



II CAIM 2010
Segundo Congreso Argentino
de Ingeniería Mecánica
San Juan - Noviembre 2010

Análisis dinámico no-lineal de las oscilaciones auto-excitadas de una sección alar con dos grados de libertad

Walter Castelló, Sergio Preidikman, Alejandro Brewer

*Departamento de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales,
Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, (5000) Córdoba, Argentina.*

e-mail: wcastello@efn.uncor.edu

RESUMEN

La respuesta de estructuras flexibles a solicitaciones de origen aerodinámico es generalmente de naturaleza no-lineal. La característica del comportamiento aeroelástico depende, no solo, de las propiedades de los subsistemas involucrados (estructural y aerodinámico) sino también de la manera en que estos dos subsistemas se combinan. La respuesta no-lineal de una sección alar con dos grados de libertad ha sido ampliamente estudiada.

La importancia del análisis de sistemas aeroelásticos radica en su capacidad para predecir la respuesta de algunos componentes críticos de una aeronave. Por ejemplo, la pérdida de rigidez en las superficies de control es causa de niveles inaceptables de vibraciones de la aeronave. Estas vibraciones deben ser evitadas, pues la transición entre vibraciones indeseables y "flutter" es en general difusa. Y como es sabido, el flutter de las superficies de control puede dañarlas provocando la pérdida de la aeronave.

En este trabajo se estudia numéricamente la dinámica no-lineal de un sistema aeroelástico con comportamiento estructural no-lineal cúbico y "juego" en la rigidez torsional de la sección alar. El modelo de orden reducido emplea las hipótesis de la conocida "sección típica". Las cargas aerodinámicas se obtienen mediante el uso de un método de red de vórtices bi-dimensional, inestacionario y no-lineal. Las ecuaciones que gobiernan el sistema aeroelástico son integradas numérica, simultánea, e interactivamente en el dominio del tiempo.

El modelo desarrollado permite determinar la amplitud y la frecuencia de las vibraciones auto-excitadas inducidas por el cambio en la rigidez torsional, la incidencia en la velocidad de flutter del sistema aeroelástico, y la aparición de ciclos límite. Los resultados provenientes de las simulaciones numéricas muestran una importante correlación con los obtenidos por otros autores, además el modelo matemático presentado en este trabajo resulta ser más eficiente y preciso, en particular para los casos altamente no-lineales.

Palabras Claves: ciclos límite, aeroelasticidad no-lineal, dinámica estructural.

1. INTRODUCCIÓN

Los aviones de alto desempeño son, en general, susceptibles a una variedad de fenómenos aeroelásticos con comportamiento no lineal. En la última década se ha observado un interés generalizado en el estudio de estos fenómenos aeroelásticos no lineales, y ciertamente la literatura en esta área es muy extensa. Una revisión del estado del arte asociado al análisis aeroelástico no lineal puede verse en los trabajos [1], [2] y [3]. En estos trabajos, los autores proveen una completa revisión de las teorías de análisis y de los modelos computacionales y experimentales concebidos para estudiar estos fenómenos, discutiendo también el grado de correlación entre los resultados experimentales y numéricos. En particular en [2] y [3], se hace especial énfasis en el estudio de las oscilaciones de ciclo límite (Limit Cycle Oscillations, LCOs), ya que la aparición de este fenómeno en aeronaves en vuelo en épocas recientes ha resultado ser una experiencia muy perjudicial. Las LCOs son vibraciones auto-excitadas de amplitud limitada, producto de la interacción no lineal fluido-estructura. La aparición de LCOs se debe, entre otras, causas a: presencia aerodinámica e inercial de dispositivos de almacenamiento de combustible, interacciones de cuerpo rígido (el caso de las alas volantes) y juego o pérdida de rigidez en las superficies de control, etc.

El juego excesivo puede causar vibraciones inaceptables de la estructura de la aeronave durante el vuelo, y estas vibraciones en las superficies de control deben ser evitadas porque pueden eventualmente provocar flutter. Este fenómeno debe evitarse ya que puede ocasionar daños en la estructura de las superficies móviles y consecuentemente pérdida de control. La potencial aparición de LCOs incrementa el costo de desarrollo, certificación, y mantenimiento de aeronaves; y esto está relacionado con el sobre dimensionamiento, los ensayos, y el mantenimiento necesarios para aumentar la vida útil. A modo de ejemplo cabe citar que la FAA propuso adoptar nuevas directivas, relativas al juego de superficies de control, para todos los modelos Boeing 777. Estas directivas establecen que se deben efectuar mediciones periódicas del juego de los elevadores izquierdo y derecho, y del timón de dirección. Estas directivas, que incluyen acciones correctivas, lubricación repetitiva, etc., de las superficies móviles, se originaron a partir de reportes de ensayos en vuelo que referidos a la aparición de vibraciones inducidas por juego en las superficies de control.

Desde el punto de vista experimental se han llevado a cabo diversas experiencias, talvez las más ampliamente citadas sean los estudios experimentales realizados en el túnel de viento de baja velocidad de la Universidad de Duke. Una completa descripción del modelo experimental, y los resultados obtenidos, para una sección alar con juego en el grado de libertad de giro en la superficie de control se puede encontrar en el trabajo de Dowell et al. [4]. Más recientemente se incorporó al túnel de viento un generador de ráfagas, el cual ha permitido también estudiar las incidencias de los cambios abruptos en la velocidad sobre las LCOs.

En lo referente al área computacional, para captar la naturaleza del comportamiento es necesario que los modelos contemplen la no linealidad de: la aerodinámica y la estructura. En consecuencia, el análisis paramétrico de estos sistemas conlleva un gran esfuerzo computacional, y por ello la economía de cálculo resulta fundamental. El análisis de problemas aeroelásticos empleando modelos basados en la mecánica de fluidos computacional (CFD) resulta prohibitivo. Una revisión de los métodos de análisis empleados, muestra que las diferencias entre los mismos están originadas principalmente en el modelo aerodinámico.

Los modelos aeroelásticos no lineales se pueden dividir en: (a) modelos de orden reducido basados en las ecuaciones de movimiento en su forma de espacio-estado no lineales, en donde la aerodinámica no lineal se incorpora a través de funciones de carga (ej.: las funciones de Wagner que son una aproximación de las de Theodorsen o el modelo de estado finito propuesto por Peters), algunos trabajos en esta área son [4], [5], [6], [7], y [8], en este último además se estudia la respuesta del sistema a ráfagas; y (b) modelos de orden reducido basados en métodos discretos, en esta área se puede citar el artículo [9] en donde se aplica el método de balance armónico y se incluyen solo los modos armónicos dominantes (esto es válido sobre la hipótesis del comportamiento armónico de las LCO).

Por otra parte en [10], se hace una comparación entre los métodos de balance armónico y el método de elementos espectrales donde se emplea la ventaja que brinda el método de elementos finitos en la discretización del dominio y en lugar de funciones de forma se emplea la descomposición espectral de frecuencias. Otros modelos de orden reducido están basados en los autovectores o “modos dominantes” del flujo, que surgen de un análisis previo en diferencias finitas o elementos finitos. A partir de estos autovectores se puede luego reconstruir el comportamiento dinámico no-lineal del fluido. A esta línea pertenecen los trabajos [11] y [12], más recientemente [13] y [14] muestran resultados obtenidos en régimen transónico a partir de las ecuaciones de Euler linealizadas.

En este trabajo se estudia el comportamiento no-lineal y las características de flutter de un sistema aeroelástico que presenta juego en uno de sus grados de libertad. Se ha desarrollado un modelo numérico de orden reducido de la versión aeroelástica de la conocida “sección típica”. Para simular el comportamiento aeroelástico del sistema, el ala se ha modelado estructural y aerodinámicamente como una placa plana rígida. El modelo estructural posee dos grados de libertad: el desplazamiento vertical y la rotación alrededor del eje elástico de la sección alar. Las cargas aerodinámicas se determinan empleando un método de red de vórtices inestacionario y no-lineal, que ha sido empleado con éxito en los trabajos [15], [16], y [17]. Las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema aeroelástico son integradas numéricamente e interactivamente en el dominio del tiempo.

El contenido de este trabajo se resume a continuación. La Sección 2 presenta un resumen del comportamiento de los sistemas aeroelásticos que muestran oscilaciones de ciclo límite. La Sección 3 introduce el modelo aeroelástico propuesto en este trabajo, primero se desarrollan los modelos estructural y aerodinámico no-lineal, y después se define el método de acoplamiento e integración en el tiempo. La Sección 4 presenta algunos de los resultados obtenidos y se los compara con otros trabajos. Por último la Sección 5 contiene un resumen de las conclusiones obtenidas.

2. AEROELASTICIDAD NO-LINEAL

Los trabajos [1] y [3] presentan una revisión de los fenómenos aeroelásticos en general, y en particular definen algunos conceptos básicos que resultan importantes en el momento de establecer los objetivos de un análisis aeroelástico no lineal. El primero sin duda está asociado con la distinción entre los fenómenos que son estática o dinámicamente no-lineales. En el área de la aeroelasticidad, el término sistema lineal suele asociarse a modelos (físicos o matemático) cuya respuesta ya sea estática o dinámica es lineal, o bien un modelo donde la respuesta estática es no-lineal, y la respuesta dinámica es lineal. Por ejemplo un modelo estructural es lineal si la deformación resulta (linealmente) proporcional a la carga, estática o dinámica, a la cual está sometido el modelo. Por otra parte un modelo aerodinámico es lineal cuando, por ejemplo, el cambio en la presión es (linealmente) proporcional al cambio en la dirección local de la corriente libre o en la magnitud de la velocidad, asociadas a la geometría del cuerpo inmerso en el fluido. Habitualmente este es el dominio de los modelos matemático basados en pequeñas perturbaciones. Por supuesto las ondas de choque y la separación de flujo no forman parte de los fenómenos lineales. Siguiendo estas definiciones, un sistema aeroelástico lineal es aquel compuesto por modelos estructural y aerodinámico del tipo lineal.

Existe un amplia variedad de efectos aeroelásticos no-lineales que pueden producir la aparición de LCOs en aviones de alto desempeño. Ignorar el comportamiento no-lineal de la estructura o la no-linealidad aerodinámica, puede llevar a predicciones incorrectas de estos fenómenos aeroelásticos. Debido a esto, el estudio de la aparición de LCOs y la variación en la amplitud de las mismas cuando cambia algún parámetro, hace necesario emplear modelos aeroelásticos dinámicamente no-lineales. Habitualmente no existe un mecanismo disparador simple que provoque la aparición de LCOs, a menos que se construya específicamente un modelo físico para su posterior ensayo en vuelo o en túnel de viento, que es precisamente lo que se estudia en este trabajo.

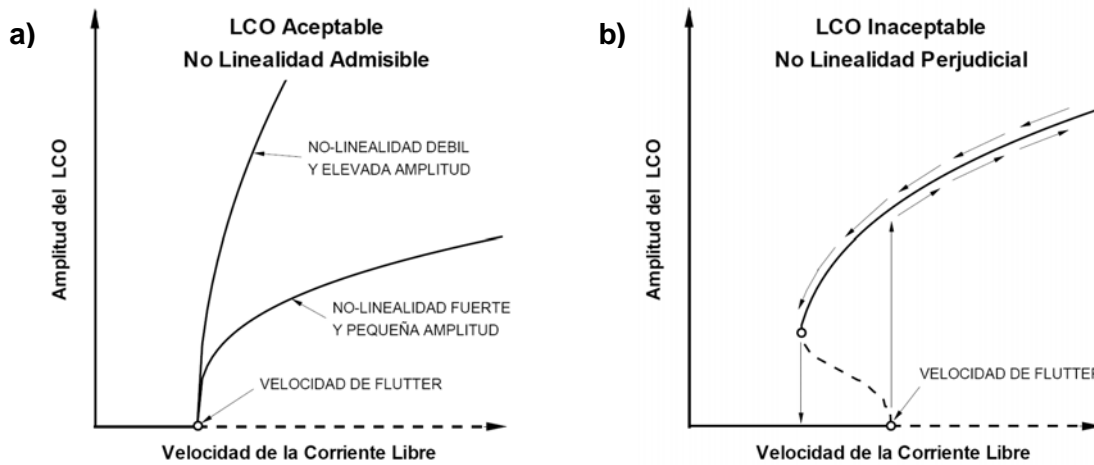


Figura 1: Respuesta de sistemas que presentan LCOs.
(a) No lineal con cambios suaves. (b) No lineal con cambios de abruptos de comportamiento.

La Figura 1 muestra las posibles evoluciones de la amplitud de las LCOs en función del cambio en la velocidad de la corriente libre. La Figura 1-a (bifurcación supercrítica), corresponde a un sistema aeroelástico que es estable frente a cualquier tipo de perturbaciones por debajo de la velocidad de flutter, velocidad que puede determinarse con un modelo aeroelástico lineal. Una vez superada la velocidad de flutter, un efecto no-lineal cualquiera puede provocar la aparición de LCOs cuya amplitud es mayor en la medida que aumenta la velocidad. En algunos casos, la existencia de las LCOs con este tipo de no-linealidad “benigna” es bien recibida, pues evita la aparición de oscilaciones con crecimiento abrupto (flutter violento) que son catastróficas para la estructura.

La Figura 1-b (bifurcación subcrítica) muestra otro caso general de comportamiento no-lineal de los sistemas aeroelásticos. En este caso además de la existencia de LCOs más allá de la velocidad de flutter, también se da la aparición de tres LCOs por debajo de la velocidad de flutter. Se observa también que existen posiciones estables (línea continua) y posiciones inestables (línea de trazos). Un ciclo límite resulta estable cuando frente a pequeñas perturbaciones, el sistema vuelve a la misma situación al cabo de un tiempo. Por el contrario los ciclos límites resultan inestables cuando, ante pequeñas perturbaciones, el ciclo límite se aleja del estado original convergiendo a un nuevo estado de equilibrio estable. Por ejemplo, si el sistema se encuentra en cualquier punto perteneciente a la línea de trazos, una pequeña perturbación haría que el mismo se moviera a algún de las posiciones definidas por las líneas continuas, ver Figura 1-b. Este tipo de no linealidad resulta “perjudicial”, porque la misma presenta un ciclo de histéresis, y en algunos casos para lograr la desaparición de las LCOs es necesario disminuir la velocidad muy por debajo de la velocidad de flutter.

El objetivo de este trabajo es cuantificar la amplitud y la frecuencia de las oscilaciones en función del cambio en la velocidad de la corriente libre, además de la incidencia del juego de la superficie de control en la aparición y comportamiento de las LCOs en la sección típica con alerón. Con este objetivo se ha desarrollado un modelo numérico capaz de simular el comportamiento del sistema ala/aire, componentes de un único sistema aeroelástico dinámico no-lineal. Las ecuaciones diferenciales que describen la evolución temporal del sistema aeroelástico se integran numéricamente, en forma interactiva y simultánea en el dominio del tiempo.

3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA AEROELÁSTICO

La simulación numérica del comportamiento estructural del ala se realizó empleando un modelo simplificado como el que se muestra en la Figura 2-a. El problema se ha estudiado a través del acoplamiento de dos subsistemas: un modelo estructural y un modelo aerodinámico, estos subsistemas forman un único sistema dinámico. El subsistema correspondiente al modelo estructural está formado por la sección típica, mientras que el subsistema aerodinámico lo constituye la corriente libre que incide sobre la sección típica.

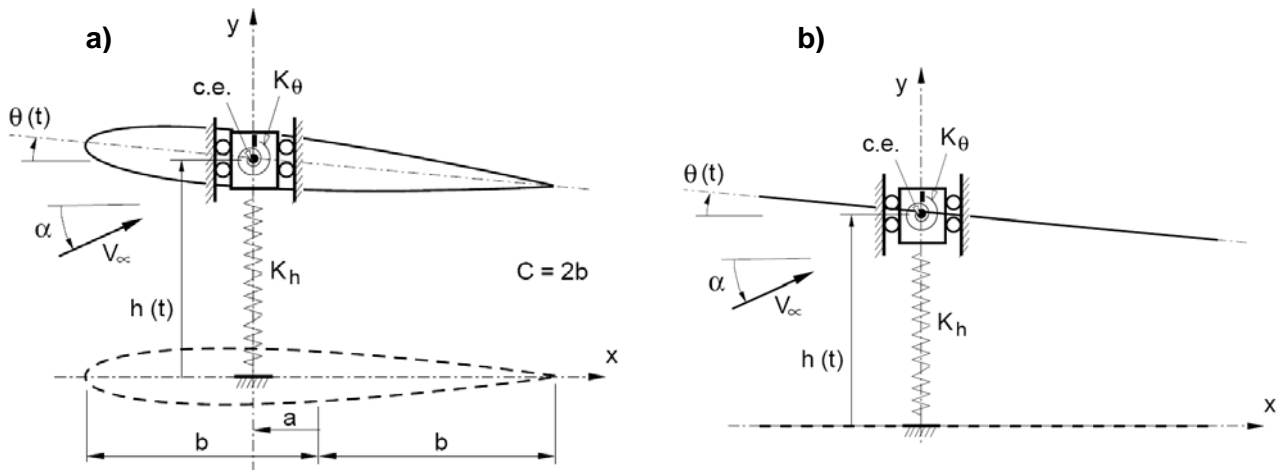


Figura 2: Esquemas de la sección típica.

(a) Modelo físico con dos grados de libertad. (b) Modelo estructural considerando la sección como placa plana.

El ala se ha considerado como un cuerpo de pequeño espesor de modo que puede modelarse, estructural y aerodinámicamente, como una placa rígida y uniforme. Como se observa en la Figura 2-a el sistema posee dos grados de libertad: un desplazamiento vertical (h) y un giro (θ) de la sección alrededor del centro elástico del ala (c.e.), asociados a la flexión y a la torsión del ala respectivamente. Por otra parte el flujo de aire, que define la corriente libre, se considera potencial con una velocidad en el infinito V_∞ y un ángulo de incidencia (o ángulo de ataque) sobre el conjunto definido por α .

Aerodinámicamente, el ala es modelada como una lámina vorticosa. Debido a que el flujo es inestacionario, hay vorticidad que se desprende desde el borde de fuga del ala y es convectada hacia el flujo de aire con la velocidad local de las partículas formando la estela. La vorticidad contenida en la porción de la estela cercana al ala tiene asociado un campo de velocidades que afecta las cargas aerodinámicas actuantes sobre la placa. Y dado que la vorticidad presente en la estela fue generada por la presencia de la placa un tiempo atrás, las cargas aerodinámicas actuales dependen, de alguna manera, de lo que sucedió en el pasado. Esto suele indicarse diciendo que el modelo aerodinámico, usado en este trabajo, tiene memoria. En simulaciones numéricas desarrolladas en este trabajo, la forma y posición de la estela, como así también la intensidad de la vorticidad contenida en ella son determinadas como parte de la solución.

En los apartados siguientes se describen en detalle los dos subsistemas asociados con el modelo estructural y el modelo aerodinámico; y además se presenta el esquema de acoplamiento e integración numérica de las ecuaciones de movimiento del sistema dinámico resultante.

3.1. Modelo Estructural

En este modelo estructural simplificado el comportamiento elástico del ala está representado por dos resortes: un resorte de acción lineal que se carga cuando el ala experimenta un desplazamiento vertical y que genera una fuerza restauradora que trata de llevar el centro elástico del ala a su posición de equilibrio, y un resorte de acción torsional que se carga cuando el ala cambia su orientación y que genera un momento que trata de devolver el ala a su posición horizontal. Por simplicidad se considera restringido el desplazamiento horizontal del ala, aunque no habría ningún inconveniente en adicionar ese nuevo grado de libertad al sistema.

La sección transversal del ala se modela como placa rígida y uniforme, y se presenta en forma esquemática en la Figura 2-b. Los grados de libertad utilizados para describir la configuración de este modelo son: el desplazamiento vertical del centro elástico $h(t)$, y el giro de la placa respecto de un eje que pasa por el centro elástico $\theta(t)$. El desplazamiento vertical se considera positivo hacia arriba y los giros se consideran positivos cuando tienen sentido horario. Las rigideces asociadas a los dos grados de libertad se indican mediante K_h y K_θ , respectivamente, las cuales modelan la rigidez flexional y torsional del ala.

Las ecuaciones no-lineales de movimiento se pueden obtener a partir de las ecuaciones de Lagrange. La energía cinética del ala, T , está dada por:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{h}^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 - S_w \cos \theta \dot{h} \dot{\theta} \quad (1)$$

donde m es la masa del ala y S_w , e I_0 son el momento estático másico y la inercia másica respecto del c.e. del ala. Se debe observar que en el caso de emplear las ecuaciones no lineales, algunos de estos parámetros másicos resultan ser funciones de la configuración del ala a través del ángulo θ (ej.: $S_\theta = S_w \cos \theta$).

La energía potencial, U , se puede escribir como:

$$U = \frac{1}{2} K_h h^2 + \frac{1}{2} K_\theta \theta^2 \quad (2)$$

siendo los coeficientes K_i las rigideces asociadas a los dos grados de libertad de la sección típica (indicados en la Figura 2-b).

Aplicando las ecuaciones de Lagrange a las ecuaciones (1) y (2), pueden obtenerse las ecuaciones de movimiento no-lineales del sistema estructural:

$$\begin{aligned} \left[m \frac{d^2 h}{dt^2} + S_\theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] + \left[S_T \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + K_h h &= Q_h \\ \left[S_\theta \frac{d^2 h}{dt^2} + I_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] + K_\theta \theta &= Q_\theta \end{aligned} \quad (3)$$

en la ecuación (3) se han separado explícitamente los términos asociados a la parte másica, de los términos de segundo orden que surgen como consecuencia de la no-linealidad de las ecuaciones de movimiento (donde el coeficiente $S_T = S_w \sin \theta$). En la ecuación (3) todas las propiedades másicas son específicas, y están dadas por unidad de longitud del ala.

Los términos independientes Q_i representan las fuerzas aerodinámicas generalizadas por unidad de longitud, y están dadas por las siguientes integrales:

$$Q_h = \left[\int^{C_w} \Delta p(\xi, t) d\xi \right] \cos \theta \quad \text{y} \quad Q_\theta = \int^{C_w} \Delta p(\xi, t) \xi d\xi \quad (4)$$

siendo C_w la cuerda del ala. Por otra parte, Δp es la diferencia entre las presiones en la cara superior y la cara inferior de la placa plana que modela el ala. La variable de integración ξ , representa la posición de los puntos sobre el ala relativos al centro elástico. La diferencia entre las presiones en la cara superior e inferior del ala, Δp , se obtiene del modelo aerodinámico.

En el modelo de análisis propuesto en este trabajo, las ecuaciones (3) y (4) se combinan con las correspondientes al modelo aerodinámico para luego integrarlas simultánea e interactivamente y obtener $h(t)$ y $\theta(t)$. La diferencia de presiones, Δp , depende explícitamente de h , θ , \dot{h} y $\dot{\theta}$, e implícitamente de \ddot{h} y $\ddot{\theta}$.

3.2. Modelo Aerodinámico

En el modelo aerodinámico propuesto, las cargas aerodinámicas no-lineales y no-estacionarias sobre la placa se obtienen empleando el método de red de vórtices inestacionario (UVLM) ([15] y [16]). La placa plana es una lámina vorticosa, e introduce una discontinuidad en la componente tangencial de la velocidad del fluido. La discontinuidad en la componente tangencial de la velocidad del fluido, junto con la variación temporal del potencial de velocidades, producen una diferencia entre las presiones en las caras superior e inferior de la placa plana que representa el ala. Esta diferencia de presiones es la responsable de las cargas aerodinámicas que actúa sobre el ala.

A los fines de que la diferencia de presiones en el borde de fuga sea nula, el efecto de la discontinuidad en la componente tangencial de la velocidad del fluido debe cancelar exactamente el efecto producido por la

variación temporal del potencial de velocidades. Es decir, la discontinuidad en la componente tangencial de la velocidad (vorticidad) persiste hasta, inclusive, el borde de fuga. Y en consecuencia se emite vorticidad desde el borde de fuga hacia el fluido, la cual es transportada con la velocidad local de las partículas para formar las estelas.

Cualquiera sea su ubicación, un vórtice tiene asociado un campo de velocidades que es irrotacional con excepción del punto donde el vórtice está ubicado. El campo de velocidades asociado a la vorticidad interactúa con el campo de velocidades asociado a la corriente libre, satisfaciendo la condición de no-penetración sobre la placa. Por lo tanto la vorticidad contenida en la estela modifica el campo de velocidades próximo a la placa y, por ende, la vorticidad sobre la misma. Dado que la vorticidad existente en la estela fue generada por, y conveccionada desde, la placa un tiempo atrás, el campo de velocidades es dependiente de la historia del movimiento.

En el caso de flujo uniforme y estacionario, el valor exacto de la fuerza y el momento aerodinámico que actúan sobre una placa plana pueden obtenerse considerando que: (a) toda la vorticidad está concentrada en un único vórtice ubicado a una distancia de un cuarto de la cuerda, medida desde el borde de ataque, y (b) la circulación de este vórtice debe ajustarse de tal manera que se satisfaga la condición de no-penetración en un único punto del sólido ubicado a una distancia de tres cuartos de la cuerda, también medida desde el borde de ataque. El punto del sólido donde se impone la condición de no-penetración se denomina punto de control.

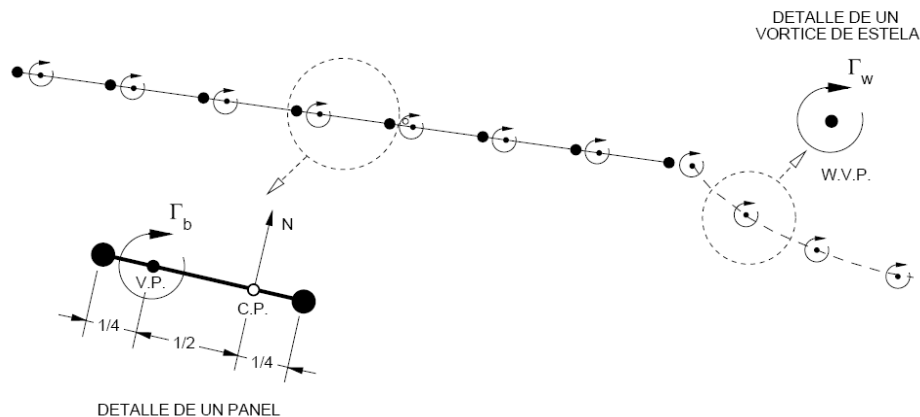


Figura 3: Modelo de análisis aerodinámico basado en la red de vórtices no-lineal e inestacionaria.

En la presente formulación, la placa es dividida en un número finito de elementos o paneles. El tamaño de cada panel debe ser suficientemente pequeño de manera que el flujo dentro de él pueda aproximarse como flujo uniforme. Además, los cambios temporales deben ocurrir en una escala que sea "lenta" en comparación con el tiempo que le toma a una partícula de fluido recorrer la longitud de un panel. La disposición de los paneles en la placa plana puede verse en la Figura 3. En la misma figura puede observarse, también, un panel típico y el modelo de vórtices discretos utilizado para modelar las estelas.

La velocidad en un punto de coordenadas $\underline{x}_p = (x_p, y_p)$, asociada a un vórtice discreto con circulación Γ , ubicado en un punto con coordenadas $\underline{x}_v = (x_v, y_v)$, está dada por:

$$u(\underline{x}_p, t) \hat{i} + v(\underline{x}_p, t) \hat{j} = \frac{\Gamma(t)}{2\pi} \frac{\underline{x}_p - \underline{x}_v}{|\underline{x}_p - \underline{x}_v|} \quad (5)$$

La condición de no-penetración que debe cumplirse en los puntos de control tiene la forma:

$$(\underline{V}_p + \underline{V}_\infty + \underline{V}_w - \underline{V}_s) \cdot \hat{n} = 0 \quad (6)$$

donde, $\underline{V}_p + \underline{V}_\infty + \underline{V}_w$ representa la velocidad de una partícula de fluido próxima a una placa, asociada a: los vórtices adheridos a la placa, la corriente libre y los vórtices contenidos en la estela, respectivamente. Por otra parte, \underline{V}_s es la velocidad con que se mueve la superficie de la placa y \hat{n} es el vector unitario normal a

esta superficie. En los puntos de control de la placa que representa el ala se tiene:

$$\underline{V}_\infty \cdot \hat{n} = |\underline{V}_\infty| \cos(\alpha + \theta) \quad \underline{V}_s \cdot \hat{n} = \dot{h} \cos \theta + \xi_i \dot{\theta} \quad \underline{V}_w \cdot \hat{n} = (u_w)_i \sin \theta + (v_w)_i \cos \theta \quad (7)$$

donde, ξ_i es la posición del punto de control del panel 'i' con respecto al sistema de coordenadas local ligado al ala con origen en el centro elástico; y $(u_w)_i$ y $(v_w)_i$ son las componentes, expresadas en el sistema de coordenadas globales, de la velocidad total de una partícula de fluido sobre el punto de control 'i' inducida por la estela.

Las incógnitas de este problema son las circulaciones de los vórtices adheridos a la placa y pueden obtenerse a partir de la ecuación (6) como se indica a continuación:

$$(\underline{V}_p \cdot \hat{n})_i = \sum_{j=1}^{NN} A_{ij} \Gamma_j = (\underline{V}_s - \underline{V}_\infty - \underline{V}_w)_i \cdot \hat{n}_i \quad (8)$$

donde los escalares A_{ij} , conocidos como coeficientes de influencia aerodinámica, representan la componente normal de la velocidad en el punto de control del panel 'i', asociada a un vórtice de circulación unitaria ($\Gamma = 1$) ubicado en el panel 'j'. El límite superior del rango 'j' de la sumatoria es $NN = NP+1$, donde NP representa el número de paneles utilizados en la discretización del ala.

Además de las ecuaciones provenientes de la condición de no-penetración sobre el ala, existe una ecuación adicional que garantiza la conservación de la vorticidad y permite definir la magnitud del vórtice de arranque en el borde de fuga del ala. Esta última ecuación es necesaria para satisfacer el requerimiento de Δp nulo en el borde de fuga (denominada habitualmente como condición de Kutta). En cada paso de tiempo, un nuevo vórtice de arranque junto al resto de los vórtices discretos contenidos en la estela, son convectados empleando la velocidad de la partículas de fluido ubicadas donde cada uno de estos vórtices. De esta manera, como se estableció previamente, el desarrollo de la estela durante la simulación es parte de la solución del problema.

Las cargas aerodinámicas son calculadas aproximando las integrales dadas en las ecuaciones (4) mediante sumas finitas. La diferencia de presión entre las caras de cada panel se obtiene a partir de la versión no-estacionaria de la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\underline{V} \cdot \underline{V}}{2} + \frac{p}{\rho} = H(t) \quad (9)$$

donde ϕ es la función potencial de velocidades, p es la presión estática y ρ es la densidad. Lejos de la sección alar y su estela, las condiciones se asumen como estacionarias de tal manera que:

$$H(t) = \frac{V_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} = \text{cte} \quad (10)$$

Siguiendo la metodología propuesta en [15] y [16], la diferencia del coeficiente de presión, ΔCp_i , entre las caras del panel "i" en su punto de control puede calcularse como:

$$\Delta Cp_i = \frac{\Delta p_i}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} = \frac{2}{V_\infty^2} \left[\sum_{j=1}^i \frac{\Gamma_j(t) - \Gamma_j(t - \Delta t)}{\Delta t} + \frac{\Gamma_i (\underline{V}_m - \underline{V}_s) \cdot \hat{t}}{\Delta \xi_i} \right] \quad (11)$$

siendo $\underline{V}_m = \frac{1}{2} (\underline{V}_p + \underline{V}_\infty + \underline{V}_w)$, y además:

$$\underline{V}_s \cdot \hat{t} = -\dot{h} \sin \theta \quad (12)$$

Las fuerzas aerodinámicas generalizadas, dadas por las ecuaciones (4), pueden ahora reescribirse como:

$$Q_h = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \left[\left(\sum_{i=1}^{NP} \Delta Cp_i \Delta \xi_i \right) \cos \theta \right] \quad \text{y} \quad Q_\theta = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \left[\sum_{i=1}^{NP} \Delta Cp_i \Delta \xi_i \xi_i \right] \quad (13)$$

donde ξ_i representa el brazo de palanca para el momento realizado por la diferencia de presión ΔCp_i en los puntos de control 'i' del ala.

3.3. Integración de las ecuaciones de movimiento del sistema dinámico no-lineal

Antes de proceder con la integración numérica de las ecuaciones de movimiento, resulta conveniente introducir las siguientes variables adimensionales:

$$h = L_c h^*, \quad \theta = \theta^*, \quad \xi = L_c \xi^*, \quad t = \frac{L_c}{V_\infty} t^* \quad (14)$$

donde (*) denota magnitudes adimensionales y $L_c = 2b$ es la cuerda del ala (ver Figura 2). Reemplazando estas magnitudes en las ecuaciones (3) e introduciendo el vector, $\underline{r} = \{h(t), \theta(t)\}^T$, las ecuaciones de movimiento no-lineales pueden reescribirse:

$$[\bar{M}(\underline{r})] \ddot{\underline{r}} + [\bar{K}(\underline{r})] \underline{r} = \bar{q}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}) - \bar{b}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}) \quad (15)$$

siendo \bar{M} , \bar{K} , \bar{q} y \bar{b} la matriz de masa, la matriz de rigidez, el vector de cargas generalizadas y el vector de términos no-lineales, respectivamente. Estos términos se definen en las ecuaciones (16) y (17).

$$\bar{M}(\underline{r}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{S_0^*}{m^* L_c} \\ \frac{S_0^* L_c}{I_0^*} & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \bar{K}(\underline{r}) = \begin{bmatrix} \frac{K_h^* L_c^2}{m^* V_\infty^2} & 0 \\ 0 & \frac{c_\theta K_\theta^* L_c^2}{I_0^* V_\infty^2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\bar{q}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}) = \begin{pmatrix} \frac{\rho L_c^2}{2m^*} \left(\sum_{i=1}^{NP} \Delta C_{p_i} \Delta \xi_i \right) \cos \theta \\ -\frac{\rho L_c^4}{2I_0^*} \sum_{i=1}^{NP} \Delta C_{p_i} \Delta \xi_i \xi_i \end{pmatrix} \quad y \quad \bar{b}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}) = \begin{pmatrix} \frac{S_T^*}{m^* L_c} \dot{\theta}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Introduciendo el vector de estado $\underline{y} = \{\underline{r}, \dot{\underline{r}}\}^T = \{h, \theta, \dot{h}, \dot{\theta}\}^T$, el sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden (15) puede ser escrito como un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & [\bar{M}(\underline{r})] \end{bmatrix} \dot{\underline{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{1}_{2 \times 2} \\ -[\bar{K}(\underline{r})] & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \underline{y} + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ -\bar{m}(\theta) + \bar{q}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}) - \bar{b}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}) \end{pmatrix} \quad (18)$$

debe notarse que, cuando el sistema es no-lineal en θ el coeficiente c_θ en la ecuación (16) se hace nulo y aparece un término $\bar{m}(\theta)$ que se define como:

$$\bar{m}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K_\theta^* L_c^2}{I_0^* V_\infty^2} f(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{K}_\theta \bar{\theta} \end{pmatrix} \quad (19)$$

donde $f(\theta)$ es la función que define el comportamiento del resorte cuando el mismo es no-lineal. El sistema de ecuaciones (18), puede reescribirse de manera simple:

$$[A] \dot{\underline{y}} = [B] \underline{y} + \underline{c} \quad (20)$$

Esta ecuación se integra numéricamente en el dominio del tiempo mediante un esquema predictor-corrector de cuarto orden. En cada paso de integración, la estela se convecta a su nueva posición garantizando que las partículas de fluido transportan la vorticidad, y al mismo tiempo la placa se mueve a una nueva posición según las ecuaciones de movimiento. Los detalles del método de integración pueden encontrarse en [16].

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

El objetivo de este apartado es determinar el comportamiento del modelo aeroelástico no-lineal, frente a dos casos: (a) una ley cúbica en la rigidez asociada al grado de libertad de torsión, y (b) una ley bi-lineal con juego (*freeplay*), tal como se observa en la Figura 4. En este trabajo el comportamiento de la rigidez flexional se mantiene lineal.

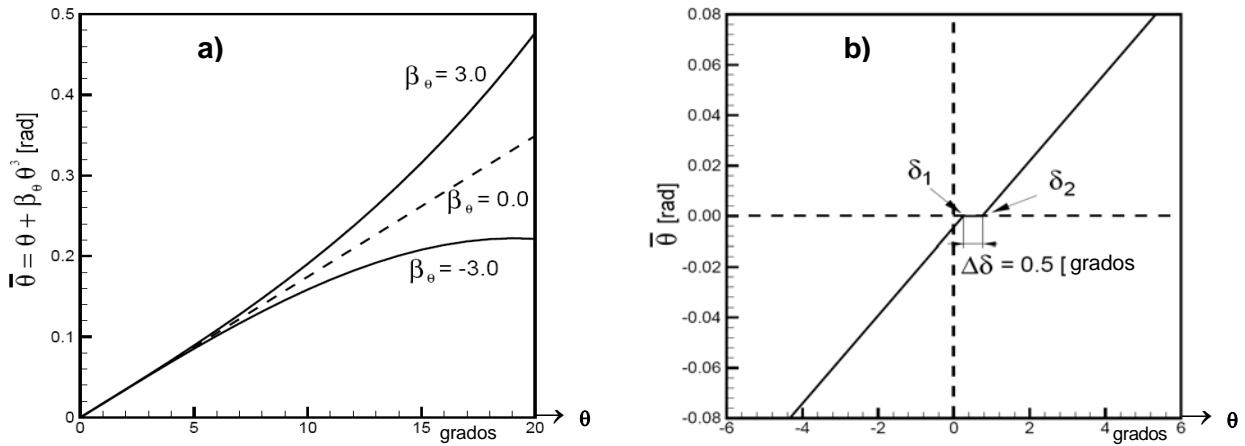


Figura 4: Respuesta del resorte en la rigidez torsional del modelo aeroelástico. (a) Cúbico. (b) Freeplay.

Los parámetros de análisis han sido elegidos para obtener un problema equivalente al estudiado en [18], y estos son $C = 0.254$ m, $a = -0.5 C$, $\omega_h = 7.7229$ 1/s, $\omega_\theta = 38.6147$ 1/s, $m = 6.211$ kg/m, $I_w = 0.0250$ kg-m²/m y $S_w = 0.1972$ kg-m/m. Para el caso no-lineal cúbico se ha adoptado un coeficiente $\beta_\theta = 3.0$, mientras que en el caso de *freeplay* se ha adoptado un juego $\Delta\delta = 0.5$ grados (iniciando en $\delta_1 = 0.25$ grados hasta un $\delta_2 = 0.75$ grados, lo cual se pone de manifiesto en la Figura 4. Se ha resuelto el sistema dinámico lineal con los parámetros indicados, a fin de obtener la velocidad de flutter del sistema lineal la cual es $V_f = 31.8$ m/s.

4.1. Resultados del caso (a) – Cúbico

En este caso la función de respuesta del resorte obedece a la siguiente ley $\bar{m}(\theta) = \bar{K}_\theta \bar{\theta} = \bar{K}_\theta (\theta + 3\theta^3)$, ver Figura 4-a. La Figura 5-a muestra el diagrama de bifurcaciones obtenido en este trabajo y se lo compara con los resultados presentados en [18]. En abscisas se tienen velocidades adimensionalizadas respecto de la velocidad de flutter lineal y en ordenadas la mitad de la amplitud de los LCOs desarrollados. Existe una buena concordancia en los resultados presentados en [18], en particular a velocidades cercanas a las de flutter. En la medida que la velocidad aumenta y en consecuencia la amplitud de los LCOs aumenta, surgen discrepancias provenientes de los diferentes modelos aerodinámicos empleados en [18] y en este trabajo.

4.2. Resultados de caso (b) – Freeplay

Para este caso, la respuesta del resorte de torsión está dada por una función bi-lineal del tipo:

$$\bar{m}(\theta) = \bar{K}_\theta \bar{\theta} = \begin{cases} 0 & 0 \rightarrow \delta_1 \leq \theta \leq \delta_2 \\ \bar{K}_\theta (\theta - \delta_i) & \theta \leq \delta_1 \text{ ó } \theta \geq \delta_2 \end{cases} \quad (21)$$

Esta se muestra en la Figura 4-b. Los resultados obtenidos, son los mostrados en la Figura 5-b.

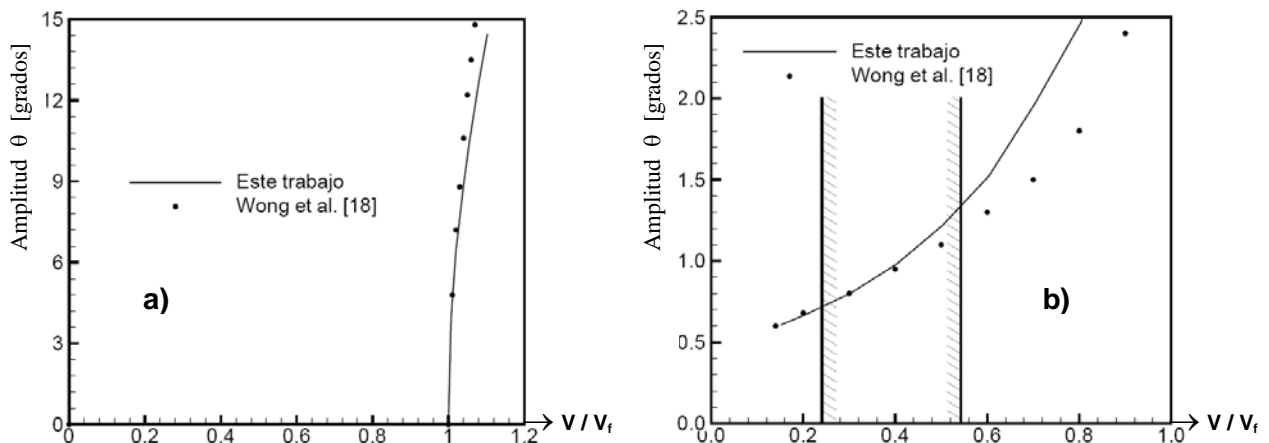


Figura 5: Respuesta del sistema dinámico completamente no-lineal. (a) Cúbico. (b) Freeplay.

Al igual que en el caso anterior, se han graficado amplitud de las oscilaciones en torsión respecto de la velocidad adimensionalizada. En este caso existen discrepancias a velocidades cercanas a flutter cuando se lo compara con [18]. Sin embargo dada la naturaleza altamente no-lineal de este caso, y el modelo aerodinámico no-lineal e inestacionario empleado en este trabajo, estas diferencias son previsibles.

En la Figura 6 se ha graficado la evolución temporal de $h(t)$ y $\theta(t)$ correspondiente a una corrida de 400 seg (32000 pasos), para una velocidad de la corriente libre de: (a-b) 6.4 m/s, (c-d) 16 m/s, y (e-f) 22.4 m/s. Las velocidades corresponden a cada una de las tres zonas delimitadas en la Figura 5-b. A velocidades muy bajas ($V/V_f = 0.2$) el comportamiento es un LCO armónico simple (ver Figura 6-b) y a velocidades más próximas a la de flutter ($V/V_f = 0.7$) se puede observar un comportamiento armónico más complejo (Figura 6-f).

En la Figura 5-b dentro de la zona delimitada por el sombreado, alternan estados con LCOs armónicos complejos y a algunas velocidades se observa un comportamiento caótico. La Figura 6-d ($V/V_f = 0.5$) muestra un caso donde aparentemente se desarrolla una LCO, sin embargo si se observa con detenimiento se puede ver que las oscilaciones no dejan de crecer, esto es, no logran desarrollarse LCOs.

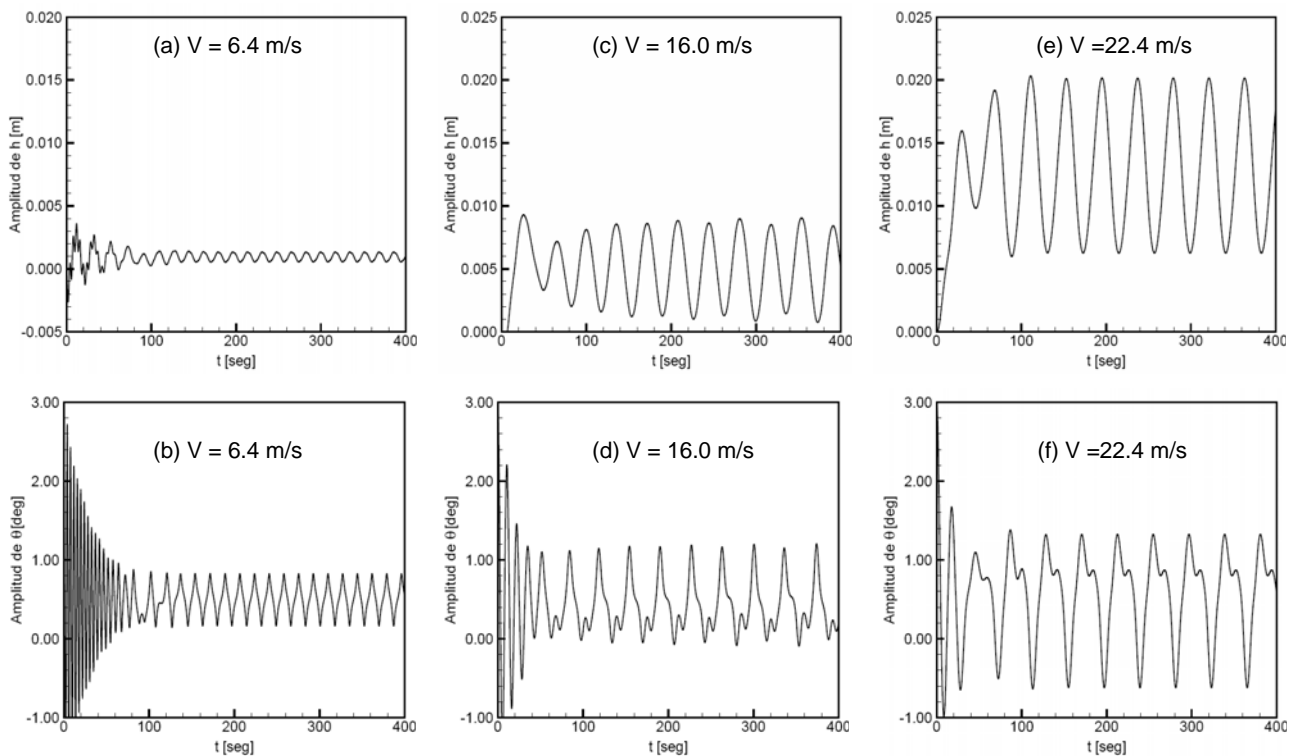


Figura 6: Respuesta del sistema con juego en el grado de libertad torsional para distintas velocidades.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un modelo que permite analizar problemas no-lineales asociados a fenómenos aeroelásticos. El modelo desarrollado ha demostrado ser muy efectivo para el estudio de problemas altamente no-lineales, e inclusive en la predicción de dinámica del tipo caótica. Comparativamente con el modelo empleado en [18], este modelo muestra la enorme ventaja de que no es necesario disminuir el paso de tiempo (en la integración de las ecuaciones del sistema dinámico) para captar correctamente los cambios abruptos en la rigidez de los resortes. Estos cambios abruptos en la rigidez, son los que precisamente suceden en las superficies de control cuando presentan el fenómeno denominado “juego” o *freeplay*.

Además, el hecho de emplear un modelo aerodinámico inestacionario y no-lineal, permite definir de manera más precisa el acoplamiento aerodinámico-estructural del sistema. Esto trae aparejado una mejor correlación entre el modelo matemático y los resultados experimentales.

A partir de estos resultados se pretende ahora estudiar un caso de tres grados de libertad, el cual está asociado al problema de las aeronaves que presentan juego en las superficies de comando. Para este nuevo problema existen soluciones experimentales y es lo que empleará para la verificación completa del modelo matemático presentado en este trabajo.

6. REFERENCIAS

- [1] B. Lee, S. Price, and Y. Wong, Nonlinear aeroelastic analysis of airfoils: bifurcation and chaos. *Progress in Aerospace Sciences*, 35:205-334, 1999.
- [2] E.H. Dowell and D. Tang, Nonlinear aeroelasticity and unsteady aerodynamics. *AIAA Journal*, 40(9):1697-1707, 2002.
- [3] E.H. Dowell, J. Edwards, and T. Stragnac, Nonlinear aeroelasticity. *Journal of Aircraft*, 40(5):857-874, 2003.
- [4] M.D. Conner, D.M. Tang, E.H. Dowell and L.N. Virgin, Nonlinear behavior of a typical airfoil section with control surface freeplay: One numerical and experimental study. *Journal of Fluids and Structures*, 11(1):89-109, 1997.
- [5] M. Conner, Nonlinear aeroelasticity of an Airfoil Section with Control Surface Freeplay. *Ph.D. Dissertation, Dept. of Mechanical Engineering and Material Science, Duke Univ., Durham, NC*, 1996.
- [6] D.M. Tang, C.D. Conner, and E.H. Dowell, Reduced-order aerodynamic model and its application to a nonlinear aeroelastic system. *Journal of Aircraft*, 35(2):332-338, 1998.
- [7] D.M. Tang, E.H. Dowell and L.N. Virgin, Limit cycle behavior of an airfoil with a control surface. *Journal of Fluids and Structures*, 12(7):839-858, 1998.
- [8] D.M. Tang, D. Kholodar and E.H. Dowell, Nonlinear response of airfoil section with control surface freeplay to gust loads. *AIAA Journal*, 38(9):1543-1557, 2000.
- [9] L. Liu and E.H. Dowell, Harmonic balance approach for an airfoil with a freeplay control surface. *AIAA Journal*, 43(4):802-815, 2005.
- [10] A.K. Gopinath, P.S. Berany and A. Jameson, *Comparative Analysis of Computational Methods for Limit-Cycle Oscillations. 47th AIAA Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Newport, R.I.*, 2006.
- [11] E.H. Dowell, K.C. Hal, J.P. Thomas, R. Florea, B.I. Epureneanu and J. Heeg, Reduced order models in unsteady aerodynamics. *AIAA Journal*, 26(1):622-637, 1999.
- [12] B.I. Epureanu and E.H. Dowell, Compact methodology for computing limit-cycle oscillations in aeroelasticity. *Journal of Aircraft*, 40(5):955-963, 2003.
- [13] P. Beran, D. Lucia and C. Pettit, Reduced-order modeling of limit-cycle oscillation for aeroelastic systems. *Journal of Fluids and Structures*, 19, 575-590, 2004.
- [14] D. Jones, I. Roberts and A. Gaitonde, Identification of limit cycles for piecewise nonlinear aeroelastic systems. *Journal of Fluids and Structures*, 23:1012-1028, 2007.
- [15] S. Preidikman and D.T. Mook, A new method for actively suppressing flutter of suspension bridges. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 69(71):955-974, 1997.
- [16] S. Preidikman, Numerical Simulations of Interactions among Aerodynamics, Structural Dynamics and Control Systems. Ph.D. Thesis, Department of Engineering Science and Mechanics, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1998.
- [17] W.B. Castelló, S. Preidikman y J.C. Massa, Simulaciones numéricas de buffeting en puentes arriostrados causado por flujos vorticosos 2-d. *Mecánica Computacional*, 22:718-732, 2003.
- [18] Y.S. Wong, L. Liu and B.H.K. Lee, *Frequency and amplitude prediction of limit cycle oscillations of an airfoil containing concentrated structural nonlinearities. 42nd AIAA Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. Seattle, W.A.*, 2001.