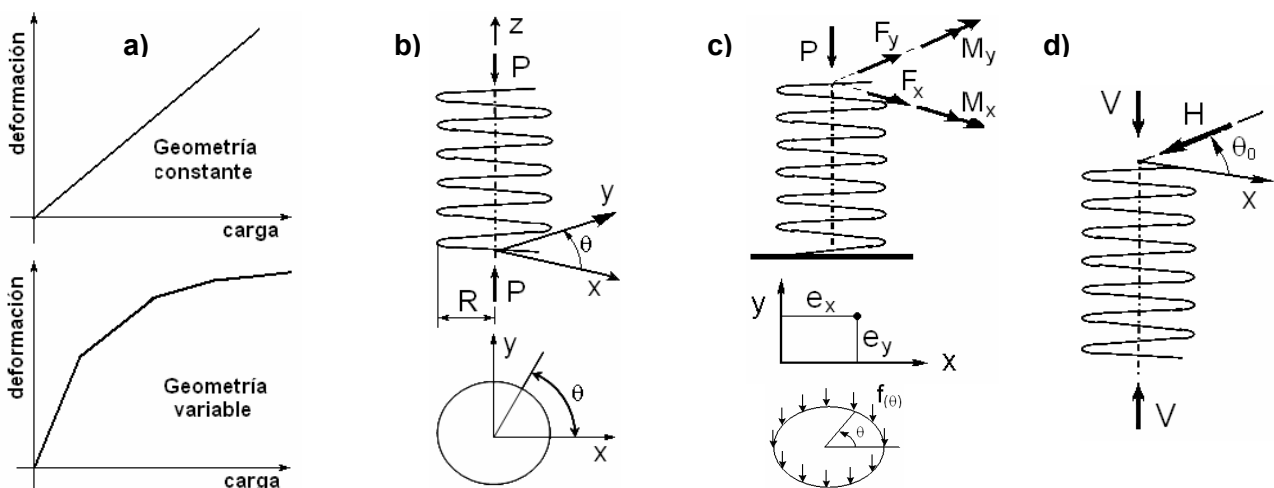


Figura 1: Generalidades sobre resortes helicoidales de compresión de geometría variable.

2.1 Condiciones de contorno

Cuando una o varias de las propiedades varían a lo largo del resorte (variable θ), el análisis resulta bastante más complicado. Deben especificarse con más detalle las condiciones de borde. En general puede asumirse que la primera y última espira no tienen desplazamientos laterales $u_x = u_y = 0$. Además podemos asumir que los extremos no pueden girar respecto a los ejes transversales X e Y, $\phi_x = \phi_y = 0$ (Figura 1).

Asumiremos que el extremo inferior está fijo con sus seis grados de libertad restringidos mientras que el extremo superior puede desplazarse y girar alrededor del eje longitudinal del resorte (eje Z en la Figura 1-b). En tales

circunstancias se tiene un problema hiperestático de 4º grado (ver Figura 1-c). La fuerza P es en realidad la resultante de las fuerzas distribuidas $f_{(\theta)}$ en la espira superior inactiva. Además la fuerza resultante no es centrada. Las excentricidades e_x , e_y determinan los momentos M_x y M_y :

$$P = \int_0^{2\pi} f_{(\theta)} R_{(\theta)} d\theta \quad M_x = -P e_y \quad M_y = P e_x \quad (1)$$

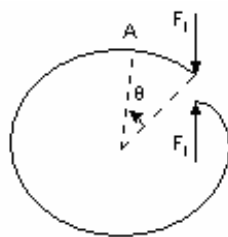
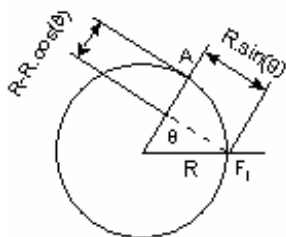
Estas cuatro reacciones hiperestáticas (Figura 1-c) originan esfuerzos de flexión a lo largo del resorte, que deben ser considerados correctamente.

2.2 Resortes suaves

El problema se complica a medida que sucesivos puntos del resorte van tomando contacto con la espira contigua porque las fuerzas de interacción en los puntos de contacto producen esfuerzos adicionales en toda la espira afectada, como ocurre en el caso de las arandelas tipo Grover (ver Figura 2). El bloqueo de espiras provoca reacciones hiperestáticas en el extremo superior. Estas reacciones hiperestáticas están compuestas por una fuerza horizontal H (Figura 1-d) actuando con un ángulo θ_0 .

$$H = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \theta_0 = \text{artg}(R_x / R_y) \quad (2)$$

y en una fuerza vertical (no nula) V, actuando con excentricidades. El efecto de estas reacciones (H, V) se hace sentir a todo lo largo del resorte incluyendo la espira afectada por el contacto! Como las fuerzas de interacción $F_{(\theta)}$ dependen de las deformaciones causadas por la fuerza actuante P y las reacciones hiperestáticas (V, H) provocadas por dichas fuerzas de interacción distribuidas, el análisis se torna muy complicado!



$$\begin{aligned} M_f &= F_i R_{(\theta)} \text{sen}\theta \\ M_t &= F_i R_{(\theta)} (1 - \text{cos}\theta) \end{aligned} \quad (3)$$

Figura 2: Esfuerzos en una arandela tipo Grover.

En este trabajo se encara un método aproximado válido para resortes cuyas propiedades varían de una manera "suave" en función de la variable θ . Definiremos como resorte de variación "suave" a aquel donde las propiedades varían de una manera casi lineal a lo largo del resorte y se dan condiciones equivalentes a la axilsimetría porque las incógnitas hiperestáticas resultan insignificantes. En tal caso la carga P actúa casi centrada y la fuerza horizontal es muy pequeña. Se definirá al resorte dando tres variables:

Radio del resorte (R_{θ}) Radio del alambre (r_{θ}) Ángulo de la hélice (α_{θ})

Estas tres variables permiten calcular la luz entre espiras L_{θ} . Esta variable juega un papel importante al momento de calcular donde se inicia y como evoluciona posteriormente la zona de contacto. Asumiremos que el radio del resorte, el ángulo de la hélice y el diámetro del alambre en las partes variables lo hacen lentamente, y de una manera monótona creciente o decreciente por largos tramos del resorte. Cuando las variaciones son "suaves" se puede hacer la hipótesis adicional de que la zona de puntos en contacto, $\Delta\theta$, crece también de una manera monótona.

2.3 Desplazamiento relativo

Para el caso de resortes suaves asumiremos que el desplazamiento relativo, en la dirección del eje del resorte, entre dos puntos próximos, A y A', es igual a la contribución del tramo que los une ($\overline{AA'}$) al desplazamiento del punto extremo superior del resorte. Esta propiedad se cumple exactamente para el caso de un resorte de propiedades constantes, pero no mantiene validez en el caso de propiedades variables.

2.4 Hipótesis simplificativas para analizar resortes suaves

El método de análisis de resortes de geometría de variación “suave” que se desarrolla en el presente trabajo se basa en las siguientes hipótesis simplificativas:

1. Las incógnitas hiperestáticas resultan insignificantes y su efecto puede ignorarse. Por lo tanto la única carga actuante, para definir las solicitaciones y desplazamientos, es la carga axial P actuando centrada.
2. El desplazamiento relativo según el eje del resorte entre dos puntos A y A' resulta igual a la contribución del tramo $\overline{AA'}$ al desplazamiento vertical del extremo superior del resorte.
3. Cuando dos puntos B y B' , separados una vuelta ($\theta_0, \theta_0+2\pi$) toman contacto, tornan inactiva esa vuelta a los efectos del cálculo del desplazamiento del punto superior del resorte. Todo el tramo $\overline{BB'}$ tiene flexibilidad nula para futuros incrementos de carga.
4. No es necesario calcular el valor de las fuerzas de interacción, ni tener en cuenta en forma detallada los efectos de las mismas sobre los desplazamientos y las solicitaciones.

3. CURVA CARGA–DEFORMACIÓN DE UN RESORTE NO LINEAL

Para obtener la deformación del resorte de geometría variable donde R , r y α son funciones de θ , se iguala la energía de deformación elástica al trabajo externo [5]. Se considera solamente el efecto de la torsión y el corte porque frente a ellos la contribución por flexión y efecto axial es insignificante,

$$\frac{1}{2}P\Delta = \frac{1}{2} \int \left[\frac{(PR \cos \alpha_0)^2}{GJ_{(r_0)}} + \frac{(P \cos \alpha_0)^2}{GA_{c(r_0)}} \right] dl \quad (4)$$

donde P es la carga aplicada, dl es el largo infinitesimal del elemento [$dl = (Rd\theta)/\cos \alpha_0$], G es el módulo de corte, J es el momento de inercia polar y A_c es el área de corte de la sección del resorte, ambas funciones de θ .

3.1 Flexibilidad del resorte

El resorte se discretiza en M elementos, la flexibilidad de cada elemento f_k se calcula a partir de los valores promedio de R_k , r_k , y α_k y la flexibilidad de todo el resorte es la suma de la contribución de los M elementos:

$$f_k = \left[2 \left(\frac{R_k}{r_k} \right)^2 + \frac{10}{9} \right] \frac{R_k \cos \alpha_k}{G \pi (r_k)^2} \Delta \theta_k \quad \longrightarrow \quad F = \sum_{k=1}^M f_k \quad (5)$$

La Ec. (5) predice como se deformará el resorte en función de la carga aplicada, hasta que se produzca el primer contacto entre espiras. De allí en adelante, ya no es válida esa ecuación, porque existen puntos del resorte que están en contacto y tramos que no aportan su flexibilidad de la manera habitual.

El resorte se discretiza en M tramos como se indica en la Figura 3 utilizando n puntos igualmente espaciados por vuelta. En cada nudo (k) se determina la coordenada z y en cada tramo se calcula la flexibilidad (f_k).

3.2 Flexibilidad acumulada

A partir de la flexibilidad de los tramos (f_k) se calcula la flexibilidad acumulada asociada a los nudos (F_{A_k}):

$$F_{A_k} = F_{A_{k-1}} + f_k \quad (6)$$

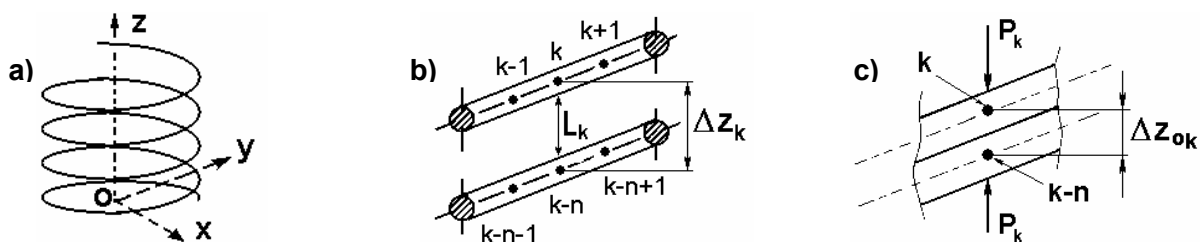


Figura 3: Esquema de la discretización del resorte en n tramos por vuelta, luz entre espiras (L_k) y paso de contacto (Δz_{0k}).

3.3 Carga de contacto

Una vez que se obtienen las flexibilidades acumuladas (Ec. 6), se determina la carga necesaria para producir el primer contacto entre dos puntos del resorte.

Se denomina L_k a la luz libre existente entre el nudo k de una espira y el nudo $k-n$ de la espira contigua anterior. El contacto entre dos puntos separados una vuelta, se produce cuando el desplazamiento relativo según el eje z entre dichos puntos es igual a L_k (ver Figura 3-b).

$$L_k = \Delta z_k - \Delta z_{0k} \quad (7)$$

Δz_k es la diferencia de coordenadas z entre los puntos k y $k-n$ ($\Delta z_k = z_k - z_{k-n}$). Notar que Δz_k varía con la carga (ver Figura 3-b).

Δz_{0k} es el paso de contacto, es la distancia vertical mínima compatible con la geometría en los puntos k y $k-n$. Este valor mínimo ocurre cuando el punto k y $k-n$ entran en contacto (ver Figura 3-c).

El valor del paso de contacto Δz_{0k} se determina en función del radio del alambre, el radio del resorte y el ángulo de la espira en los puntos k y $k-n$. La deducción detallada se da en el apartado 3.5.

Como el desplazamiento del punto k depende del desplazamiento del punto $k-n$ y del desplazamiento producido por la flexibilidad existente entre el punto k y el $k-n$ (llamada flexibilidad de la vuelta, F_v), el desplazamiento relativo entre ambos puntos, es función solamente de la flexibilidad de la vuelta. Como se conocen las flexibilidades parciales en todos los tramos, F_v se obtiene de la siguiente manera:

$$\text{si } k \leq n \rightarrow F_{V_k} = F_{A_k} \quad \text{si } k > n \rightarrow F_{V_k} = F_{A_k} - F_{A_{(k-n)}} \quad (8)$$

Como el eje del resorte (eje z) es vertical y el extremo inferior no se desplaza, asumimos que siempre que se produce un contacto entre espiras, es como consecuencia de que la espira superior se apoya sobre su inmediata inferior, es decir que el punto k entra en contacto con el punto $k-n$, y no a la inversa. Utilizando esta hipótesis y conociendo la luz entre espiras (L_k) y la flexibilidad de la vuelta (F_v), se determina la carga de contacto P_k que es necesaria para que el punto k entre en contacto con el punto $k-n$ (ver Figura 3-c).

$$P_k = L_k / F_{V_k} \rightarrow P_{C_1} = \text{menor} \{ P_k \} \quad (9)$$

La menor de las P_k es la *carga que produce el primer contacto*, P_{C_1} , entre dos puntos del resorte distantes 2π .

3.4 Deformación

Asumiendo que el resorte se deforma únicamente en la dirección del eje z (no se consideran deformaciones en el plano $x-y$, ver Figura 3-a), se calculan los desplazamientos verticales de todos los puntos del resorte, producidos por la carga de contacto P_{C_1} actuando en el extremo superior del resorte. El desplazamiento del último punto del resorte (nudo M), representa la deformación de todo el resorte para esa carga.

$$U_1 = F_{A_M} P_{C_1} \quad (10)$$

En los pasos siguientes, se asume que todos los tramos de la vuelta (espira) entre puntos en contacto (θ_0 y $\theta_0 - 2\pi$) tienen flexibilidad nula. Para obtener los restantes puntos que definen el diagrama característico (U_2 , U_3 , ...) se repite todo el proceso anterior: se recalculan las coordenadas (z_k) _{j} , las flexibilidades acumuladas (F_{A_k}) _{j} , la luz entre espiras (L_k) _{j} y la carga para producir el siguiente contacto entre espiras (P_C) _{j} , tantas veces como sea necesario, hasta que se anulen las flexibilidades de todos los tramos.

La coordenada z (altura) de cada nudo en el paso j se calcula restando la deformación del paso anterior ($j-1$).

$$\{ z_k \}_j = \{ z_k \}_{j-1} - \{ F_{A_k} \cdot P_C \}_{j-1} \quad (11)$$

3.5 Deducción del valor del paso de contacto Δz_0

La intersección de una espira con un plano vertical (que contiene al eje z del resorte) es una elipse debido al ángulo de la hélice α (ver Figura 4-a).

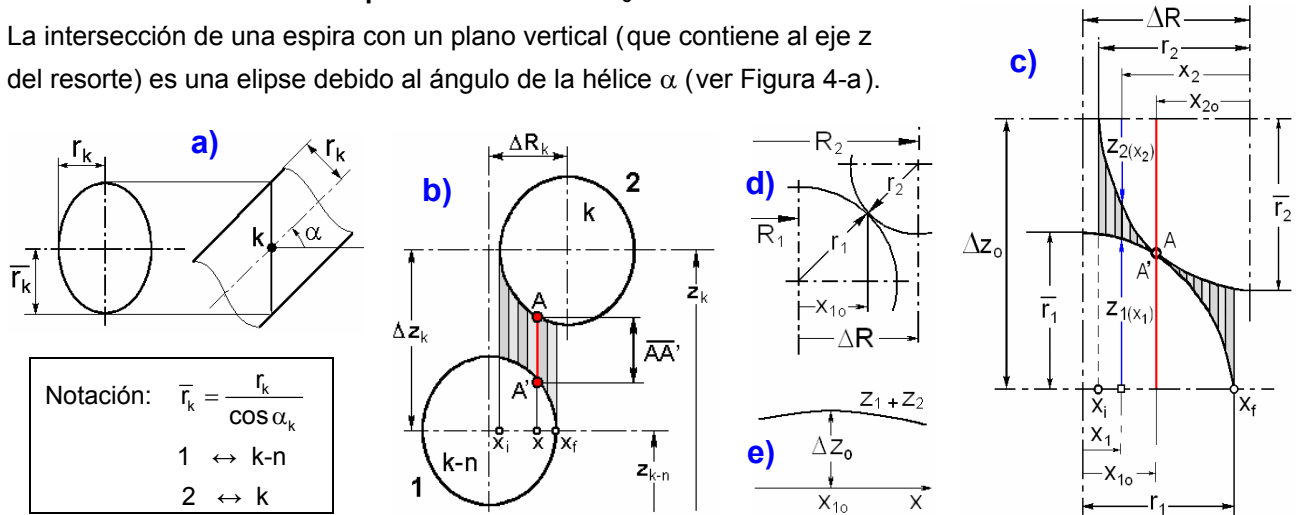


Figura 4: Cálculo del paso de contacto Δz_0 .

Para el punto k los semiejes de la elipse son r_k y \bar{r}_k según se observa en la Figura 4-a. A partir de la diferencia de altura Δz_k entre dos puntos distantes una vuelta puede calcularse L_k como el mínimo de la distancia $\overline{AA'}(x)$, para $x_i < x < x_f$, entre las dos elipses de la Figura 4-b.

$$\Delta R_k = |R_k - R_{k-n}| \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-n} \quad L_k = \text{menor} \left\{ \overline{AA'}(x) \right\} \quad (12)$$

En la figura 4-c se observa que el paso de bloqueo Δz_0 es el mayor valor posible de la suma $z_{1(x_1)} + z_{2(x_2)}$ en el intervalo $x_i < x_1 < x_f$ donde $x_i = \text{mayor}(0, \Delta R - r_2)$ y $x_f = \text{menor}(r_1, \Delta R)$.

$$\Delta z_0 = \text{mayor} \left\{ z_{1(x_1)} + z_{2(x_2)} \right\} = z_{1(x_{10})} + z_{2(x_{20})} \quad (13)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de las elipses y notando que $x_2 = \Delta R - x_1$ se tiene

$$\left(\frac{x_1}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{z_1}{\bar{r}_1} \right)^2 = 1 \rightarrow z_1 = \bar{r}_1 \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{r_1} \right)^2} \quad \left(\frac{x_2}{r_2} \right)^2 + \left(\frac{z_2}{\bar{r}_2} \right)^2 = 1 \rightarrow z_2 = \bar{r}_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta R - x_1}{r_2} \right)^2} \quad (14)$$

El paso de bloqueo Δz_0 se puede obtener por tanteos subdividiendo el intervalo $[x_i, x_f]$ y valuando la suma $z_1 + z_2$. Cuando $\Delta R = 0$ no es necesario el procedimiento de tanteo descrito ya que simplemente $\Delta z_0 = \bar{r}_1 + \bar{r}_2$. El proceso de tanteos puede obviarse determinando en forma aproximada la coordenada x_{10} del punto de contacto considerando dos circunferencias (ver Figura 4-d). En tal caso se tiene,

$$\frac{x_{10}}{r_1} = \frac{\Delta R}{r_1 + r_2} \rightarrow \boxed{x_{10} = \Delta R \frac{r_1}{r_1 + r_2}} \quad (15)$$

llevando este valor aproximado para las elipses (es exacto para las circunferencias) a la Ec. 13 y usando la Ec. 14 puede determinarse el paso de contacto como :

$$z_{1(x_{10})} + z_{2(x_{10})} = \bar{r}_1 \sqrt{1 - \left(\frac{x_{10}}{r_1} \right)^2} + \bar{r}_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta R - x_{10}}{r_2} \right)^2} \rightarrow \boxed{\Delta z_0 = (\bar{r}_1 + \bar{r}_2) \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta R}{r_1 + r_2} \right)^2}} \quad (16)$$

Esta última ecuación da excelentes resultados porque la exactitud en Δz_0 es muy superior a la exactitud de x_{10} (ver Figura 4-e). Observar que el radical tiene en cuenta el cambio de diámetro en una vuelta del resorte y no puede ignorarse. Su valor es uno cuando $\Delta R = 0$ pero en un caso, por ejemplo si $r_1 = 0,9 r_2$ y $\Delta R = 0,5 r_2$ su valor resulta aproximadamente 0,96 y su incidencia del 4 % no es despreciable. Notar que aparentemente Δz_0 es independiente de la carga y solo depende de la geometría inicial en los puntos k (R_2, r_2, α_2) y $k-n$ (R_1, r_1, α_1), aunque resulta obvio que el ángulo de la hélice $\alpha_{(0)}$ varían con la carga.

3.6 Determinación de las tensiones

Por razones de espacio, aunque es muy importante, no se aborda el cálculo de las tensiones, tema tratado ampliamente en la bibliografía [1, 2, 3]. Debe tenerse presente que además de satisfacer requerimientos de almacenamiento de energía y flexibilidad los resortes deben tener una adecuada resistencia a fatiga, este tema puede consultarse en la referencia [7].

4. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA COMPUTACIONAL

Se desarrolló un algoritmo de cómputo que obtiene el diagrama característico correspondiente a resortes helicoidales de geometría suavemente variable, utilizando el lenguaje de programación MATLAB®. Este lenguaje bajo entorno WINDOWS, permite realizar programas interactivos con salidas gráficas. De esta forma se facilita la ejecución del programa y la posterior comprensión de los resultados obtenidos. El programa hace lo siguiente:

1. Determina las flexibilidades f_k , F_{Ak} , F_{Vk} de los M puntos del resorte.
2. Grafica en tres dimensiones de la línea media del resorte, cuando este no posee carga alguna (Figura 6-a).
3. Muestra una animación en tres dimensiones de la forma en que evoluciona la luz entre espiras con la carga aplicada como se muestra en la Figura 5. Para cada carga, se imprime en pantalla el valor de la altura, la deformación y la flexibilidad de resorte. También se imprime el valor de la tensión efectiva correspondiente a dicha carga. Es importante aclarar que el programa no determina si se supera la tensión admisible.

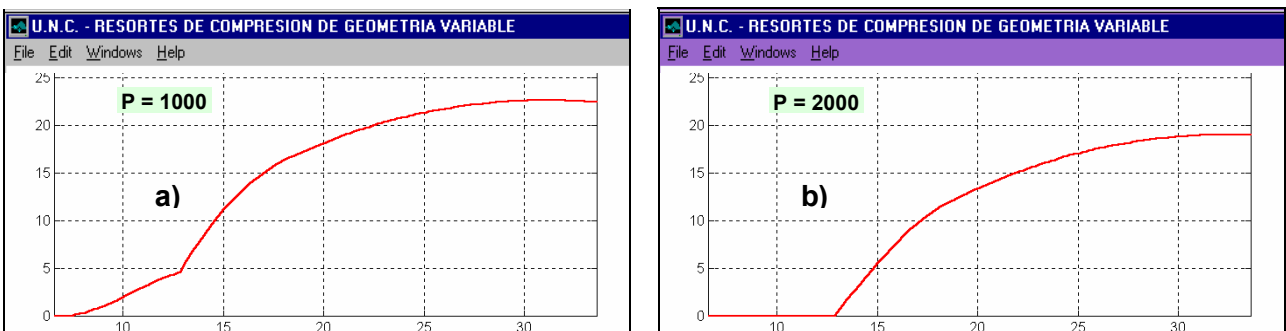


Figura 5: Evolución de la luz libre debajo de cada punto del resorte (respecto a la espira anterior).

También se grafica la evolución del resorte en función de la carga como se muestra en la Figura 6.

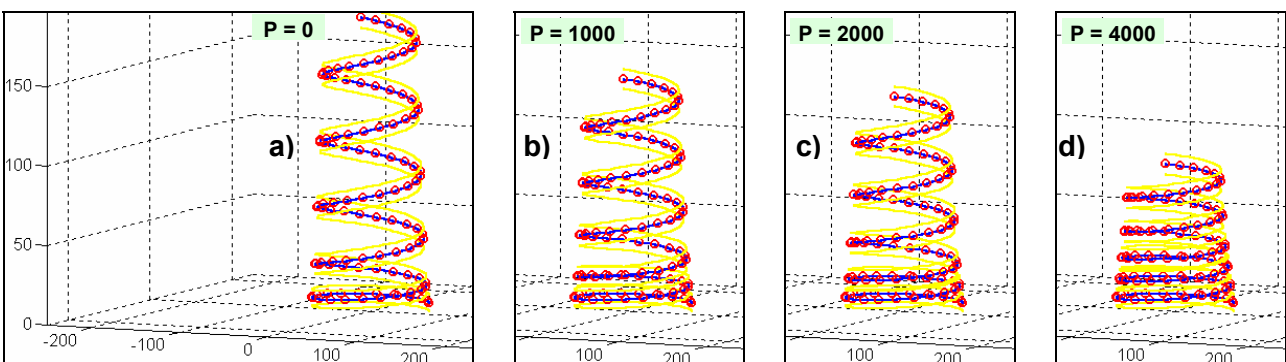


Figura 6: Grafico tridimensional que muestra la evolución del resorte en función de la carga creciente.

4. Imprime el diagrama característico. Se determina la curva completa, desde la carga nula hasta la carga que produce el bloqueo total del resorte. Este gráfico posee cuatro botones en la parte inferior derecha:

- | | | |
|----|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| a) | <input type="button" value="Altura"/> | Muestra el diagrama característico referido a la altura del resorte (Figura 7-a). |
| b) | <input type="button" value="Deformación"/> | Muestra el diagrama característico referido a las deformaciones (como en la Figura 10). |
| c) | <input type="button" value="Zoom"/> | Habilita hacer acercamientos en los dos diagramas anteriores (altura o deformación). |
| d) | <input type="button" value="Grilla"/> | Enciende o apaga la grilla de los gráficos de altura y de deformación. |

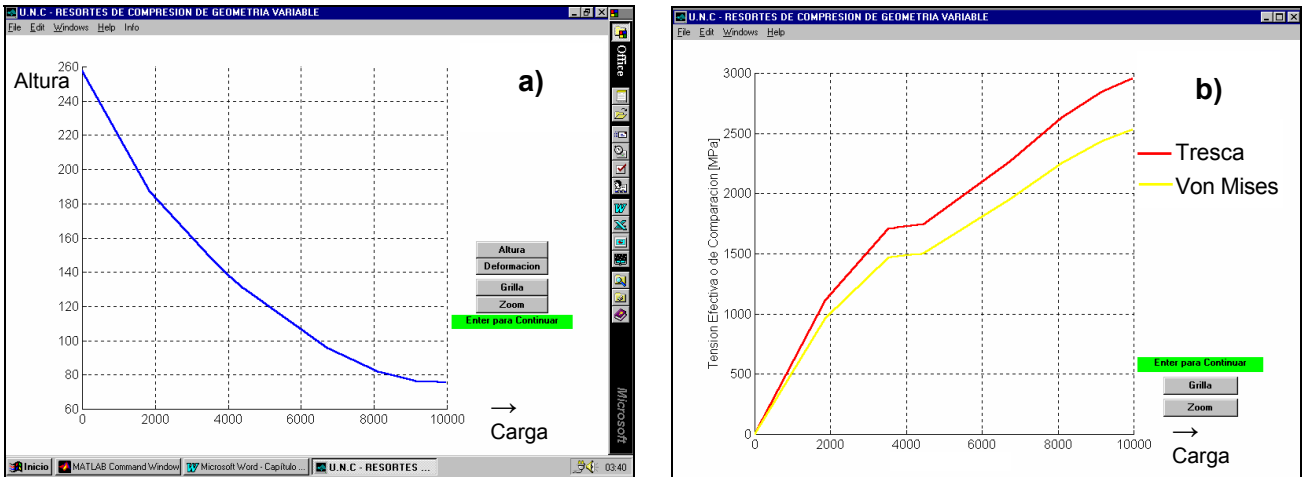


Figura 7: Gráficos en función de la carga. a) Diagrama carga-deformación y b) Tensiones efectivas.

- Presionando "Enter" desde cualquiera de los gráficos de altura o de deformación, se pasa al gráfico de las tensiones efectivas. Se imprimen dos curvas, una representa las tensiones efectivas calculadas según el criterio de falla de Von Mises y la otra según Tresca. También existe la posibilidad de hacer uso de las opciones zoom y grilla a través de los botones correspondientes. En el gráfico de la Figura 7-b se muestra la máxima tensión efectiva en el resorte en función de la carga graficada en abscisas.
- A continuación aparecen tres gráficos independientes, radio del resorte, el radio del alambre y el ángulo de la hélice; todos en función del número de vueltas n_v (a partir del punto 1 en la parte inferior).

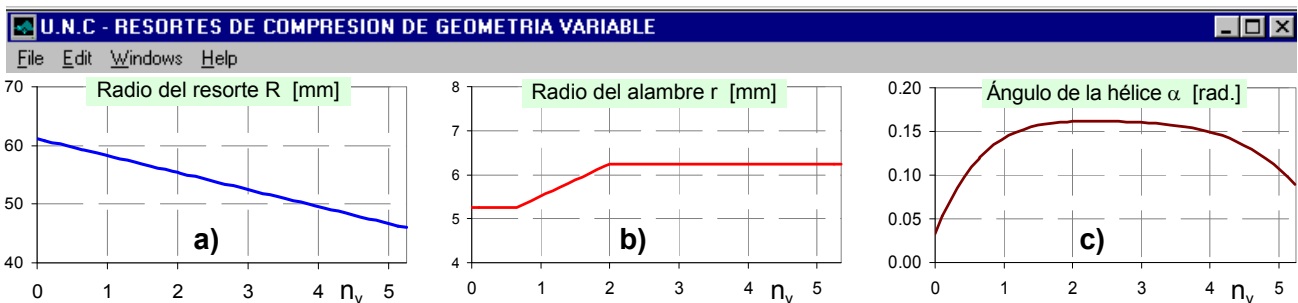


Figura 8: Gráficos - a) radio del resorte, b) radio del alambre y c) ángulo de la hélice.

- Se crea un archivo de salida en formato ASCII con la extensión txt. En este archivo se imprimen las coordenadas (x, y, z) y los valores de R, r y α , todo en función de θ . También se imprimen las cargas, las deformaciones y las alturas en cada paso de cálculo.

5. VALIDACIÓN DE LA METODOLOGÍA PROPUESTA

Para validar el algoritmo propuesto se lo aplicó a un resorte utilizado en la industria automotriz (ver Figura 9-a) cuya geometría variable esta definida en la Tabla 1 y graficada en la Figura 8. Se trata de un resorte cónico de 258 mm de largo inicial y 5,25 espiras (33 radianes). R es lineal según se muestra en la Figura 8-a. El alambre se ha afinado por torneado en las dos primeras vueltas (parte inferior de la Figura 9-a), el primer 65 % de vuelta es de radio constante ($r = 5,25$ mm), luego crece linealmente y a partir de la segunda vuelta vuelve a ser constante ($r = 6,25$ mm) según se puede observar en la Figura 8-b. El ángulo de la hélice es casi constante excepto en los extremos (Figura 8-c). El material del resorte es SAE-9254 ($G = 79290$ N/mm²).

Tabla 1: Geometría del resorte ensayado.

Radio del resorte (R) - [mm]	$R = 61,15 - 0,46 \theta$		
Radio del alambre (r) - [mm]	$\theta \leq 4,084 \rightarrow r = 5,25$	$\theta > 12,566 \rightarrow r = 6,25$	resto $\rightarrow r = 4,7685 + 0,1179 \theta$
Ángulo de la hélice (α) - [rad.]	$(q = \theta / 10) \rightarrow \alpha = 0.033 + 0.3138 q - 0.2971 q^2 + 0.1359 q^3 - 0.02938 q^4 + 0.002186 q^5$		



Figura 9: Fotografías del ensayo de validación. a) Resorte ensayado. b) Equipo utilizado.

El resorte fue ensayado mediante el instrumental que se muestra en la Figura 9-b. Se obtuvieron diez puntos del diagrama carga-deformación (graficados en color negro y tabulados en la Figura 10). La línea llena en rojo corresponde a los resultados obtenidos con la metodología desarrollada usando 160 elementos por vuelta (840 en total) y considerando "asiento escuadrado". La concordancia es muy buena, la diferencia promedio es del 1,1 %.

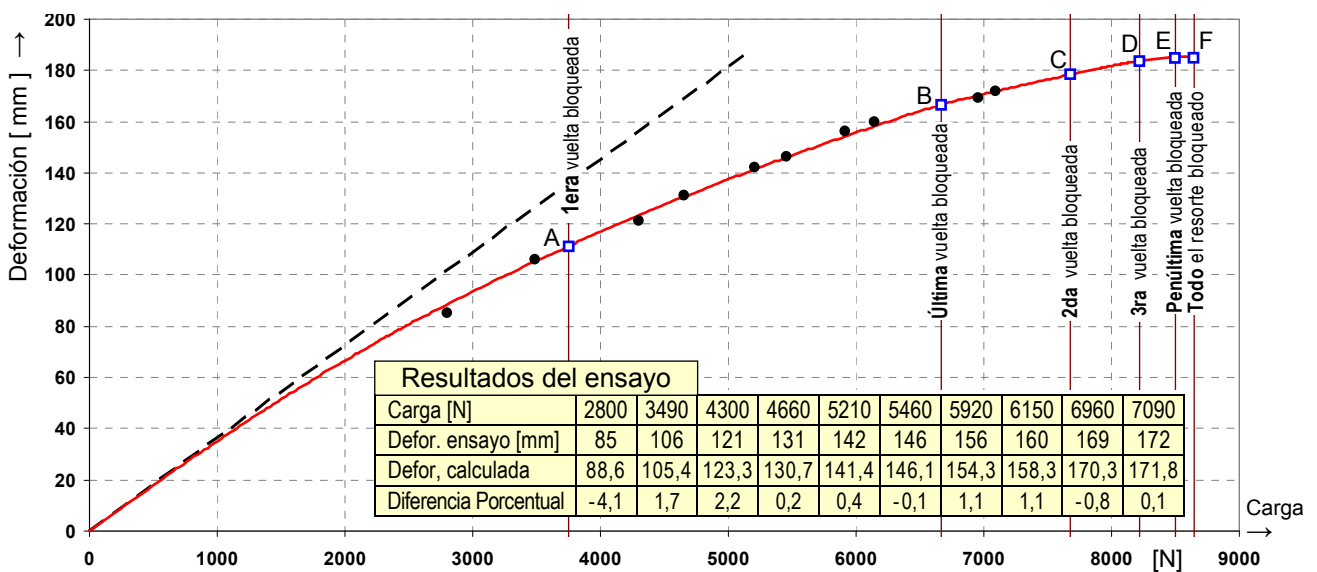


Figura 10: Diagrama carga- deformación obtenido con el algoritmo desarrollado vs. resultados experimentales.

La simulación numérica usando el procedimiento propuesto (línea roja en la Figura 10), muestra que el resorte se comporta como no lineal desde el comienzo, al bloquearse gradualmente los puntos sucesivos de la primera espira. La rigidez del resorte crece gradualmente de manera "suave" hasta que el resorte se bloquea totalmente cuando la carga llega a 8644 N. La evolución de las variables involucradas se muestra en la Tabla 2. La curva carga-deformación no lineal de la Figura 10 esta compuesta por 421 tramos rectos.

Tabla 2: Evolución de la zona bloqueada del resorte en función de la carga creciente.

Punto en la Figura 10	A	B	C	D	E	F
Carga Aplicada [Newton]	3754	6669	7677	8219	8505	8644
Cantidad de vueltas bloqueadas	1	2	3	4	5	5,25
Pasos de cálculo	158	274	312	389	392	421
Deformación del resorte [mm]	111,4	166,8	178,4	183,7	185,3	185,4

Para visualizar el comportamiento del resorte bajo cargas crecientes se han confeccionado las figuras 11 a 15 donde se muestra la evolución de las diversas variables en forma paramétrica cada 1000 Newton de carga. Notar que todos esos gráficos están muy relacionados, los número 0, 1, 2, 3,... 8 sobre las curvas paramétricas indican las cargas de 0, mil, 2 mil 3 mil hasta 8 mil Newton.

A modo de ejemplo, en los gráficos de las Figuras 11, 12 y 13 se ha indicado el estado de las variables del resorte cuando la carga es de 8000 N (puntos P_1 hasta P_6). En la Figura 11 se observa que cuando la carga aplicada es de 8 mil Newton, 3,2 espiras ya están bloqueadas y no aportan flexibilidad (las 2,2 primeras espiras y la última que se bloqueó cuando la carga llegó a 6669 N). Los restantes elementos tienen la flexibilidad inicial indicada en línea roja. Para 8000 N se tiene la poligonal $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$.

La flexibilidad de los tramos (f_k) es monótonamente decreciente debido a la disminución de radio del resorte (R), pero a eso se agrega la variación del radio del alambre (r) por lo que en la Figura 11 se diferencian nítidamente tres zonas: la I va hasta 0,65 espiras, la II hasta 2 espiras y la III hasta el final del resorte.

Cuando la carga es de 8000 N, en la Figura 12 se observa que la flexibilidad de vuelta F_v es nula para las primeras 2,2 espiras (punto P_2), luego crece linealmente hasta el punto P_3 (a 3,2 vueltas) donde toma el valor inicial dado por la curva en color rojo hasta el punto P_4 y a partir de allí disminuye linealmente hasta el valor cero en el punto P_5 porque la última espira ya está bloqueada desde que la carga llegó a 6669 N.

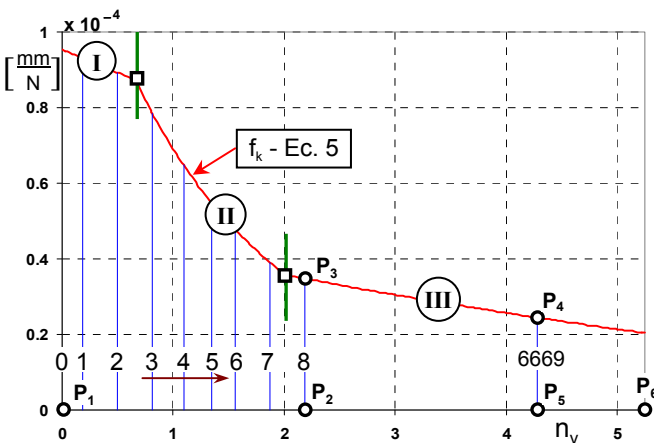


Figura 11: Flexibilidad f_k de los elementos a lo largo del resorte de 5,25 vueltas – Ecuación 5.

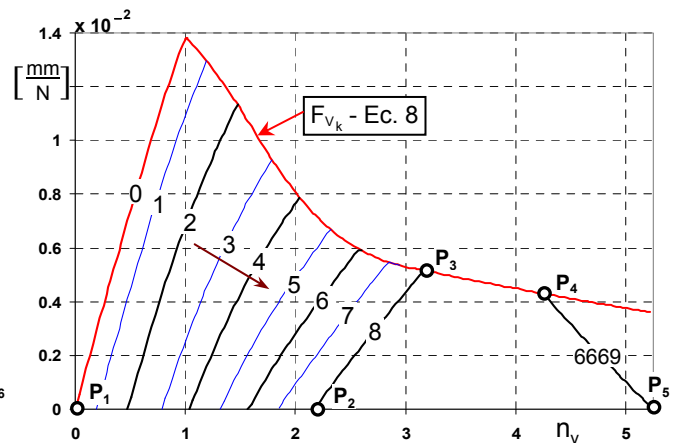


Figura 12: Flexibilidad de vuelta, F_v , de un punto k respecto a la espira de abajo – Ecuación 8.

La flexibilidad acumulada F_A decrece con la carga como se muestra en la Figura 13, cuando la carga es 8000 N, las primeras 2,2 espiras no aportan flexibilidad mientras que las restantes tienen un valor igual al inicial menos el valor perdido por el bloqueo (notar que la curva P_2 - P_3 es la misma curva $*P_2$ - $*P_3$ inicial trasladada hacia abajo). A partir del punto P_3 la flexibilidad acumulada no crece porque la última espira está bloqueada (desde 6669 N).

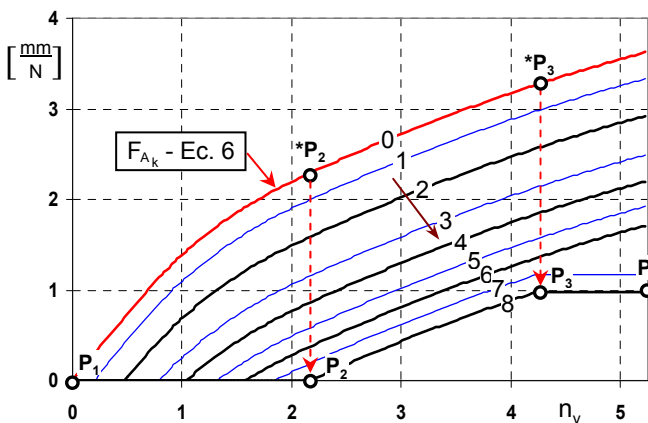


Figura 13: Flexibilidad acumulada, F_A , en los primeros k tramos – Ecuación 6.

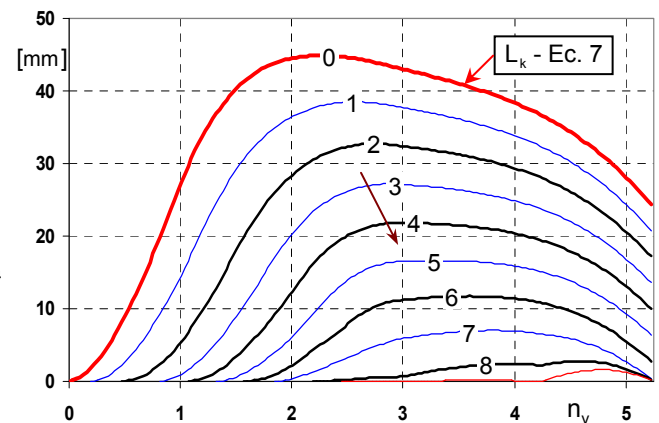


Figura 14: Luz hasta tocar la espira de abajo en mm – Ecuación 7.

En la Figura 14 se graficó la luz libre entre espiras sucesivas (Ec. 7) cada mil Newton de carga. Notar que la luz decrece en forma monótona a medida que crece la carga.

En la Figura 15 se graficó la altura de los nudos del resorte (Ec. 11) cada mil Newton de carga. Los nudos descienden en forma monótona hasta que tocan la espira anterior y a partir de allí permanecen bloqueados.

En la Figura 16 se muestra como evoluciona la zona bloqueada en función de la carga. Se han indicado los puntos A hasta F (ver Tabla 2) donde se bloquean las espiras.

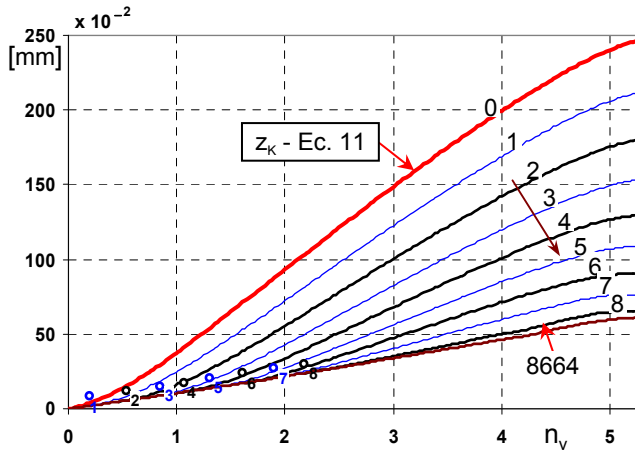


Figura 15: Coordenada z de los puntos en función del número de vueltas n_v – Ecuación 11.

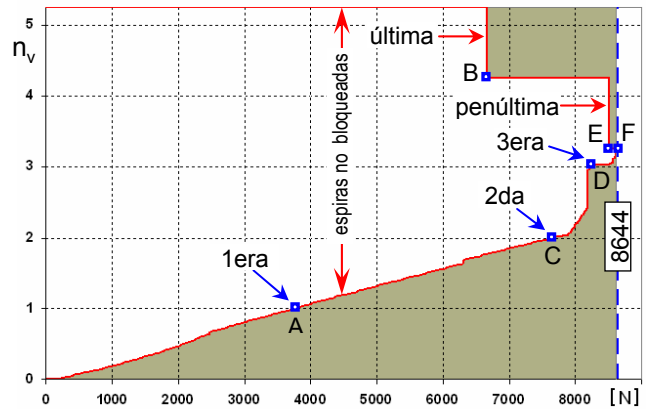


Figura 16: Crecimiento del número de espiras bloqueadas en función de la carga.

6. COMPARACIONES

A fin de hacer comparaciones se consideraron otros dos resortes similares a los de la Tabla 1 cuyas características se dan en la Tabla 3 y sus diagramas de carga deformación se muestran en la Figura 17.

Tabla 3: Geometría de otros resortes de características similares para comparación.

Características del resorte	Radio resorte R - [mm]	Radio alambre r - [mm]	Hélice α [rad]
1 Todo variable	Ver Tabla 1	Ver Tabla 1	Ver Tabla 1
2 Alambre constante	Ídem Resorte 1	5,984	Ídem Resorte 1
3 Todo constante	53,6	5,983	0,1383

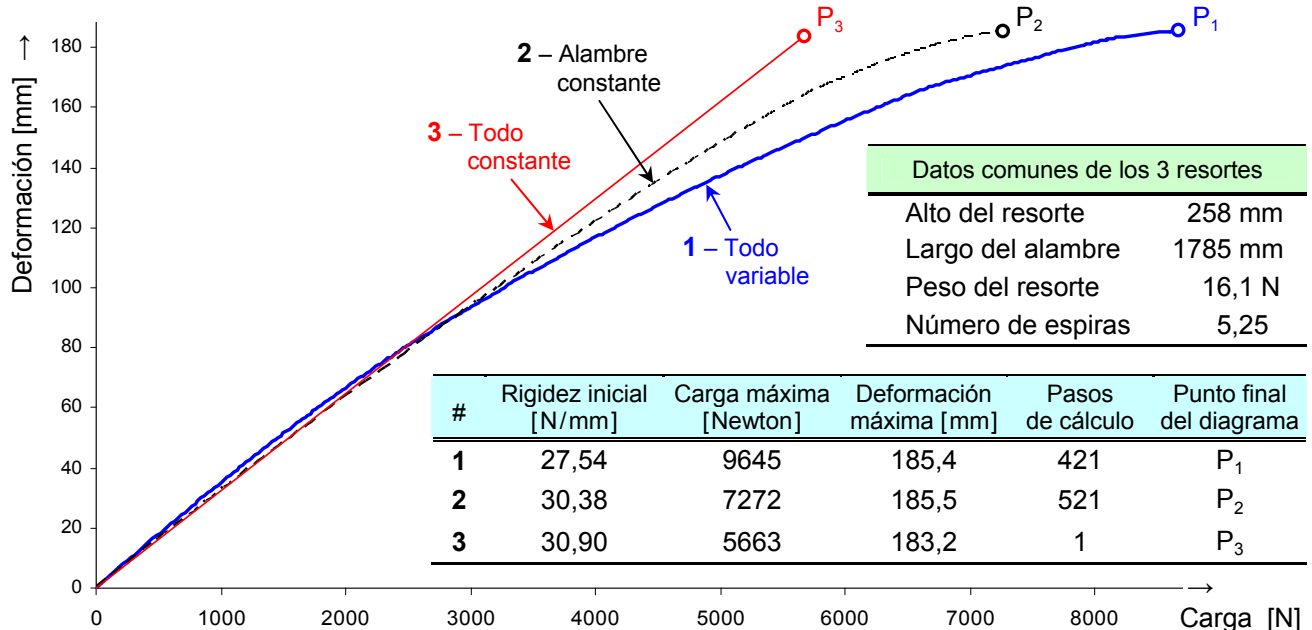


Figura 17: Comparación de tres resortes de características similares.

El resorte 2 tiene la misma ley de variación del radio R y de la hélice α que el resorte 1, pero el alambre es de diámetro constante (aprox. 12 mm), mientras que los valores del largo del alambre, altura, peso y número de espiras también son iguales a los del resorte 1. El desempeño del resorte 2 es inferior al del resorte 1 en cuanto a la no linealidad, pero es más fácil de construir porque se ha eliminado la operación de torneado de las dos primera espiras al usar alambre de espesor constante.

El resorte 3 tiene propiedades constantes y el largo del alambre, altura, peso y número de espiras son iguales a los del resorte variable de la Tabla 1 (resorte 1). El comportamiento es lineal hasta que se bloquean simultáneamente todas las espiras cuando la carga llega a los 5663 N y la deformación es 183,2 mm. Notar que el algoritmo obtiene la solución en un solo paso de cálculo !

En la Figura 17 se incluyeron dos tablas. La primera muestra los datos comunes de los tres resortes y la segunda es una comparativa de los resultados obtenidos en los diagramas carga-deformación.

7. CONCLUSIONES

Se desarrolló un método para analizar resortes helicoidales de compresión de sección circular donde el diámetro del resorte, el ángulo de la hélice y el diámetro del alambre varían a lo largo del resorte de una manera “suave” para lograr diagramas característicos no lineales donde la rigidez crece con la carga aplicada.

Se establecieron hipótesis simplificadoras que permiten resolver el problema de una manera simple y criterios que ayudan a diseñar resortes de geometría variable del tipo “suave”. La metodología propuesta permite estimar el comportamiento de un resorte de geometría variable de una manera simple, lo que permite comparar diferentes alternativas en la etapa de diseño para adoptar la más conveniente.

Se implementó un algoritmo de cómputo que utiliza el lenguaje de programación MATLAB, lo que permite aprovechar sus capacidades gráficas, visualizando mediante “animaciones” la deformación del resorte, la evolución de la luz entre las espiras y la curva carga-deformación. Las visualizaciones muestran que a medida que la carga crece, se producen contactos entre espiras antes de producirse el bloqueo total del resorte, lo que origina una variación en la pendiente de la curva carga-deformación. Durante este proceso algunas espiras se tornan inactivas y el resorte se hace progresivamente más “duro”.

Es importante destacar que el algoritmo desarrollado pudo tratar adecuadamente tanto los dos casos de variación “suave” como el caso constante donde se llega a la solución en un solo paso de cálculo, siendo que en los tres casos mostrados se utilizaron 840 elementos para discretizar los resortes.

Los resultados provistos por el método propuesto fueron contrastados con valores experimentales obtenidos ensayando un resorte de geometría variable usado en la industria automotriz dando diferencias muy pequeñas.

8. REFERENCIAS

- [1] R.G. Budynas, J.K. Nisbett, M.A. Ríos Sánchez, “Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley” - Octava edición, Mc Graw Hill. 2008.
- [2] Society of Automotive Engineers, “Spring Design Manual”, 2nd Edition, Society of Automotive Engineers, Inc. (Warrendale, PA). 1996.
- [3] A.M. Wahl, Mechanical Springs, 2nd Edition, McGraw-Hill, Inc. (New York). 1963.
- [4] V.M. Faires, Design of Machine Elements, 4th Edition, The Macmillan Company (Toronto, Ontario). 1965.
- [5] C.A. Prato y J.C. Massa, “Análisis de Estructuras de barras – Método de las Fuerzas” ISBN 978-987-572-192-1, Editorial: Jorge Sarmiento Editor / Universitas Libros. 2008.
- [6] W.C. Young, Roark's Formulas for Stress and Strain, 6th Edition, McGraw-Hill, Inc. (New York). 1989.
- [7] H. Quiróz, Diseño de resortes de geometría variable, Trabajo Final de grado, Departamento de Estructuras. Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba. 1998.