



*II CAIM 2010
Segundo Congreso Argentino
de Ingeniería Mecánica
San Juan - Noviembre 2010*

PROBLEMA DE CONTORNO Y AUTOVALORES DE PLACAS GRUESAS CON UNA LÍNEA INTERMEDIA CON RÓTULAS.

María V. Quintana, Ricardo O. Grossi

*PROMAS-INIQUI, Facultad de Ingeniería,
Universidad Nacional de Salta, Av. Bolivia 5150, 4400 Salta, Argentina,
E-mail: virginiaquintana@argentina.com, rogrossi@unsa.edu.ar*

RESUMEN

El problema de vibraciones libres de placas con presencia de rótulas y de restricciones elásticas en puntos intermedios, es de interés en ciertas aplicaciones de la ingeniería. Una línea intermedia con rótulas en una placa, puede ser usada para facilitar la apertura de puertas, la plegadura de portones y para simular ciertas fracturas. La presencia de las rótulas genera condiciones cuyas expresiones analíticas son análogas a las de las condiciones de contorno y complican notablemente la resolución, tanto analítica como numérica, de los problemas correspondientes. Es importante notar que no existen estudios en la literatura, del problema de vibraciones libres de placas gruesas elásticamente restringidas en sus bordes y que además posean rótulas a lo largo de una línea intermedia restringidas elásticamente

El objetivo de este trabajo es la obtención de los problemas de contorno y autovalores que describen el comportamiento estático y dinámico de placas con una línea intermedia con rótula mediante las técnicas del cálculo de variaciones. En el estudio se consideran placas gruesas anisótropas modeladas mediante el uso de la teoría de primer orden (FSDT) la cual permite considerar los efectos de la inercia rotatoria y de las deformaciones cortantes transversales. El uso de la teoría mencionada permite obtener mayor precisión en la determinación de los coeficientes de frecuencia correspondientes a los modos superiores de vibración aún para el caso de placas delgadas.

Palabras Claves: Placas, FSDT, Rótulas Intermedias, Cálculo de Variaciones, Problema de Contorno.

1. INTRODUCCIÓN

La denominada teoría de placas de primer orden, conocida por sus siglas en inglés FSDT, extiende la cinemática de la teoría clásica de placas (CLPT) incluyendo una deformación transversal por corte constante en el espesor de la placa. El efecto más significativo de incluir deformaciones transversales por corte se observa en la predicción de los valores de las deflexiones, frecuencias y cargas de pandeo. Es conocido que la teoría clásica de placa predice por debajo los valores de las deflexiones y produce valores superiores para las frecuencias y las cargas de pandeo de placas cuando poseen relación largo-espesor igual o menor a 20. Por esta razón es necesario el uso de la teoría de deformación por corte de primer orden, en el análisis de placas relativamente gruesas.

Existe una gran cantidad de textos y trabajos de investigación sobre la obtención, mediante el cálculo de variaciones, de las ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno que describen el comportamiento estático y dinámico de placas [1-3]. No obstante, todas estas obras tratan el caso de placas isótropas y bordes con apoyos clásicos, es decir simplemente apoyados, rígidamente empotrados y libres. En las referencias [4] y [5] se trató el problema de placas anisótropas restringidas elásticamente y con contornos que poseen puntos angulosos. Por otro lado, existe una cantidad limitada de trabajos que contemplan la presencia de líneas intermedias con rótulas en una placa [6-8].

Por ello, el objetivo de este trabajo es obtener las ecuaciones gobernantes, las condiciones de contorno, y las condiciones de transición o compatibilidad, que gobiernan el comportamiento estático y dinámico de una placa anisótropa basada en la cinemática de la FSDT, de forma arbitraria, con bordes elásticamente restringidos y con una línea intermedia con rótulas restringidas a rotación.

2. COMPONENTES DE LA ENERGÍA POTENCIAL.

Se estudian placas gruesas de material anisótropo con bordes elásticamente restringidos y con una línea intermedia con rótulas restringidas contra rotación tal como se puede observar en la Figura 1. Se supone que la placa está sometida a cargas perpendiculares al plano medio y está constituida por un apilamiento de capas ortótropas de manera tal que en conjunto forman un esquema de laminación simétrico con respecto al plano medio. Los desarrollos se basan teniendo en cuenta las hipótesis cinemáticas de la teoría FSDT.

2.1. Energía de Deformación de la Placa Anisótropa

De acuerdo con las hipótesis y restricciones establecidas anteriormente, la energía de deformación por flexión transversal de la placa anisótropa, se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \iint_{R_i} & \left\{ D_{11}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} \right)^2 + D_{22}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} \right)^2 + 2D_{12}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} + 2D_{16}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) + \right. \\
 & + 2D_{26}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) + D_{66}^{(i)} \left(\left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right)^2 \right) + A_{44}^{(i)} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \frac{\partial w}{\partial x_2} \phi_{x_2} + \right. \\
 & \left. + \phi_{x_2}^2 \right) + 2A_{45}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_{x_1} \phi_{x_2} \right) + A_{55}^{(i)} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial w}{\partial x_1} \phi_{x_1} + \phi_{x_1}^2 \right) \left. \right\} dx_1 dx_2 \quad (1)
 \end{aligned}$$

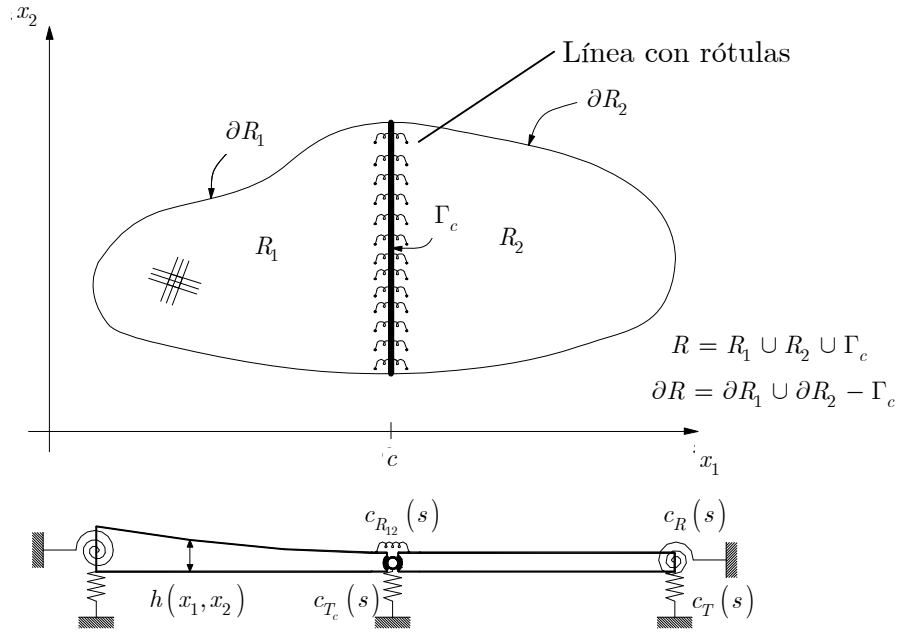


Figura 1: Parámetros geométricos y mecánicos de una placa con una línea intermedia con rótulas restringidas elásticamente contra rotación.

donde $D_{ij}^{(k)}(x_1, x_2)$ y $A_{ij}^{(k)}(x_1, x_2)$, $k = 1, 2$ denotan las rigideces flexionales y extensionales de la placa en R_k y están dadas por

$$D_{ij}^{(k)}(x_1, x_2) = \int_{-h(x_1, x_2)/2}^{h(x_1, x_2)/2} \bar{Q}_{ij}^{(r)} x_3^2 dx_3, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad A_{ij}^{(k)}(x_1, x_2) = K \int_{-h(x_1, x_2)/2}^{h(x_1, x_2)/2} \bar{Q}_{ij}^{(r)} dx_3, \quad i, j = 4, 5, \quad (2)$$

donde K es el factor de corrección por corte introducido para tener en cuenta la diferencia entre las fuerzas de cortes reales y las predichas por la teoría FSDT y $\bar{Q}_{ij}^{(r)}$ son los elementos de la matriz constitutiva de la capa r del laminado simétrico. Además $w = w(x_1, x_2, t)$ es la deflexión transversal de los puntos del plano medio de la placa y $\phi_{x_2} = \phi_{x_2}(x_1, x_2, t)$ y $\phi_{x_1} = \phi_{x_1}(x_1, x_2, t)$ denotan las rotaciones de la sección transversal alrededor de las coordenadas x e y respectivamente.

2.2. Energía de Deformación de los Vínculos Rotacionales y Traslacionales.

Si se supone que las restricciones rotacionales están caracterizadas por las constantes de rigidez $c_R(s)$, $c_{R_{12}}(s)$ y las restricciones traslacionales por $c_T(s)$, $c_{T_c}(s)$, las energías de deformación de los vínculos rotacionales y traslacionales están dadas por:

$$U_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} c_R^{(i)}(s) \phi_n^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} c_{R_{12}}(s) (\phi_{x_1}(c^+, x_2, t) - \phi_{x_1}(c^-, x_2, t))^2 ds, \quad (3)$$

$$U_T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} c_T^{(i)}(s) w^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} c_{T_c}(s) w^2 ds, \quad (4)$$

donde s denota la longitud de arco y es $\Gamma_i = \partial R_i - \Gamma_c$. La línea $\Gamma_c = \{(c, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$ es la parte común a los contornos ∂R_1 , ∂R_2 , y ϕ_n denota la rotación alrededor de la coordenada s . Las rotaciones alrededor

de las coordenadas s y n , denotadas por ϕ_n y ϕ_s respectivamente, están relacionadas con los desplazamientos ϕ_{x_1} y ϕ_{x_2} mediante las relaciones (ver Figura 2) :

$$\phi_n = n_2 \phi_{x_2} - n_1 \phi_{x_1}, \phi_s = n_1 \phi_{x_2} - n_2 \phi_{x_1},$$

donde $n_1 = \cos \alpha$ y $n_2 = \cos \beta$.

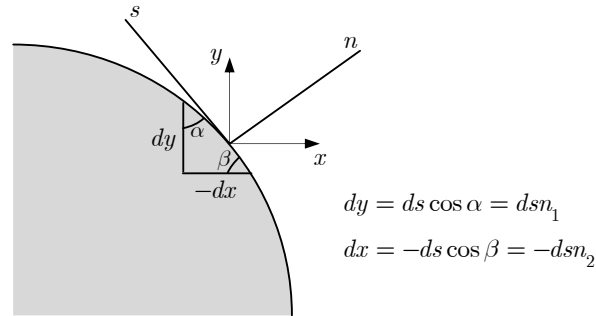


Figura 2: Relación de coordenadas curvilíneas y rectangulares.

2.3. Energía Cinética de la Placa Anisótropa

La energía cinética para cualquier instante de tiempo t se puede expresar de la siguiente manera,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \iint_{R_i} \left[I_0^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_2^{(i)} \left(\left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial t} \right)^2 \right) \right] dx_1 dx_2 \quad (5)$$

donde

$$I_0^{(i)} = \rho_0 \int_{-h(x_1, x_2)/2}^{h(x_1, x_2)/2} dz = \rho_0 h(x_1, x_2), \quad I_2^{(i)} = \rho_0 \int_{-h(x_1, x_2)/2}^{h(x_1, x_2)/2} z^2 dz = \rho_0 \frac{h^3}{12}(x_1, x_2). \quad (6)$$

2.4. Energía Potencial de las Cargas Exteriores

La energía potencial debida a una carga transversal $q = q(x_1, x_2, t)$ actuando sobre R_i , en un instante t está dada por:

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \iint_{R_i} q(x_1, x_2, t) w dx_1 dx_2 \quad (7)$$

donde

$$q(x_1, x_2, t) = \begin{cases} q^{(1)}(x_1, x_2, t), & \forall \mathbf{x} \in R_1, \\ q^{(2)}(x_1, x_2, t), & \forall \mathbf{x} \in R_2. \end{cases}$$

3. VARIACIÓN DEL FUNCIONAL DE ENERGÍA

Si se aplica el Principio de Hamilton y luego se reemplazan las expresiones obtenidas para las distintas energías que intervienen en el funcional y que están dadas por las expresiones (1), (3)-(5), (7), y se obtiene:

$$\begin{aligned}
 F(w, \phi_{x_1}, \phi_{x_2}) = & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\int_{R_i} \left(I_0^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_2^{(i)} \left(\left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial t} \right)^2 \right) - D_{11}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} \right)^2 - \right. \right. \\
 & - D_{22}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} \right)^2 - 2D_{12}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} - 2D_{16}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) - 2D_{26}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) - \\
 & - D_{66}^{(i)} \left(\left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right)^2 \right) - A_{44}^{(i)} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \frac{\partial w}{\partial x_2} \phi_{x_2} + \phi_{x_2}^2 \right) - \\
 & 2A_{45}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_{x_1} \phi_{x_2} \right) - A_{55}^{(i)} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial w}{\partial x_1} \phi_{x_1} + \phi_{x_1}^2 \right) + q^{(i)} w \Big] dx_1 dx_2 - \\
 & \left. - \int_{\Gamma_i} c_R^{(i)}(s) \phi_n^2 ds - \int_{\Gamma_i} c_T^{(i)}(s) w^2 ds \right\} - \int_{\Gamma_c} c_{R_{12}}(s) [\phi_{x_1}]^2 ds - \int_{\Gamma_c} c_{T_c}(s) w^2 ds \Big\} dt
 \end{aligned} \tag{8}$$

donde $[\phi_{x_1}]$ denota la diferencia $\phi_{x_1}(c^+, x_2, t) - \phi_{x_1}(c^-, x_2, t)$.

Dado que en este caso el funcional involucrado depende de varias funciones, es conveniente introducir la función vectorial $\mathbf{u} = (w(x_1, x_2, t), \phi_{x_1}(x_1, x_2, t), \phi_{x_2}(x_1, x_2, t))$. En consecuencia el funcional (8) depende de \mathbf{u} , o sea se puede escribir $F = F(\mathbf{u})$.

La condición de funcional estacionario requiere que la variación primera dada por:

$$\delta F(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = \left. \frac{dF(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v})}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \tag{9}$$

se iguale a cero para toda dirección \mathbf{v} admisible.

La aplicación de las técnicas del cálculo de variaciones, requiere imponer las siguientes hipótesis

$I_0^{(i)}(\mathbf{x}), I_2^{(i)}(\mathbf{x}), q^{(i)}(\bullet, t) \in C(\bar{R}_i), D_{kl}^{(i)}(\mathbf{x}), A_{kl}^{(i)}(\mathbf{x}) \in C^1(\bar{R}_i), w(\mathbf{x}, \bullet), \phi_{x_1}(\mathbf{x}, \bullet), \phi_{x_2}(\mathbf{x}, \bullet) \in C^2[t_0, t_1],$
 $w(\bullet, t), \phi_{x_2}(\bullet, t) \in C(\bar{R}), \phi_{x_1}(\bullet, t) \in C(\bar{R})$ y $w(\bullet, t)|_{\bar{R}_i}, \phi_{x_1}(\bullet, t)|_{\bar{R}_i}, \phi_{x_2}(\bullet, t)|_{\bar{R}_i} \in C^2(\bar{R}_i), i = 1, 2,$ donde
 $\bar{R}_i = R_i \cup \partial R_i$. Si se introduce el espacio $U = (C^2(\bar{R}_i) \times C^2[t_0, t_1])^3$, resulta que $\mathbf{u} \in U$.

Teniendo en cuenta estas observaciones y que el Principio de Hamilton requiere que entre los instantes t_0 y t_1 las posiciones sean conocidas, el dominio del funcional (9) está dado por

$$D = \left\{ \mathbf{u}; \mathbf{u} \in U, w(\bullet, t), \phi_{x_2}(\bullet, t) \in C(\bar{R}), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1), \text{prescripto } \forall \mathbf{x} \in \bar{R} \right\} \tag{10}$$

Las únicas direcciones admisibles \mathbf{v} en $\mathbf{u} \in D$ son aquellas para las cuales $\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v} \in D$ para ε suficientemente pequeño y $\delta F(\mathbf{u}; \mathbf{v})$ existe. En consecuencia, teniendo en cuenta (10), \mathbf{v} es una dirección admisible en \mathbf{u} para D si y sólo si $\mathbf{v} \in D_0$ donde

$$D_0 = \left\{ \mathbf{v}; \mathbf{v} \in U, w(\bullet, t), \phi_{x_2}(\bullet, t) \in C(\bar{R}), \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0), \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_1), \text{prescripto } \forall \mathbf{x} \in \bar{R} \right\} \tag{11}$$

La aplicación de (9) en el funcional (8) y el posterior desarrollo y reagrupación de los términos conduce a

$$\begin{aligned} \partial F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\int_{R_i} \left(I_0^{(i)} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + I_2^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial t} \frac{\partial \eta_{x_1}}{\partial t} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial t} \frac{\partial \eta_{x_2}}{\partial t} \right) + M_1^{(i)} \frac{\partial \eta_{x_1}}{\partial x_1} + M_2^{(i)} \frac{\partial \eta_{x_2}}{\partial x_2} + \right. \right. \\ & + H_{12}^{(i)} \left(\frac{\partial \eta_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \eta_{x_2}}{\partial x_1} \right) + Q_2^{(i)} \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + \eta_{x_2} \right) + Q_1^{(i)} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + \eta_{x_1} \right) + q^{(i)} v \Big] dx_1 dx_2 \Big\} - \\ & - \int_{\Gamma_i} c_R^{(i)}(s) \phi_n \eta_n ds - \int_{\Gamma_i} c_T^{(i)}(s) w v ds \Big] - \int_{\Gamma_c} c_{R_{12}}(s) [\phi_{x_1}] [\eta_{x_1}] ds - \int_{\Gamma_c} c_{T_c}(s) w v ds \Big\} dt \end{aligned} \quad (12)$$

donde:

$$M_1^{(i)} = - \left(D_{11}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} + D_{12}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} + D_{16}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) \right), \quad (13)$$

$$M_2^{(i)} = - \left(D_{22}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} + D_{12}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} + D_{26}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) \right), \quad (14)$$

$$H_{12}^{(i)} = - \left(D_{16}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} + D_{26}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} + D_{66}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) \right), \quad (15)$$

$$Q_2^{(i)} = - \left(A_{44}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_2} \right) + A_{45}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_{x_1} \right) \right), \quad (16)$$

$$Q_1^{(i)} = - \left(A_{55}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_{x_1} \right) + A_{45}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_2} \right) \right). \quad (17)$$

Sea la integral $J_1^{(i)} = \int_{t_0}^{t_1} \iint_{R_i} \left(I_0^{(i)} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + I_2^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial t} \frac{\partial \eta_{x_1}}{\partial t} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial t} \frac{\partial \eta_{x_2}}{\partial t} \right) \right) dx_1 dx_2 dt$. Ya que

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \bullet), \mathbf{v}(\mathbf{x}, \bullet) \in C^2[t_0, t_1]$ se puede integrar por partes con respecto al tiempo t y si se aplica la condición $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_1) = 0, \forall \mathbf{x} \in R$, establecida en (11), se obtiene

$$\begin{aligned} J_1^{(i)} = & \int_{t_0}^{t_1} \iint_{R_i} \left(I_0^{(i)} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + I_2^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial t} \frac{\partial \eta_{x_1}}{\partial t} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial t} \frac{\partial \eta_{x_2}}{\partial t} \right) \right) dx_1 dx_2 dt = \\ = & \iint_{R_i} \left(I_0^{(i)} \frac{\partial w}{\partial t} v + I_2^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial t} \eta_{x_1} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial t} \eta_{x_2} \right) \right) \Big|_{t_0}^{t_1} dx_1 dx_2 - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \iint_{R_i} \left(I_0^{(i)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} v + I_2^{(i)} \left(\frac{\partial^2 \phi_{x_1}}{\partial t^2} \eta_{x_1} + \frac{\partial^2 \phi_{x_2}}{\partial t^2} \eta_{x_2} \right) \right) dx_1 dx_2 dt = \\ = & - \int_{t_0}^{t_1} \iint_{R_i} \left(I_0^{(i)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} v + I_2^{(i)} \left(\frac{\partial^2 \phi_{x_1}}{\partial t^2} \eta_{x_1} + \frac{\partial^2 \phi_{x_2}}{\partial t^2} \eta_{x_2} \right) \right) dx_1 dx_2 dt \end{aligned} \quad (18)$$

Se analiza ahora la integral $J_2^{(i)} = \int_{t_0}^{t_1} \iint_{R_i} M_1^{(i)} \frac{\partial \eta_{x_1}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dt$. Si se aplica una vez la fórmula de Green a

la expresión anterior se obtiene:

$$J_2^{(i)} = \int_{t_0}^{t_1} \iint_{R_i} M_1^{(i)} \frac{\partial \eta_{x_1}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\partial R_i} M_1^{(i)} \eta_{x_1} n_1^{(i)} ds - \iint_{R_i} \frac{\partial M_1^{(i)}}{\partial x_1} \eta_{x_1} dx_1 dx_2 \right] dt \quad (19)$$

Si se procede de igual forma con las integrales restantes que intervienen en la Ecuación (12) se obtiene la variación del funcional buscada:

$$\begin{aligned} \delta F(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\iint_{R_i} \left(-I_0^{(i)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_1^{(i)}}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_2^{(i)}}{\partial x_2} + q^{(i)} \right) v dx_1 dx_2 + \right. \right. \\ & + \iint_{R_i} \left[\left(-I_2^{(i)} \frac{\partial^2 \phi_{x_1}}{\partial t^2} + Q_1^{(i)} - \frac{\partial M_1^{(i)}}{\partial x_1} - \frac{\partial H_{12}^{(i)}}{\partial x_2} \right) \eta_{x_1} + \left(-I_2^{(i)} \frac{\partial^2 \phi_{x_2}}{\partial t^2} + Q_2^{(i)} - \frac{\partial M_2^{(i)}}{\partial x_2} - \frac{\partial H_{12}^{(i)}}{\partial x_1} \right) \eta_{x_2} \right] dx_1 dx_2 \left. \right\} + \quad (20) \\ & + \int_{\partial R_i} \left(M_1^{(i)} n_1^{(i)} + H_{12}^{(i)} n_2^{(i)} \right) \eta_{x_1} ds + \int_{\partial R_i} \left(M_2^{(i)} n_2^{(i)} + H_{12}^{(i)} n_1^{(i)} \right) \eta_{x_2} ds + \int_{\partial R_i} \left(Q_1^{(i)} n_1^{(i)} + Q_2^{(i)} n_2^{(i)} \right) v ds \\ & - \int_{\Gamma_i} c_R^{(i)}(s) \phi_n \eta_n ds - \int_{\Gamma_i} c_T^{(i)}(s) w v ds \left. \right\} - \int_{\Gamma_c} c_{R_{12}}(s) [\phi_{x_1}] [\eta_{x_1}] ds - \int_{\Gamma_c} c_{T_c}(s) w v ds \left. \right\} dt \end{aligned}$$

4. DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES GOBERNANTES Y DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO.

De acuerdo con la condición de funcional estacionario, la expresión (20) debe anularse para la función \mathbf{u} que describe el desplazamiento de los puntos del plano medio de la placa, para todas las direcciones admisibles \mathbf{v} , y en particular, para todas las \mathbf{v} admisibles que satisfacen en cada contorno ∂R_i las condiciones:

$$v(\mathbf{x}, t) \Big|_{\partial R_i} = 0, \quad \eta_{x_2}(\mathbf{x}, t) \Big|_{\partial R_i} = 0, \quad \eta_{x_1}(\mathbf{x}, t) \Big|_{\partial R_i} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (21)$$

Para tales funciones la condición de funcional estacionario se reduce a:

$$\begin{aligned} \delta F(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\iint_{R_i} \left(-I_0^{(i)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_1^{(i)}}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_2^{(i)}}{\partial x_2} + q^{(i)} \right) v dx_1 dx_2 + \right. \right. \\ & + \iint_{R_i} \left(-I_2^{(i)} \frac{\partial^2 \phi_{x_1}}{\partial t^2} + Q_1^{(i)} - \frac{\partial M_1^{(i)}}{\partial x_1} - \frac{\partial H_{12}^{(i)}}{\partial x_2} \right) \eta_{x_1} dx_1 dx_2 + \quad (22) \\ & \left. \left. + \iint_{R_i} \left(-I_2^{(i)} \frac{\partial^2 \phi_{x_2}}{\partial t^2} + Q_2^{(i)} - \frac{\partial M_2^{(i)}}{\partial x_2} - \frac{\partial H_{12}^{(i)}}{\partial x_1} \right) \eta_{x_2} dx_1 dx_2 \right] \right\} dt = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in D_0 \end{aligned}$$

Si la función $q(\mathbf{x}, t)$ es continua y se tiene en cuenta que \mathbf{v} es una función arbitraria suave que satisface las condiciones (21), se puede aplicar el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones y se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1^{(i)}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2^{(i)}}{\partial x_2} - q^{(i)} + I_0^{(i)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial M_1^{(i)}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{12}^{(i)}}{\partial x_2} - Q_1^{(i)} + I_2^{(i)} \frac{\partial^2 \phi_{x_1}}{\partial t^2} &= 0, \quad (23) \\ \frac{\partial M_2^{(i)}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{12}^{(i)}}{\partial x_1} - Q_2^{(i)} + I_2^{(i)} \frac{\partial^2 \phi_{x_2}}{\partial t^2} &= 0, \quad \forall \mathbf{x} \in R_i, i = 1, 2, \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Las Ecuaciones (23) son condiciones necesarias para que se verifique la Ecuación (22).

Si se reemplazan las expresiones (13)-(17) en (23) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x_1} \left[A_{55}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_{x_1} \right) + A_{45}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[A_{44}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_2} \right) + A_{45}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_{x_1} \right) \right] + q^{(i)} = I_0^{(i)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\
 & \frac{\partial}{\partial x_1} \left[D_{11}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} + D_{12}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} + D_{16}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D_{16}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} + D_{26}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} + D_{66}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) \right] - \\
 & - \left[A_{55}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_{x_1} \right) + A_{45}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_2} \right) \right] = I_2^{(i)} \frac{\partial^2 \phi_{x_1}}{\partial t^2}, \tag{24} \\
 & \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D_{12}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} + D_{22}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} + D_{26}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[D_{16}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} + D_{26}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} + D_{66}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) \right] - \\
 & - \left[A_{44}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_2} \right) + A_{45}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_{x_1} \right) \right] = I_2^{(i)} \frac{\partial^2 \phi_{x_2}}{\partial t^2}, \forall \mathbf{x} \in R_i, i = 1, 2, \forall t \geq 0
 \end{aligned}$$

Las tres ecuaciones diferenciales de segundo orden (24) describen el comportamiento dinámico y estático ($\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = 0$) de la placa vibrante en términos de los desplazamientos generalizados mientras que las ecuaciones diferenciales (23) están expresadas en términos de las fuerzas resultantes.

Si ahora se remueve la restricción (21), y se tiene en cuenta que \mathbf{u} debe satisfacer las Ecuaciones (24), la expresión (20) se reduce a:

$$\begin{aligned}
 \delta F(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\int_{\partial R_i} \left(M_1^{(i)} n_1^{(i)} + H_{12}^{(i)} n_2^{(i)} \right) \eta_{x_1} ds + \int_{\partial R_i} \left(M_2^{(i)} n_2^{(i)} + H_{12}^{(i)} n_1^{(i)} \right) \eta_{x_2} ds + \right. \\
 & + \int_{\partial R_i} \left(Q_1^{(i)} n_1^{(i)} + Q_2^{(i)} n_2^{(i)} \right) v ds - \int_{\Gamma_i} c_R^{(i)}(s) \phi_n \eta_n ds - \int_{\Gamma_i} c_T^{(i)}(s) w v ds \Big] - \\
 & \left. - \int_{\Gamma_c} c_{R_{12}}(s) \left[\phi_{x_1} \right] \left[\eta_{x_1} \right] ds - \int_{\Gamma_c} c_{T_c}(s) w v ds \right\} dt
 \end{aligned} \tag{25}$$

Por conveniencia, los desplazamientos ϕ_{x_1} y ϕ_{x_2} se expresan en función de la longitud de arco s del contorno ∂R_i y la distancia n medida desde el contorno y a lo largo de la normal exterior a ∂R_i (ver Figura 2), esto es:

$$\phi_{x_1} = n_1 \phi_n - n_2 \phi_s, \quad \phi_{x_2} = n_2 \phi_n + n_1 \phi_s \tag{26}$$

De acuerdo con la expresión (26) la integral $\int_{\Gamma_c} c_{R_{12}}(s) \left[\phi_{x_1} \right] \left[\eta_{x_1} \right] ds$ puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_c} c_{R_{12}}(s) \left[\phi_{x_1} \right] \left[\eta_{x_1} \right] ds = & \int_{\Gamma_c} c_{R_{12}}(s) \left[\phi_{x_1} \right] \left(n_1^{(2)} \eta_n(c^+, x_2, t) - n_2^{(2)} \eta_s(c^+, x_2, t) + \right. \\
 & \left. + n_2^{(1)} \eta_s(c^-, x_2, t) - n_1^{(1)} \eta_n(c^-, x_2, t) \right) ds
 \end{aligned} \tag{27}$$

Los vectores normales unitarios en la línea Γ_c de cada subdominio R_i están dados por (ver Figura 1):

$$\vec{n}^{(1)} = (1, 0), \quad \vec{n}^{(2)} = (-1, 0) \tag{28}$$

El reemplazo de las expresiones (28) en la integral (27) conduce a

$$\int_{\Gamma_c} c_{R_{12}}(s) \left[\phi_{x_1} \right] \left[\eta_{x_1} \right] ds = - \int_{\Gamma_c} c_{R_{12}}(s) \left[\phi_{x_1} \right] \left(\eta_n(c^+, x_2, t) + \eta_n(c^-, x_2, t) \right) ds \tag{29}$$

Finalmente el reemplazo de la expresión (29) en la expresión (25) conduce a

$$\delta F(\mathbf{w}; \mathbf{v}) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\int_{\Gamma_i} (M_n^{(i)} - c_R^{(i)}(s)\phi_n) \eta_n ds + \int_{\Gamma_i} (M_{ns}^{(i)}) \eta_s ds + \int_{\Gamma_i} (Q_n^{(i)} - c_T^{(i)}(s)w) v ds + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\Gamma_c} (M_n^{(i)} \eta_n + M_{ns}^{(i)} \eta_s + Q_n^{(i)} v) ds \right] + \int_{\Gamma_c} c_{R2}^{(i)}(s) [\phi_{x_1}] \left(\eta_n(c^+, x_2, t) + \eta_n(c^-, x_2, t) \right) ds - \int_{\Gamma_c} c_{Tc}^{(i)}(s) w v ds \right\} dt \quad (30)$$

Donde $Q_n^{(i)}, M_n^{(i)}, M_{ns}^{(i)}$ están dados por:

$$Q_n^{(i)} = Q_1^{(i)} n_1^{(i)} + Q_2^{(i)} n_2^{(i)}, \quad (31)$$

$$M_n^{(i)} = M_1^{(i)} (n_1^{(i)})^2 + M_2^{(i)} (n_2^{(i)})^2 + 2H_{12}^{(i)} n_1^{(i)} n_2^{(i)}, \quad (32)$$

$$M_{ns}^{(i)} = (M_2^{(i)} - M_1^{(i)}) n_1^{(i)} n_2^{(i)} + H_{12}^{(i)} \left[(n_1^{(i)})^2 - (n_2^{(i)})^2 \right]. \quad (33)$$

Teniendo en cuenta que es posible elegir independientemente v, η_n y η_s y que el intervalo $[t_0, t_1]$ es arbitrario, la condición de funcional estacionario $\delta F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in D_0$, lleva a las siguientes condiciones de contorno naturales del problema:

$$c_R^{(i)}(s)\phi_n \Big|_{\Gamma_i} = M_n^{(i)} \Big|_{\Gamma_i}, \quad i = 1, 2, \quad (34)$$

$$c_T^{(i)}(s)w \Big|_{\Gamma_i} = Q_n^{(i)} \Big|_{\Gamma_i}, \quad i = 1, 2. \quad (35)$$

$$M_{ns}^{(i)} \Big|_{\Gamma_i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (36)$$

Las Ecuaciones (34), (35) y (36) conducen a las siguientes condiciones:

$$c_R(s)\phi_n \Big|_{\partial R} = M_n \Big|_{\partial R}, \quad (37)$$

$$c_T(s) \Big|_{\partial R} = Q_n \Big|_{\partial R}, \quad (38)$$

$$M_{ns} \Big|_{\partial R} = 0. \quad (39)$$

donde Q_n, M_n y M_{ns} están dados por las ecuaciones (31)-(33) y $Q_i, M_i, i = 1, 2$ y H_{12} dados por las Ecuaciones (16), (17) y (13)-(15) cuando el supraíndice (i) es eliminado. Las expresiones (37)-(39) son las condiciones de contorno a lo largo de ∂R .

5. DERIVACIÓN DE LAS CONDICIONES DE TRANSICIÓN.

Adoptando direcciones admisibles v, η_n y η_s adecuadas la Ecuación (30) se reduce a

$$\delta F(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_c} (M_n^{(i)} \eta_n + M_{ns}^{(i)} \eta_s + Q_n^{(i)} v) ds - \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_c} c_{R2}^{(i)}(s) [\phi_{x_1}] \left(\eta_n(c^+, x_2, t) + \eta_n(c^-, x_2, t) \right) ds - \int_{\Gamma_c} c_{Tc}^{(i)}(s) w v ds \right\} dt \quad (40)$$

Se analizan ahora la integral $\int_{\Gamma_c} (M_n^{(1)} \eta_n + M_{ns}^{(1)} \eta_s + Q_n^{(1)} v) ds$. La línea Γ_c puede ser representada paramétricamente por la función $\alpha(r) = (\alpha_1(r), \alpha_2(r)), r \in [a, b]$ donde a es cero y b la longitud

correspondiente de la línea de rotulas. Teniendo en cuenta que en este caso el vector normal unitario está dado por $\vec{n}^{(1)} = (1, 0)$ y las Ecuaciones (31)-(33) se obtiene:

$$Q_n^{(1)} = Q_1^{(1)} = Q_1(c^-, r, t), \quad (41)$$

$$M_n^{(1)} = M_1^{(1)} = M_1(c^-, r, t), \quad (42)$$

$$M_{ns}^{(1)} = H_{12}^{(1)} = H_{12}(c^-, r, t). \quad (43)$$

Reemplazando las expresiones (41)-(43) en la integral curvilínea, se obtiene:

$$\int_{\Gamma_c} M_n^{(1)} \eta_n ds = \int_a^b M_1(c^-, r, t) \eta_n(c^-, r, t) dr, \quad (44)$$

$$\int_{\Gamma_c} M_{ns}^{(1)} \eta_s ds = \int_a^b H_{12}(c^-, r, t) \eta_s(c^-, r, t) dr, \quad (45)$$

$$\int_{\Gamma_c} Q_n^{(1)} v ds = \int_a^b Q_1(c^-, r, t) v(c^-, r, t) dr, \quad (46)$$

donde se adoptó $\alpha_1(r) = c^-$, $\alpha_2(r) = r$ y $r = x_2$.

En el caso de la integral $\int_{\Gamma_c} (M_n^{(2)} \eta_n + M_{ns}^{(2)} \eta_s + Q_n^{(2)} v) ds$, se obtiene:

$$Q_n^{(2)} = -Q_1^{(2)} = -Q_1(c^+, r, t), \quad (47)$$

$$M_n^{(2)} = M_1^{(2)} = M_1(c^+, r, t), \quad (48)$$

$$M_{ns}^{(2)} = H_{12}^{(2)} = H_{12}(c^+, r, t). \quad (49)$$

y las expresiones de las integrales curvilíneas:

$$\int_{\Gamma_c} M_n^{(2)} \eta_n ds = \int_0^{b-a} M_1(c^+, b-r, t) \eta_n(c^+, b-r, t) dr = \int_a^b M_1(c^+, r, t) \eta_n(c^+, r, t) dr \quad (50)$$

$$\int_{\Gamma_c} M_{ns}^{(2)} \eta_s ds = \int_a^b H_{12}(c^+, r, t) \eta_s(c^+, r, t) dr \quad (51)$$

$$\int_{\Gamma_c} Q_n^{(2)} v ds = -\int_a^b Q_1(c^+, r, t) v(c^+, r, t) ds. \quad (52)$$

Finalmente de (40), (44)-(46) y (50)-(52), mediante un procedimiento análogo al usado en la determinación de las Ecuaciones (34)-(36) resultan las siguientes condiciones de transición del problema:

$$c_{R_{12}}(x_2) (\phi_{x_1}(c^+, x_2, t) - \phi_{x_1}(c^-, x_2, t)) = -M_1(c^+, x_2, t) = -M_2(c^-, x_2, t), \quad (53)$$

$$H_{12}(c^-, x_2, t) = H_{12}(c^+, x_2, t) = 0, \quad (54)$$

$$c_{T_c}(x_2) w(c, x_2, t) = Q_1(c^-, x_2, t) - Q_1(c^+, x_2, t). \quad (55)$$

Dado que $w(\bullet, t), \phi_{x_2}(\bullet, t) \in C(\bar{R})$, existe continuidad de esos desplazamientos en el punto (c^+, x_2) y esto genera las coediciones de transición:

$$w(c^-, x_2, t) = w(c^+, x_2, t) = w(c, x_2, t), x_2 \in [a, b], \quad (56)$$

$$\phi_{x_2}(c^-, x_2, t) = \phi_{x_2}(c^+, x_2, t) = \phi_{x_2}(c, x_2, t), x_2 \in [a, b]. \quad (57)$$

En resumen las condiciones de transición del problema están dadas por las Ecuaciones (53)-(57).

Si se adoptan diferentes valores y/o valores límites de los parámetros de restricción $c_{R_{12}}(x_2)$ y $c_{T_e}(x_2)$ se pueden generar diferentes situaciones.

6. CONSIDERACIONES FINALES

Se demostró que el cálculo de variaciones es una formidable herramienta matemática para obtener a partir de la teoría de placas de primer orden (FSDT) el problema de contorno y autovalores que describe el comportamiento estático y dinámico de placas anisótropas de forma arbitraria con contorno regular, bordes elásticamente restringidos y con una línea intermedia restringida contra traslación y con rótulas restringidas contra rotación.

Las ecuaciones diferenciales fundamentales que gobiernan el problema de la placa fueron obtenidas dividiendo el dominio entero de la misma en dos subdominios, mediante la línea de rótulas. Un producto esencial que proporcionó el cálculo de variaciones son las condiciones de contorno y en particular las condiciones de transición, tanto geométricas como naturales.

7. REFERENCIAS

- [1] I. Guelfand, S. Fomin, *Calculus of Variations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
- [2] C. Dym, I. Shames, *Solid Mechanics: A Variational Approach*. Mc Graw Hill Book Company, 1973.
- [3] J. Troutman, *Variational Calculus and Optimal Control*. New York: Springer-Verlag, 1996.
- [4] R. Grossi, L. Lebedev. Static and dynamic analyses of anisotropic plates with corner points. *Journal of Sound and Vibration*, **243**, 947-958, 2001.
- [5] R. Grossi, L. Nallim. Boundary and eigenvalue problems for generally restrained anisotropic plates, *Journal of Multi-body Dynamics*, **217**, parte K, 241-251, 2003.
- [6] Y. Xiang, J. Reddy, Natural vibration of rectangular plates with an internal line hinge using the first order shear deformation plate theory, *Journal of Sound and Vibration* **263**, 285-297, 2003.
- [7] R. Grossi, V. Quintana, *IV Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería (INMAT)*, *Boundary and eigenvalue problems for generally restrained anisotropic plates with internal hinges*, Buenos Aires, Argentina, 2008.
- [8] M. Huang, X. Ma, T. Sakiyama, H. Matsuda, C. Morita, Natural vibration study on rectangular plates with a line hinge and various boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, **322**, 227-240, 2009.

Agradecimientos

Los autores de este trabajo desean agradecer al Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta por el apoyo recibido mediante el Proyecto C.I.U.N.Sa. N° 1899.