



II CAIM 2010  
Segundo Congreso Argentino  
de Ingeniería Mecánica  
San Juan - Noviembre 2010

## GEOMETRÍA MÉTRICA GAUSSIANA DE LOS FLANCOS ACTIVOS

Eitel Hernani Lauría<sup>1</sup>, Javier Antezana López<sup>\*2</sup>

<sup>1</sup>FoDAMI Socio Honorario

[eitel.lauria@gmail.com](mailto:eitel.lauria@gmail.com)

Av. Almirante Brown 2498 – Lomas de Zamora, Prov. Buenos Aires

<sup>2</sup>Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Haedo

Paris 534 – Haedo Prov. Buenos Aires

[antezana@gmail.com](mailto:antezana@gmail.com)

### RESUMEN

El flanco activo de los dientes es un helicoides reglado cuya sección con un plano perpendicular al eje helicoides es una evolvente o desarrollante de círculo. En el presente trabajo se realiza un estudio riguroso de la geometría métrica del helicoides utilizando un sistema de coordenadas superficiales de Gauss y se adoptan con tal finalidad las dos familias de líneas ortogonales siguientes: la familia de las generatrices rectas del helicoides y la de las evolventes obtenidas por las intersecciones del helicoides con los planos perpendiculares al eje de la rueda. En consecuencia, la posición de un punto cualquiera de la superficie del flanco del diente está determinada por la coordenada  $\epsilon$ , sin dimensiones, y por la coordenada Z de dirección paralela al eje de la rueda. Los valores extremos de la coordenada  $\epsilon$  son cero (0) y la relación de contacto total  $\epsilon\gamma$  y de la coordenada Z los valores  $(b/2)$  y  $(-b/2)$ , donde b es el ancho de la rueda medido en la dirección del eje.

En lo que concierne a la presentación del trabajo, se emplea, según el caso, la formulación vectorial o las expresiones cartesianas de la geometría diferencial. Por otra parte, el estudio se realiza partiendo de las ecuaciones paramétricas del helicoides. [2]

Teniendo en cuenta todos estos elementos, en el trabajo se exponen: 1) la representación vectorial paramétrica del helicoides; 2) las ecuaciones vectoriales paramétricas de las líneas propias del helicoides: las rectas, las evolventes y las hélices cilíndricas; 3) la primera forma cuadrática fundamental de la métrica superficial de Gauss; 4) el cálculo de los diferenciales de las líneas generatrices, las evolventes y las hélices; 5) las ecuaciones de los vectores unitarios tangentes a las curvas antes citadas, y sus componentes cartesianas; 6) la ecuación del vector normal unitario y de sus cosenos directores en un punto cualquiera del flanco activo.

### Palabras Claves:

Helicoides reglado. Coordenadas superficiales de Gauss. Curvas en flanco de diente

## 1. INTRODUCCIÓN

En un mecanismo de engranajes paralelos exteriores con dentado helicoidal, el flanco activo de los dientes es un helicoide reglado a desarrollante de círculo [4] y [5].

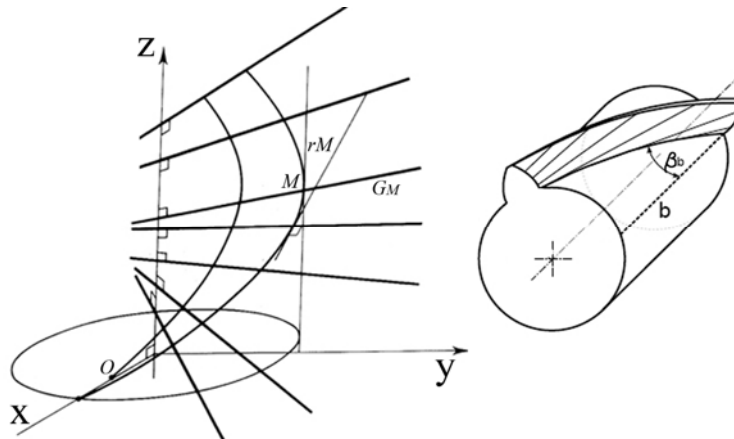


Figura 1 Helicoide Reglado

Se realiza en el trabajo el estudio analítico de la geometría métrica del helicoide utilizando coordenadas superficiales de Gauss.

El estudio se realiza a partir de las ecuaciones cartesianas paramétricas del helicoide deducidas por el Ing. Lauria y publicadas en el Boletín Nro 113 (Mayo de 1997 IET Instituto de los Engranajes y Transmisiones de Francia). Toda referencia a esta publicación se indica en el texto con ([2], Pag...).

Se utilizan en el trabajo las convenciones y los datos Geométricos de base empleados en la publicación arriba citada. Por otra parte, en el ANEXO al trabajo se exponen los símbolos, los factores de cálculo y los elementos del mecanismo necesarios para el desarrollo del estudio.

Con el objeto de no prolongar el texto se trabaja solamente con la rueda 1 (piñón) del mecanismo. Para la rueda 2 se puede realizar un estudio análogo. Se debe señalar que las ecuaciones deducidas son aplicables al caso general de los engranajes con diente corregidos.

## 2. Flanco Activo del diente

### 2.1. Sistemas de coordinas curvilíneas.

El flanco de los dientes es un sector de helicoide a desarrollante de círculo denominado H1 (figura 2), sobre el cual dos familias de curvas ortogonales entre si pueden ser definidas, a saber: a) *Familia de las generatrices rectas*; b) *Familia de las desarrollantes de círculo*.

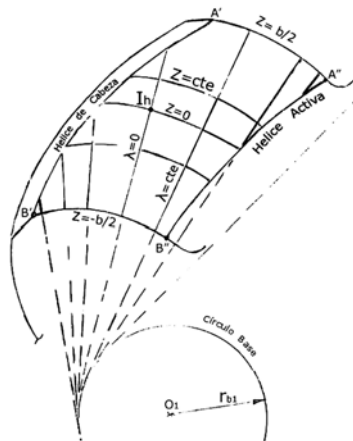


Figura 2 Coordenadas Curvilíneas

La coordenada sin dimensiones  $\epsilon$  determina la posición de cada generatriz, siendo sus valores extremos 0 y  $\epsilon\gamma$  (relación total de contacto). En cuanto a la posición de cada desarrollante (evolvente de círculo), está determinada por la coordenada  $Z$ , medida en el sentido del eje de la rueda. Los valores extremos de  $Z$  son  $(b/2)$  y  $(-b/2)$ , siendo  $Z=0$  el valor que determina la posición de la evolvente correspondiente a la sección media de la rueda. Se puede igualmente decidir la posición de una generatriz por el parámetro angular  $\lambda_1$ , relacionado linealmente con  $\epsilon$  mediante la expresión ([2], Pag 95)

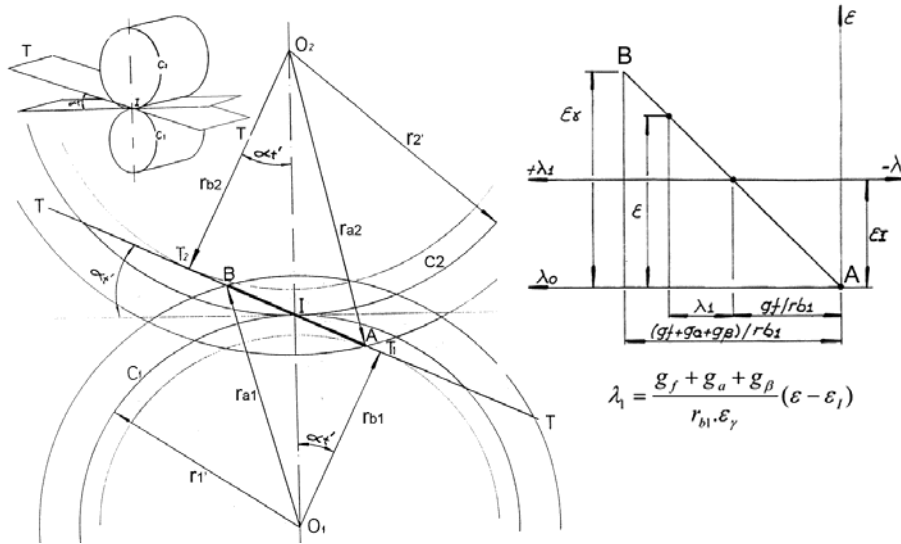


Figura 3 Plano de Acción

Donde  $\epsilon_1$  es un valor particular de  $\epsilon$  que será definido mas adelante. En el trabajo se emplea una u otra coordenada  $\epsilon$  o  $\lambda_1$ , según convenga a la mayor simplificación de las expresiones matemáticas. El conjunto de las dos familias de curvas constituye un sistema de coordenadas curvilíneas que se utiliza como sistemas de referencias para el estudio geométrico de H1, como una geometría de Gauss.

Sobre la superficie H1 puede definirse una tercera familia de curvas: Las hélices cilíndricas. Ellas tienen todas el mismo paso y la posición de cada curva está determinada por un radio  $r_j$  tal que

$$r_{j'} \leq r_j \leq r_{j''} \quad (1)$$

El flanco activo está limitado por dos desarrollantes o evolvente laterales, separadas por la distancia  $b$  medida en el sentido del eje de la rueda ( $Z$ ) y por dos hélices, la hélice de cabeza y la hélice activa inicial (figura 4).

Sobre la superficie H1 se determina el punto  $I_h$  por la intersección de la hélice primitiva de  $r_1$  y la desarrollante media (evolvente media)  $Z=0$ .

## 2.2. Sistemas de Ejes $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ .

Es un sistema de ejes cartesianos ortogonales, derecho o anti horario, fijo a la rueda 1, donde el centro  $O_1$  está situado sobre el eje de rotación de la rueda, en el punto medio de su ancho  $b$ . En cuanto a los ejes: a) el eje  $O_1 Z_1$  coincide con el eje de rotación; b) el eje  $O_1 X_1$  pasa por el punto  $I_h$  del helicoides H1.

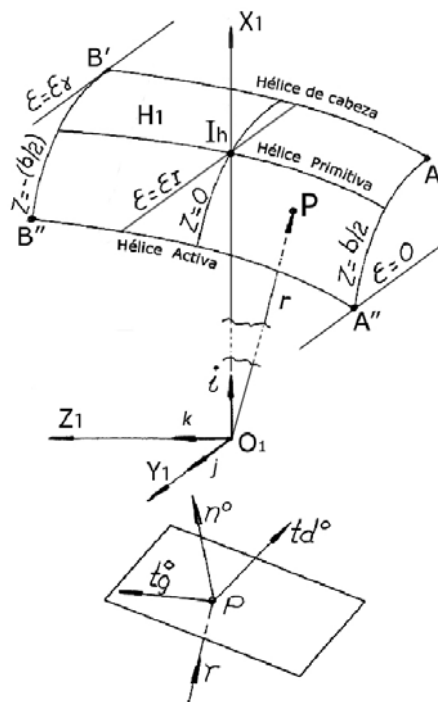


Figura 4 Flanco Activo

### 2.3. Ecuaciones cartesianas paramétrica del helicoides.

Con relación a este sistemas de ejes y teniendo en cuenta que los dientes de la rueda1 son de hélice derecha, las ecuaciones cartesianas paramétricas de H1 son ([2], Pag 94)

$$X1=Qxz.Z + Qx\varepsilon.\varepsilon+ Qx \quad Y1=Qyz.Z + Qy\varepsilon.\varepsilon+ Qy \quad Z1=Z \quad (2)$$

Donde

$$\begin{aligned} Qxz &= K1.\cos\lambda_1 + K2 \sin\lambda_1 \\ Qx\varepsilon &= K3.\cos\lambda_1 + K4 \sin\lambda_1 \\ Qx &= r'1.\cos\lambda_1 + K5 \cos\lambda_1 + K6.\sin\lambda_1 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} Qyz &= K2.\cos\lambda_1 - K1 \sin\lambda_1 \\ Qy\varepsilon &= K4.\cos\lambda_1 - K3 \sin\lambda_1 \\ Qy &= -r'1.\sin\lambda_1 - K5 \sin\lambda_1 + K6.\cos\lambda_1 \end{aligned} \quad (4)$$

Y finalmente

$$\begin{aligned} K1 &= \operatorname{tg}\beta_b.\sin\alpha't & K2 &= \operatorname{tg}\beta_b.\cos\alpha't \\ K3 &= \sin\alpha't.\operatorname{Je} & K4 &= \cos\alpha't.\operatorname{Je} \\ K5 &= -\sin\alpha't.\operatorname{Jy} & K6 &= -\cos\alpha't.\operatorname{Jy} \end{aligned} \quad (5)$$

### 2.4. Puntos particulares del flanco activo.

Algunos puntos sobre H1 tiene una significación especial y sus coordenadas curvilíneas son las siguientes ([2] Pag. 91 y 95):

Punto lh

$$Z = 0 \quad \varepsilon = \varepsilon_l = \phi \frac{\cos\beta_b}{\cos\alpha'n} + \frac{\varepsilon\beta}{2} \quad \lambda_1 = 0 \quad (6)$$

Punto A'' (punto inicial de contacto, Ver Figura 4)

$$Z = \frac{b}{2} \quad \varepsilon = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_{1f} = -\frac{g_f + g_a + g_\beta}{r_{b1}.\varepsilon_\gamma} \varepsilon_l \quad (7)$$

Punto B'' (punto final de contacto)

$$Z = -\frac{b}{2} \quad \varepsilon = \varepsilon_\gamma \quad \lambda_1 = \lambda_{1a} = -\frac{g_f + g_a + g_\beta}{r_{b1}.\varepsilon_\gamma} (\varepsilon_\gamma - \varepsilon_l) \quad (8)$$

Los intervalos validos de las coordenadas **Z** y **ε** del parámetro angular  $\lambda_1$  son:

$$-\frac{b}{2} \leq Z \leq \frac{b}{2} \quad ; \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_\gamma \quad ; \quad \lambda_{1f} \leq \lambda_1 \leq \lambda_{1a} \quad (9)$$

## 3. Representaciones Vectoriales

### 3.1. Helicoides H1

La representación vectorial paramétrica del helicoides H1 es (Ver Figura 4):

$$\mathbf{r}(Z, \varepsilon) = X_1(Z, \varepsilon)\mathbf{i} + Y_1(Z, \varepsilon)\mathbf{j} + Z_1(Z)\mathbf{k} \quad (10)$$

Donde las coordenadas **Z** y **ε** son los parámetros de la representación y  $\mathbf{r}(Z, \varepsilon)$  es el vector posición del punto genérico **P** de la superficie. El punto **P** ocupa diferentes posiciones sobre H1 cuando los parámetros (**Z**, **ε**) toman valores en el interior de una región **R** en el plano de referencia **Zε** (Fig 5). Para cada punto (**Z**, **ε**) en **R** corresponde un punto **P** en H1 y un vector posición  $\mathbf{r}(Z, \varepsilon)$ . En otros términos, las superficies H1 es la imagen espacial de la región **R**.

En la correspondencia entre H1 y la región **R**, a las generatrices rectas en H1 (definidas por **ε** o  $\lambda_1$ ), corresponden rectas paralelas al eje **Z** en **R**, y a las evolventes en H1 rectas paralelas al eje **ε** en **R**.

### 3.2. Curvas de H1

Si **Z** y **ε** son funciones de un parámetro t, es decir:

$$Z = Z(t) \quad \varepsilon = \varepsilon(t) \quad (11)$$

(**Z** y **ε** son las coordenadas que describen la superficie y si los hacemos depender de un solo parámetro estamos describiendo una sola línea o curva de esa superficie. A su vez si  $t = \varepsilon$  estamos trazamos una paralela al eje **Z**)  
Una curva **C** queda definida sobre la superficie H1 cuya representación vectorial paramétrica es:

$$\mathbf{r}(t) = X_1(t)\mathbf{i} + Y_1(t)\mathbf{j} + Z_1(t)\mathbf{k} \quad (12)$$

Los siguientes casos particulares son de interés:

### 3.2.1. Generatrices

Si  $t=Z$  y  $\mathcal{E}=\text{cte}$  se tiene las líneas rectas de contacto de flanco activo de diente

Donde  $\mathbf{r}(Z)$  es la ecuación vectorial paramétrica de una generatriz de H1 y el parámetro  $Z$  puede variar entre dos valores extremos que dependen de  $\mathcal{E}$  (Figura 5)

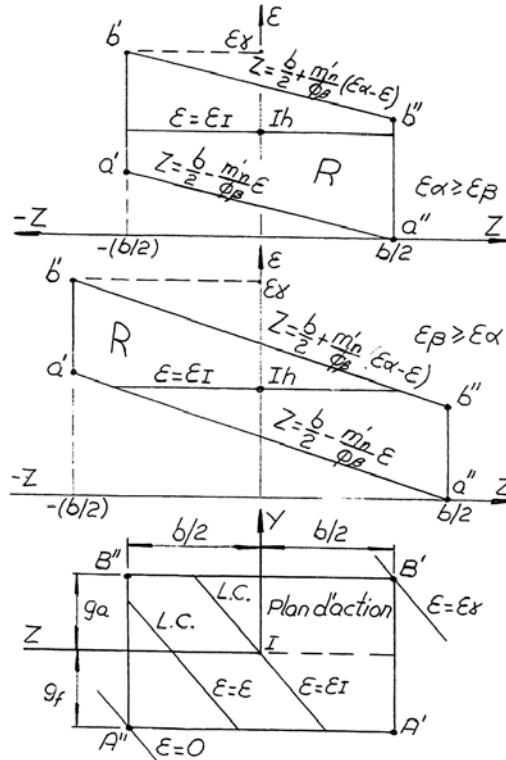


Figura 5 Plano Activo

$$\mathbf{r}(Z) = X_1(Z)\mathbf{i} + Y_1(Z)\mathbf{j} + Z\mathbf{k} \quad (13)$$

### 3.2.2. Desarrollante (de círculo) o Evolvente

Se hace  $Z=\text{cte}$  y se utiliza la ecuación de la línea de contacto en el plano de acción (ver el Anexo y [2] pag.91)

$$Y = tg\beta_b Z + J_\varepsilon \varepsilon - J_y \quad (14)$$

Para  $\varepsilon=\text{cte}$   $Z$  es función lineal de  $Y$

Partiendo de esta ecuación se deduce que  $\mathcal{E}=\mathcal{E}(Y)$  donde el intervalo de validez de  $Y$  es:

$$-g_f \leq Y \leq g_a \quad (15)$$

En estas condiciones si se hace  $t=Y$  se obtiene la representación vectorial paramétrica de una desarrollante (evolvente) de H1

$$\mathbf{r}(Y) = X_1(Y)\mathbf{i} + Y_1(Y)\mathbf{j} + Z\mathbf{k} \quad (16)$$

### 3.2.3. Hélices cilíndricas

Para un valor dado del radio  $r_j$  y (cada valor de  $r_j$  es el radio un cilindro que corta al flanco del diente según una hélice) teniendo en cuenta de la expresión [4]

$$Y = \sqrt{r_j^2 - r_b^2} - r_{b1} tg\alpha \cdot t \quad (17)$$

Se obtiene el valor de  $Y$ . Entonces, de la ecuación (14) de la línea de contacto se deduce

$$\varepsilon(Z) = \frac{1}{J_\varepsilon} (J_y - tg\beta_b Z + Y) \quad (18)$$

En estas condiciones y haciendo  $t=Z$  se obtiene la representación vectorial paramétrica de una hélice cilíndrica de la helicoides H1

$$\mathbf{r}(Z) = X_1(Z)\mathbf{i} + Y_1(Z)\mathbf{j} + Z\mathbf{k} \quad (19)$$

Donde

$$-\left(\frac{\mathbf{b}}{2}\right) \leq Z \leq \left(\frac{\mathbf{b}}{2}\right) \quad (20)$$

#### 4. Geometría Intrínseca de H1

Primeramente, es necesario conocer la expresión matemática de las derivadas parciales primeras de las ecuaciones cartesianas paramétricas del helicoide H1, es decir:

$$\frac{\partial X_1}{\partial Z} = Q_{xz} \quad (21) \quad \frac{\partial X_1}{\partial \varepsilon} = \frac{d\lambda_1}{d\varepsilon} (Q_{yz}.Z + Q_{y\varepsilon}.\varepsilon + Q_y) + Q_x\varepsilon \quad (22)$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial Z} = Q_{yz} \quad (23) \quad \frac{\partial Y_1}{\partial \varepsilon} = -\frac{d\lambda_1}{d\varepsilon} (Q_{xz}.Z + Q_{x\varepsilon}.\varepsilon + Q_x) + Q_y\varepsilon \quad (24)$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial Z} = 1 \quad (25) \quad \frac{\partial Z_1}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (26)$$

Donde

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon} = \frac{gf + ga + g\beta}{r_{b1}.\varepsilon\gamma} \quad (27)$$

##### 4.1. Primera forma cuadrática fundamental

El elemento de línea de una curva C esta definido por:

$$ds^2 = dr.dr \quad (28)$$

Donde

(s = Línea en general)

$$dr = \frac{\partial r}{\partial Z} dz + \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \quad (29)$$

Siendo

$$\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = \frac{dX_1}{d\varepsilon} i + \frac{dY_1}{d\varepsilon} j + \frac{dZ_1}{d\varepsilon} k \quad (30)$$

y finalmente

$$\frac{\partial r}{\partial Z} = \frac{dX_1}{dZ} i + \frac{dY_1}{dZ} j + \frac{dZ_1}{dZ} k \quad (31)$$

Estando dado que

$$\frac{\partial Z_1}{\partial Z} = 1 \quad \frac{\partial Z_1}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (32)$$

Operando algebraicamente se obtiene:

$$ds^2 = E.dZ^2 + G.d\varepsilon^2 \quad (33)$$

(s = Línea en general)

Expresión de la *primera forma cuadrática fundamental* de la métrica Gussiana correspondiente al helicoide H1. Las expresiones de los coeficientes E y G son:

$$E = \frac{dX_1^2}{dZ} + \frac{dY_1^2}{dZ} + 1 = \frac{1}{(\cos \beta b)^2} \quad (34)$$

$$G = \frac{dX_1^2}{d\varepsilon} + \frac{dY_1^2}{d\varepsilon} \quad (35)$$

En el caso del coeficiente G no es posible obtener una expresión simplificada

##### 4.2. Elementos de Línea

Si  $Z = \text{cte}$  (flanco de una evolvente) el elemento de línea de una desarrollante de una evolvente es:

$$ds_d^2 = G.d\varepsilon^2 \quad (36)$$

(s = Línea en general y d=desarrollante)

Si  $\varepsilon = \text{cte}$ , se tiene el elemento de línea de una generatriz de H1

$$ds_g^2 = E.dz^2 \quad (g = \text{Generatriz}) \quad (37)$$

En el caso de la hélice de H1, es necesario considerar que una hélice queda definido por un radio  $r_j$  (y un valor correlativo de  $Y$ ) y utilizando la ecuación de la línea de contacto se tiene:

$$\varepsilon = \frac{1}{j_\varepsilon} (J_Y - tg\beta_b.Z + Y) \quad (38)$$

De donde se deduce

$$d\varepsilon = -\left(\frac{tg\beta_b}{J_\varepsilon}\right) dz \quad (39)$$

En consecuencia

$$(ds_h)^2 = E.dz^2 + G\left(-\frac{tg\beta_b}{J_\varepsilon}\right)^2 dz^2 \quad (40)$$

y finalmente

$$(ds_h)^2 = \left[ E + G\left(\frac{tg\beta_b}{J_\varepsilon}\right)^2 \right] dz^2 \quad (41)$$

( $h = \text{Hélice}$ )

Análogamente se puede obtener

$$(ds_h)^2 = \left[ E\left(\frac{j_\varepsilon}{tg\beta_b}\right)^2 + G \right] d\varepsilon^2 \quad (42)$$

### 4.3. Tangente a las curvas propias de H1.

El vector *tangente unitario* en un punto P una curva C definida por un parámetro  $t$  tiene la representación vectorial paramétrica siguiente:

$$\mathbf{t}^{\circ}_C = \frac{dr}{ds_C} = \frac{\partial r}{\partial Z} \frac{dZ}{ds_C} + \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{ds_C} \quad (43)$$

$\mathbf{t}^{\circ}_C =$  Vector tangente unitario a la curva C.

Siendo  $ds_C$  el elemento de línea de la curva C. Se considera a continuación los casos particulares siguientes:

#### 4.3.1. Generatrices

Con  $t=Z$  y  $\varepsilon = \text{constante}$ , se tiene

$$ds_g = \sqrt{E}.dz \quad (44)$$

Las expresiones del vector tangente unitario que es  $\mathbf{t}^{\circ}_g$  y sus componentes cartesianas son

$$\mathbf{t}^{\circ}_g = \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{\partial r}{\partial Z} \quad (45)$$

Componente Vectorial

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{gx} &= \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{\partial X_1}{\partial Z} \\ \mathbf{t}_{gy} &= \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{\partial Y_1}{\partial Z} \\ \mathbf{t}_{gz} &= \frac{1}{\sqrt{E}} \end{aligned} \quad (46)$$

Componentes Cartesianas

#### 4.3.2. Desarrollante (Evolvente)

Con  $t = \varepsilon$  y  $Z = \text{cte}$ , se tiene

$$ds_d = \sqrt{G}.d\varepsilon \quad (47)$$

Las expresiones del vector tangente unitario  $\mathbf{t}^{\circ}_d$  y de sus componentes cartesianas son:

$$\mathbf{t}^{\circ}_d = \frac{1}{\sqrt{G}} = \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} \quad (48)$$

Componente Vectorial

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{dx} &= \frac{1}{\sqrt{G}} = \frac{\partial X_1}{\partial \varepsilon} \\ \mathbf{t}_{dy} &= \frac{1}{\sqrt{G}} = \frac{\partial Y_1}{\partial \varepsilon} \\ \mathbf{t}_{dz} &= 0 \end{aligned} \quad (49)$$

Componentes Cartesianas

#### 4.3.3. Hélices

Para una hélice cilíndrica genérica de radio  $r_j$  correspondiente a un valor constante de  $Y$ , haciendo  $t=Z$ :

Se deduce de la ecuación de la línea de contacto en el plano de acción

$$\varepsilon(Z) = \frac{1}{j\varepsilon} (Y - \operatorname{tg}\beta_b \cdot Z + Jy) \quad (50)$$

En cuanto al vector tangente unitario a la hélice  $t^{\circ h}$ , se expresa:

$$t^{\circ h} = \frac{\partial r}{\partial s_h} = \frac{\partial r}{\partial Z} \frac{dZ}{ds_h} + \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{ds_h} \quad (51)$$

Las expresiones obtenidas precedentemente para el elemento de línea permiten deducir:

$$\frac{dZ}{ds_h} = \frac{1}{\sqrt{G_z}} \quad (52) \quad \text{operando} \quad G_z = E + \left( \frac{\operatorname{tg}\beta_b}{J\varepsilon} \right)^2 \cdot G \quad (53)$$

$$\frac{d\varepsilon}{ds_h} = \frac{1}{\sqrt{G\varepsilon}} \quad (54) \quad \text{operando} \quad G\varepsilon = \left( \frac{J\varepsilon}{\operatorname{tg}\beta_b} \right)^2 \cdot E + G \quad (55)$$

De donde

$$t^{\circ h} = \frac{1}{\sqrt{G_z}} \frac{\partial r}{\partial Z} + \frac{1}{\sqrt{G\varepsilon}} \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} \quad (56)$$

y sus componentes cartesianas son:

$$\begin{aligned} t_{hx} &= \frac{1}{\sqrt{G_z}} \frac{\partial X_1}{\partial Z} + \frac{1}{\sqrt{G\varepsilon}} \frac{\partial X_1}{\partial \varepsilon} \\ t_{hy} &= \frac{1}{\sqrt{G_z}} \frac{\partial Y_1}{\partial Z} + \frac{1}{\sqrt{G\varepsilon}} \frac{\partial Y_1}{\partial \varepsilon} \\ t_{hz} &= \frac{1}{\sqrt{G_z}} \end{aligned} \quad (57)$$

#### 4.4. Planos tangentes y Recta Normal al Helicoide H1

El plano tangente del helicoide H1 en un punto genérico P de la superficie contiene las rectas tangentes a todas las curvas de H1 que pasan por P.

En cuanto a la recta normal al helicoide en el punto P, es la recta perpendicular al plano tangente en ese mismo punto. En consecuencia el *vector unitario normal*  $n^{\circ}$  está determinado por el producto vectorial:

$$n^{\circ} = \frac{(t^{\circ g} \cdot X \cdot t^{\circ d})}{\sin(t^{\circ g}, t^{\circ d})} \quad (58)$$

Pero

$$\sin(t^{\circ g}, t^{\circ d}) = 1 \quad (59)$$

Entonces:

$$n^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left( \frac{\partial r}{\partial Z} \times \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} \right) \quad (60)$$

y teniendo en cuenta que

$$\left( \frac{\partial Z_1}{\partial Z} \right) = 1 \quad (61) \quad \text{y} \quad \left( \frac{\partial Z_1}{\partial \varepsilon} \right) = 0 \quad (62)$$

Resulta

$$n^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial X_1}{\partial Z} & \frac{\partial Y_1}{\partial Z} & 1 \\ \frac{\partial X_1}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial Y_1}{\partial \varepsilon} & 0 \end{vmatrix} \quad (63)$$

Las componentes cartesianas de  $n^{\circ}$ , (cosenos directores de la normal) son:

$$\mathbf{n}_x = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial Y_1}{\partial \varepsilon} \quad \mathbf{n}_y = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial X_1}{\partial \varepsilon} \quad \mathbf{n}_z = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left( \frac{\partial Y_1}{\partial \varepsilon} \frac{\partial X_1}{\partial Z} - \frac{\partial X_1}{\partial \varepsilon} \frac{\partial Y_1}{\partial Z} \right) \quad (64)$$

#### 4.5. Curvatura del Helicoide

Entre los elementos intrínsecos de la Geometría de la Superficie de Gauss, se debe señalar la *segunda forma cuadrática fundamental* y las componentes del *tensor de curvatura*. El cálculo de estas últimas, denominadas  $C_{zz}$ ,  $C_{z\varepsilon}$  y  $C_{\varepsilon\varepsilon}$  se efectúa utilizando las derivadas parciales primeras y segundas con relación a  $\mathbf{Z}$  y a  $\varepsilon$  de las funciones  $X_1$ ,  $Y_1$  y  $Z_1$ . Los autores han realizado el cálculo de dichas componentes y han constatado que la *curvatura gaussianas*  $K$  es nula. Es decir, la superficie es de *puntos parabólicos* y entonces, una de sus dos curvaturas principales es nula. En lo que concierne a la otra curvatura principal, el radio de curvatura correspondiente puede ser calculado en un punto genérico  $P$  (de coordenadas  $\mathbf{Z}$  y  $\varepsilon$ ) con el procedimiento siguiente:

Radio de curvatura aparente:

$$\rho_{1a} = r_{b1} \cdot \text{tg } \alpha' t + Y \quad (65)$$

Donde, según la ecuación de la línea de contacto (ver Anexo y Figura 5) es:

$$Y = \text{tg } \beta_b \cdot Z + J_\varepsilon \cdot \varepsilon - J_y \quad (66)$$

Radio de curvatura [4] (aplicación del Teorema de Meunier)

$$\rho_1 = \frac{\rho_{1a}}{\cos \beta_b} \quad (67)$$

Por otra parte, la recta normal a la superficie  $H_1$  en un punto cualquiera  $P$  (vector unitario  $\mathbf{n}^\circ$ ) es el soporte del radio de curvatura  $\rho_1$ .

#### 5. Conclusiones

La geometría métrica de Gauss permite obtener una representación de todos los elementos intrínsecos de la superficie helicoidal correspondiente al flanco activo de los dientes. Se puede hacer el estudio completo, unificado, preciso y elegante de la superficie y de sus curvas propias utilizando la formulación vectorial y las expresiones diferenciales.

En cuanto al volumen de cálculo, incluido los controles numéricos que se pueden realizar, no tiene importancia si se utiliza una computadora. Por otra parte, los autores han realizado numerosos ejemplos numéricos y comprobado la corrección y la exactitud de todas las formulas matemáticas.

#### Referencias Bibliográficas

- [1] Georges Henriot, "Traite theorique et pratique des engrenages", Dunod, Paris, 1979.
- [2] Eitel H. Lauria, "Géométrie analytique des engrenages parallèles extérieurs à denture hélicoïdale", Bulletin N°113, IET-Paris, 1997
- [3] Faydor L. Litvin, "Gear Geometry and Applied Theory", Cambridge, United Kingdom, 2004.
- [4] J.Lelong-Ferand, J.M.Arnaudies, "Geometría y Cinemática" Editorial Reverte, 1982.
- [5] Earle Buckingham. "Analytical Mechanis of Gears". Dover Publications, Inc. New York, 1963.

### Anexo

Símbolos empleados [1] y [5] :

- Radios primitivos de funcionamiento:  $r'1$  ,  $r'2$
- Radios de base :  $r_{b1}$  ,  $r_{b2}$
- Radios de cabeza :  $r_{a1}$  ,  $r_{a2}$
- Radios activos :  $r_{A1}$  ,  $r_{A2}$
- Paso normal y Paso aparente de base :  $p_{bn}$  ,  $p_{bt}$
- Módulo aparente de funcionamiento :  $m't$
- Módulo y Paso aparente de funcionamiento :  $m'n$  ,  $p'n$
- Ángulo de presión aparente de funcionamiento :  $\alpha't$
- Ángulo de presión normal de funcionamiento :  $\alpha'n$
- Ángulo de inclinación de base :  $\beta_b$
- Ángulo de inclinación primitivo de funcionamiento :  $\beta'$
- Largo del dentado :  $b$
- Altura de cabeza de los dientes :  $h_{a1}$  ,  $h_{a2}$
- Altura de los dientes :  $h_1$  ,  $h_2$
- Factores de cálculo adimensionales:

$$\phi_i = \sqrt{\left(\frac{z_i + 2.h_{ai}.\cos \beta'}{z_i.\cos \alpha'_i}\right)^2} - 1 \quad (68) \quad i=1,2 \quad \text{Donde} \quad h_{ai} = \frac{h_{ai}}{m'_n} \quad (69)$$

$$\phi_f = \frac{z_2}{2.\pi.\cos \beta'} (\phi_2.\cos \alpha'_i - \sin \alpha'_i) \quad (70) \quad \phi_a = \frac{z_1}{2.\pi.\cos \beta'} (\phi_1.\cos \alpha'_i - \sin \alpha'_i) \quad (71)$$

$$\phi_\beta = \frac{\sin \beta_b}{\pi.\cos \alpha'_n} \quad (72) \quad \phi_b = \frac{1}{\cos \beta_b.\sin \beta_b} \quad (73)$$

$$J_\varepsilon = \frac{\pi.\cos \alpha'_n}{\cos \beta_b} m'_n \quad (74) \quad J_\varepsilon = \pi.\phi_f.m'_n + \frac{b}{2} \text{tg} \beta_b \quad (75)$$

- Elementos del Engrane :

Longitudes de Acceso, de Rceso y de Recubrimiento :

$$g_f = \phi_f.p'_n \quad (76) \quad g_a = \phi_a.p_{bn} \quad (77) \quad g_\beta = b.\text{tg} \beta_b \quad (78)$$

Relación de engrane aparente  $\varepsilon_\alpha = \frac{\phi_f + \phi_a}{\cos \alpha'_n} \cos \beta_b \quad (79)$

Relación de recubrimiento  $\varepsilon_\beta = \frac{b.\phi_\beta}{m'_n} \quad (80)$

Relación de engrane total  $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta \quad (81)$

Ecuación de la línea de contacto en el plano de acción :

$$Y = \text{tg} \beta_b.Z + J_\varepsilon.\varepsilon - J_Y \quad (82)$$