



II CAIM 2010  
Segundo Congreso Argentino  
de Ingeniería Mecánica  
San Juan - Noviembre 2010

## Trazado del desarrollo de chapa, en cambios de forma concéntricas de redonda a cuadrada. Método de cálculo Analítico

Augusto Sergio Antoni, Ricardo Marchese, Carlos Gustavo Agüero

**Departamento de Mecánica - Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología**  
**Universidad Nacional de Tucumán**  
**Av. Independencia 1800 (4000) Tucumán – Argentina**  
Tel/Fax: +54-381-4107577/4363004 - E-mail: [aantoni@herrera.unt.edu.ar](mailto:aantoni@herrera.unt.edu.ar)

### RESUMEN

En este documento se analiza el método de trazado de las piezas, mediante las cuales se cambian de forma las secciones de conductos, determinando analíticamente las dimensiones de la figura del desarrollo plano de las mismas.

Se trata exclusivamente el cambio de forma, concéntrica, de circular a cuadrada y se propone un método novedoso, simple y preciso de cálculo, que lleva a la obtención del trazado de la parte curva, con un solo arco de circunferencia.

Teniendo en cuenta que la parte curva del desarrollo, en este caso particular es un arco de círculo (Radio constante) se pueden plantear en la figura, dos ecuaciones que contienen las incógnitas, Radio (R) y ángulo ( $\alpha$ ), pero el sistema planteado no se puede resolver directamente, por que el ángulo, en una de las ecuaciones esta en forma de una función trigonométrica.

Por ello se buscó otro camino que permite encontrar con una buena aproximación el valor del radio buscado y luego cambiando este valor en forma iterativa en las ecuaciones, encontrar los valores que cumplen con ellas en forma muy precisa, a los fines prácticos.

Se incluye en este trabajo una demostración de la validez de la expresión matemática usada para encontrar el radio aproximado que permite iniciar el método iterativo.

Se incluye asimismo dos ejemplos resueltos empleando el método propuesto.

El procedimiento de cálculo sólo requiere el uso de una calculadora científica.

Con método propuesto se logra determinar rápida y analíticamente la forma del desarrollo, el valor del radio y el ángulo subtendido, de la parte curva del desarrollo de chapa de una transición de forma concéntrica, de redonda a cuadrada y de esa manera se evita el trazado, tradicional para determinar la posición de los sucesivos puntos del trazo curvo, por intersección de arcos de círculos.

**Palabras Claves:** Calderería trazado transiciones de forma.

## 1. Introducción

Las piezas con que se cambia de forma la sección de un conducto, se denominan transiciones. En este caso el cambio de forma considerado es concéntrico de redondo a cuadrado. Estas piezas son formas espaciales, "segmentos de conducto", cuya superficie lateral es una combinación alternada de superficies planas triangulares, con superficies curvas (Segmentos triangulares de cono), cuyas bases y vértices se alternan, con líneas extremas comunes, formando en un extremo una base de forma redonda y en el otro extremo una forma cuadrada. Como se muestra en las figuras 1.a, 1.b y 1.c, en vista de frente.

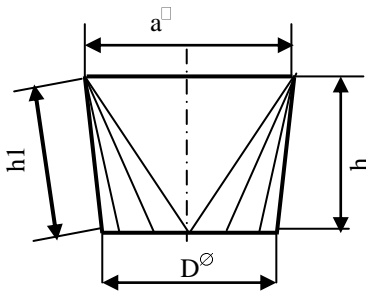


Fig. 1. a

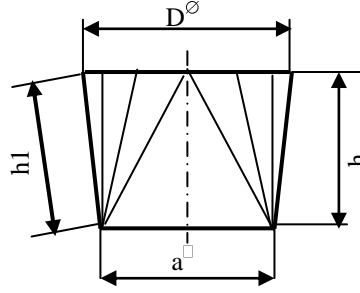


Fig. 1. b

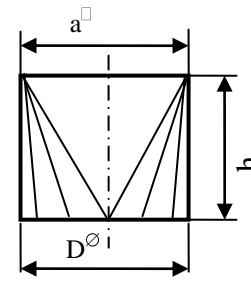


Fig. 1. c

Estas piezas se fabrican a partir de un desarrollo plano de chapa que al ser curvadas, las partes correspondientes a las superficies de segmentos de cono adquiere la forma deseada. Para la explicación del trazado utilizaré una media sección del desarrollo. Este medio desarrollo puede tener diferentes formas, según sea la relación de los perímetros de los extremos, cuadrado y redondo [1, 2]. Las formas de los trazados resultantes se muestran en las figuras: 2.a, 2.b y 2.c.

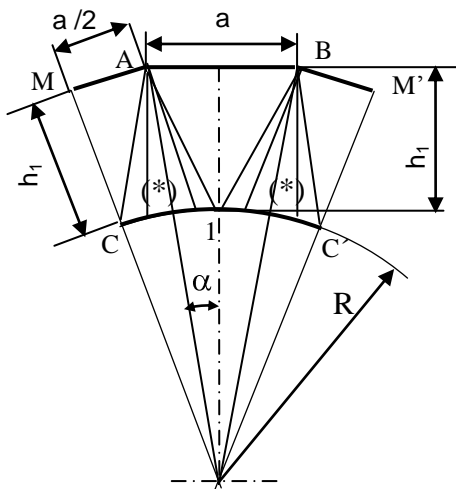


Fig. 2. a

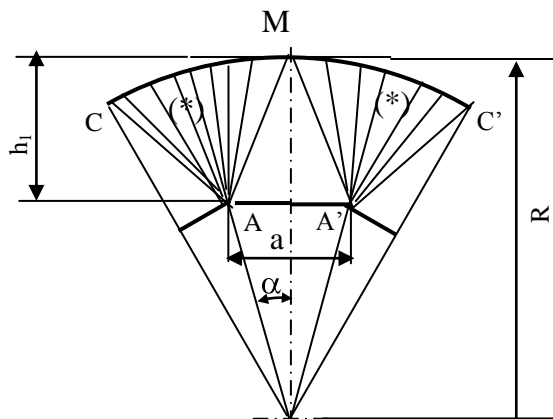
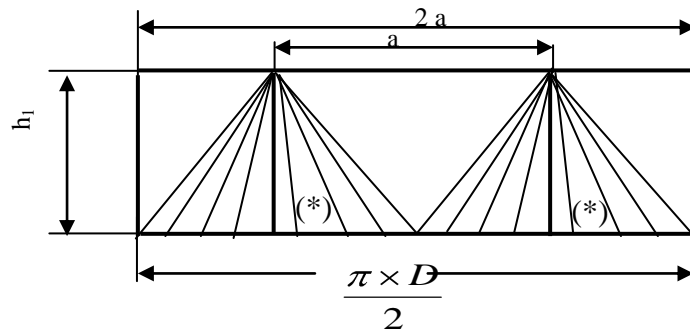


Fig. 2. b

Como se observa en las figuras 2.a y 2.b, la parte curva del trazado es un arco de círculo, y las incógnitas del problema son: El radio "R" y el ángulo " $\alpha$ ", los valores a y  $h_1$  son datos del problema según veremos mas adelante. En la figura 2.c no hay trazos curvos.



(\*). Zonas a curvar, sobre los trazos

Fig. 2. c

**2. DATOS INICIALES:** En la práctica son datos iniciales: las medidas exteriores ó interiores de la pieza terminada y el espesor “s” de chapa con que se la construirá, figura 3.

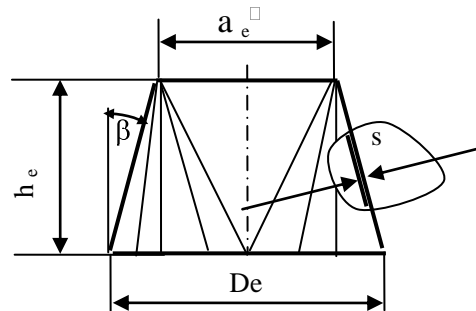


Fig. 3

### 3. DETERMINACIÓN DE LOS VALORES MEDIOS

Para el trazado se debe trabajar con los valores “medios”, paso previo a cualquier determinación, estos se los obtiene con las siguientes expresiones trigonométricas. La figura 4 muestra la pieza en corte.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{D_e - a_e}{2 \times h_e}$$

$$a = a_e - s \times \cos \beta;$$

$$D = D_e - s \times \cos \beta$$

$$h = h_e - s \times \operatorname{sen} \beta.$$

$$h_1 = h / \cos \beta$$

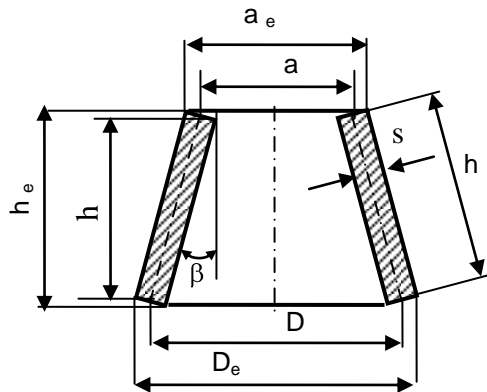


Fig. 4

### 4. PROCEDIMIENTO DE TRABAJO Y CASOS POSIBLES.

Una vez obtenidos los valores medios: D, a, h y h<sub>1</sub>. se calcula los perímetros de la boca cuadrada y de la boca redonda.

$$\text{Perímetro cuadrado} = 4 \times a ; \text{Perímetro Redondo} = \pi \times D.$$

Ahora se debe comparar los perímetros:

**1º Caso** .Si el perímetro del cuadrado es mayor que el perímetro del redondo ó lo que es lo mismo, el cociente del perímetro del cuadrado al redondo es mayor que la unidad, entonces la figura del desarrollo de chapa es la correspondiente a la **figura 2. a**

$$4 \times a - \pi \times D. > 0 ; \text{ ó } 4 \times a / \pi \times D > 1$$

Entonces la formula de cálculo del radio “R” en primera aproximación será:

$$R = \frac{h_1}{\left( \frac{4 \times a}{\pi \times D} - 1 \right)} \quad (\text{ecuación 1.1})$$

**Vea Apéndice:** “Determinación de la formula de cálculo del radio, en primera aproximación” (en pagina 10).

**2º Caso.** Si el perímetro del cuadrado es menor que el perímetro del redondo ó lo que es lo mismo, el cociente del perímetro del cuadrado al redondo es menor que la unidad, entonces la figura del desarrollo de chapa es la correspondiente a la **figura 2. b**

$$4 \times a - \pi \times D. < 0 ; \text{ ó } 4 \times a / \pi \times D < 1$$

Entonces la formula de cálculo del radio “R” en primera aproximación será:

$$R = \frac{h_1}{\left( 1 - \frac{4 \times a}{\pi \times D} \right)} \quad (\text{ecuación 2.1})$$

**3º Caso** .Si el valor absoluto de la diferencia de los perímetros del cuadrado al redondo es cero o muy próximo a cero, ó lo que es lo mismo, el cociente del perímetro del cuadrado al redondo es igual o muy próximo a la unidad, entonces la figura del desarrollo de chapa es la correspondiente a la **figura 2. c.**

$$4 \times a - \pi \times D. \cong 0; \text{ ó } 4 \times a / \pi \times D \cong 1$$

**En este caso no hay que calcular ningún radio de curvatura, por cuanto la figura del desarrollo es un rectángulo y todas las medidas del mismo son conocidas. Es la solución trivial.**

## 5. CALCULO DEL VALOR REAL DEL RADIO Y EL ÁNGULO DEL ARCO SUBTENDIDO

Para calcular el valor real del Radio y del ángulo  $\alpha$ , se debe realizar un procedimiento de cálculo de aproximación. Como se indica a continuación, según sea el caso.

### 5. 1 CUANDO EL PERÍMETRO DEL EXTREMO CUADRADO ES MAYOR QUE EL DEL REDONDO.

**(Primer caso)**, en este caso la figura del desarrollo es la figura 5, y la formula de cálculo del radio inicial es la indicada en la ecuación (1.1):

Si observamos la figura 5, que es el medio desarrollo de la transición, se deben cumplir :

$$a = 2. (R+h_1). \text{tg } \alpha \quad (\text{ecuación 1. 2 }); \text{ arco } C1C' = 4 \times \alpha \text{ (rad) } \times R \quad (\text{ecuación 1.3})$$

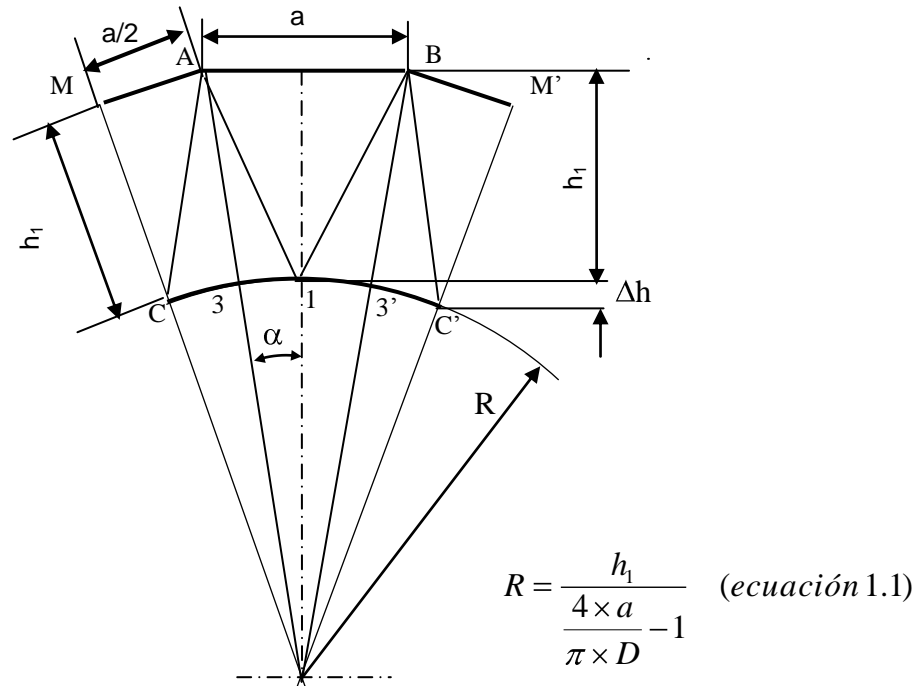


Fig. 5

Si reemplazamos el valor del radio inicial encontrado con la ecuación 1.1, en la ecuación 1.2, podemos despejar el valor de la tangente del ángulo  $\alpha$  (1.4), y de allí encontrar el ángulo " $\alpha$ ", en grados y en radianes.

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{2 \times (R + h_1)} \quad (\text{ecuación 1.4}); \quad \alpha(^{\circ}) = \text{arc.tan } \alpha \quad (\text{ecuación 1.5})$$

$$\alpha(\text{rad}) = \alpha(\text{grados}) \times \frac{\pi}{180}; \quad (\text{ecuación 1.6})$$

Conociendo el valor del ángulo en radianes ecuación (1.6), aplicando la ecuación (1.3) podemos encontrar el valor del arco C 1 C'.

$$\text{Arco calculado: arco C1C}' = 4 \times \alpha \text{ (rad)} \times R \quad (\text{ecuación 1.3}).$$

Este valor "Calculado" se debe comparar con el valor real expresado por la ecuación (1.7)

$$\text{Arco real: C1C}' = \pi \times D / 2. \quad (\text{ecuación 1.7}).$$

Cuando la diferencia (Dif) de estos valores sea cero o próxima a cero, tendremos el valor del radio y del ángulo buscados.

$$\text{Dif} = \text{ecuación (1.7)} - \text{ecuación (1.3)}$$

### 5.1.1 PROCEDIMIENTO ITERATIVO PARA LA DETERMINACIÓN DEL PAR DE VALORES R, $\alpha$ .

**Vea Tabla 1.** Con el radio inicial calculado con la ecuación (1.1) determinamos el "arco calculado" ecuaciones: (1.4), (1.5), (1.6) y (1.3). Calculamos la diferencia, "Dif" entre el arco real ecuación (1.7) y el calculado ecuación (1.3).

Luego se incrementa el valor del radio, en un valor pequeño del orden del 3 %, conviene tomar el próximo valor numérico terminado en cero. Con este valor se repite el cálculo anterior y se determina la diferencia del valor del arco real y el calculado.

**A.** Si esa diferencia **es menor** que la del cálculo inicial, se realiza otros cálculos **incrementando** nuevamente y gradualmente el valor del radio, hasta lograr que la diferencia de los arcos vaya disminuyendo y cambie de signo. Entre los dos últimos cálculos donde ocurra el cambio de signo, estará el valor que hace la diferencia cero. Se tomará el menor de los valores absolutos de los dos últimos cálculos como la solución del problema.

**B.** Si la diferencia es **mayor** que la del calculo inicial, se realizan otros cálculos **disminuyendo** gradualmente el valor del radio, hasta lograr que la diferencia de los arcos cambie de signo. Entre los dos últimos cálculos donde ocurra el cambio de signo, estará el valor que hace la diferencia cero. Se tomará el menor de los valores absolutos de los dos últimos 2 cálculos como la solución del problema.

**TABLA 1.** Ejemplo de cálculo, POR APROXIMACIÓN NUMERICA, 1º Caso. Fig. 5.  
MEDIDAS EN (mm).  $h_1 = 101$ ;  $a = 197$ ;  $D = 165$ .  $R(\text{Inicial}) = 194$

Iteración	Ecuación		(1.4)	(1.5)	(1.6)	(1.3)	(1.7)	(1.7) – (1.3)	
	Variable		Tang.	Angulo	Angulo	Arc. Cal	Arc Real	Dif. Arcos	Observ
	R	$R+h_1$	$\text{tg } \alpha$	$\alpha$ (°)	$\alpha$ (rad.)	C 1 C'	C 1 C'	-----	
1	194	295	0,33389	18,464	0,32225	250,07	259,18	9,10845	C. Inicial
2	200	301	0,32724	18,120	0,31625	253,007		6,1729	
3	212	313	0,31469	17,168	0,30488	258,54		0,639	
4	<b>213</b>	<b>314</b>	<b>0,31369</b>	<b>17,416</b>	<b>0,3039</b>	<b>258,9845</b>		<b>0,1968</b>	<b>Mejor Val</b>
5	214	315	0,31269	17,364	0,303065	259,42		-0,242	C. signo

### 5.1.2 TRAZADO OBTENIDO DE LA MEDIA TRANSICIÓN.

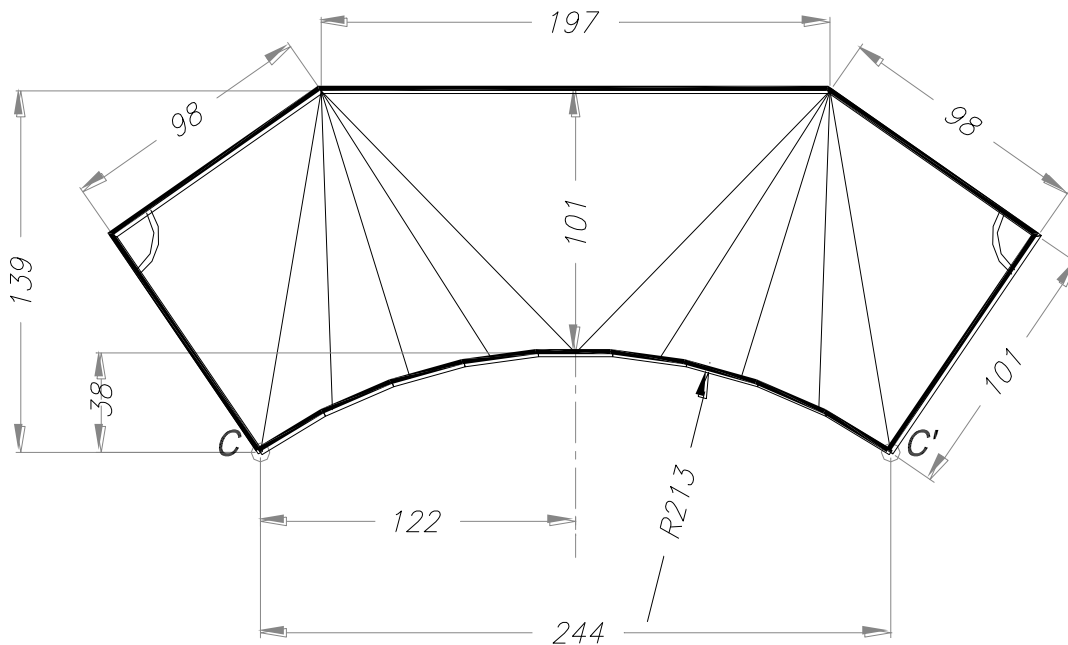


Fig. 6

### 5.1.3 Calculos para el TRAZADO DE LA MEDIA TRANSICIÓN. Fig. 6



encontrar el arco  $C M C'$ , Arco calculado:

$$\text{arco } CMC' = 4 \times \alpha \text{ (rad)} \times R \text{ (ecuación 2.3).}$$

Este valor "Calculado" se debe comparar con el valor real expresado por la ecuación (2.7)

$$\text{Arco real: } CMC' = \pi \times D / 2. \text{ (ecuación 2.7).}$$

Cuando la diferencia (Dif) de estos valores sea cero o proxima a cero, tendremos el valor del radio y del angulo buscados.

$$\text{Dif} = \text{ecuación (2.7)} - \text{ecuación (2.3)}$$

### 5.2.1 PROCEDIMIENTO ITERATIVO PARA LA DETERMINACIÓN DEL PAR DE VALORES $R$ , $\alpha$ .

Con el radio inicial calculado con la ecuación (2.1) determinamos el "arco calculado" ecuaciones: (2.4), (2.5), (2.6) y (2.3). Calculamos la diferencia, "Dif" entre el arco real ecuación (2.7) y el calculado, ecuación (2.3). Luego se incrementa el valor del radio, en un valor pequeño del orden del 3 %, conviene tomar el próximo valor numérico terminado en cero. Con este valor se repite el cálculo anterior y se determina la diferencia del valor del arco real y el arco calculado. Vea ejemplo Tabla 2.

La forma de realizar la determinación del valor optimo, según sea la diferencia menor o mayor que la obtenida en el primer cálculo, es la misma que se indica en el apartado 5.1. 1, (A y B) para el primer caso.

**TABLA 2: Ejemplo de cálculo, POR APROXIMACIÓN NUMERICA, 2º Caso. Fig. 7.**

**MEDIDAS EN (m m): a = 340; D = 467; h<sub>1</sub> = 280; Valor inicial R = 3874,766629**

Iteración	Variable		(2.4)	(2.5)	(2.6)	(2.3)	(2.7)	(2.7)– (2.3)	Obser-
	R	R -h <sub>1</sub>	Tangen	Angulo	Angulo	Arco. Calc	Arc Real	Dif. Arcos	
			tg $\alpha$	$\alpha$ (º)	$\alpha$ (rad.)	C M C'	C M C'	(DIF)	
1	3874,77	3594,77	0,047290925	2,70755	0,0472557	732,5618846	<b>733,5618</b>	1,141725413	C Inicial
2	3880	3600	0,047222	2,70362	0,0471871	732,3448509	<b>846</b>	1,217033651	
3	3870	3590	0,04735376	2,71114	0,0473184	732,4890328		1,072851809	
<b>4</b>	<b>3800</b>	3520	0,048295454	<b>2,76497</b>	0,0482579	733,5209628		<b>0,040921769</b>	<b>Mejor Val</b>
5	3750	3470	0,048991354	2,80475	0,0489552	734,2832285		-0,72134394	C. signo

Resultado: El calculo N° 4 es el valor más próximo al valor exacto y es el que usaremos para el trazado.

#### TRAZADO DE LA MEDIA TRANSICIÓN.

Con los valores obtenidos de  $R$  y  $\alpha$  (º), podemos determinar las medidas para el trazado empleando relaciones trigonometricas, vea figura 7.

$$CC' = 2 \times R \times \text{sen } 2\alpha ; \Delta h = R \times (1 - \text{cos } 2\alpha)$$

**EJEMPLO Calculo de trazado:** medidas en (m m): Ver las posiciones de los puntos en fig. 7.

Datos: a = 340; h<sub>1</sub> = 280; D = 467

**Resultado del cálculo iterativo** (Tabla de Cálculo 2):  $R = 3800$ ;  $\alpha$  (º) = 2,764977326

**Puntos calculados para el trazado y comprobación:**

$$CC' = 2 \times R \times \text{sen } 2\alpha ; \quad CC' = 2 \times 3800 \times \text{sen } 5,529954652 ; \quad CC' = 732,3826625 \text{ mm}$$

$$f = R \times (1 - \text{cos } 2\alpha) ; \quad f = 3800 \times (1 - \text{cos } 5,529954652) ; \quad f = 17,68 \text{ mm}$$

$$H = h_1 + \frac{a}{2} \times \operatorname{sen} 2\alpha; \quad H = 280 + 170 \times \operatorname{sen} 5,52995465 \text{ } 2; \quad H = 296,38 \text{ mm}$$

$$BB' = a \times (1 + \cos 2\alpha); \quad BB' = 340 \times (1 + \cos 5,52995465 \text{ } 2); \quad BB' = 678,41 \text{ mm}$$

Valores redondeados para el trazado: Expresados en (m m) .Vea fig. (8)

Datos:  $a = 340$ ;  $h_1 = 280$ ;  $R = 3800$ ;  $C C' = 732$

Valores de verificación:  $B B' = 678$ ;  $f = 18$ ;  $H = 296$

### TRAZADO OBTENIDO DE LA MEDIA TRANSICIÓN.

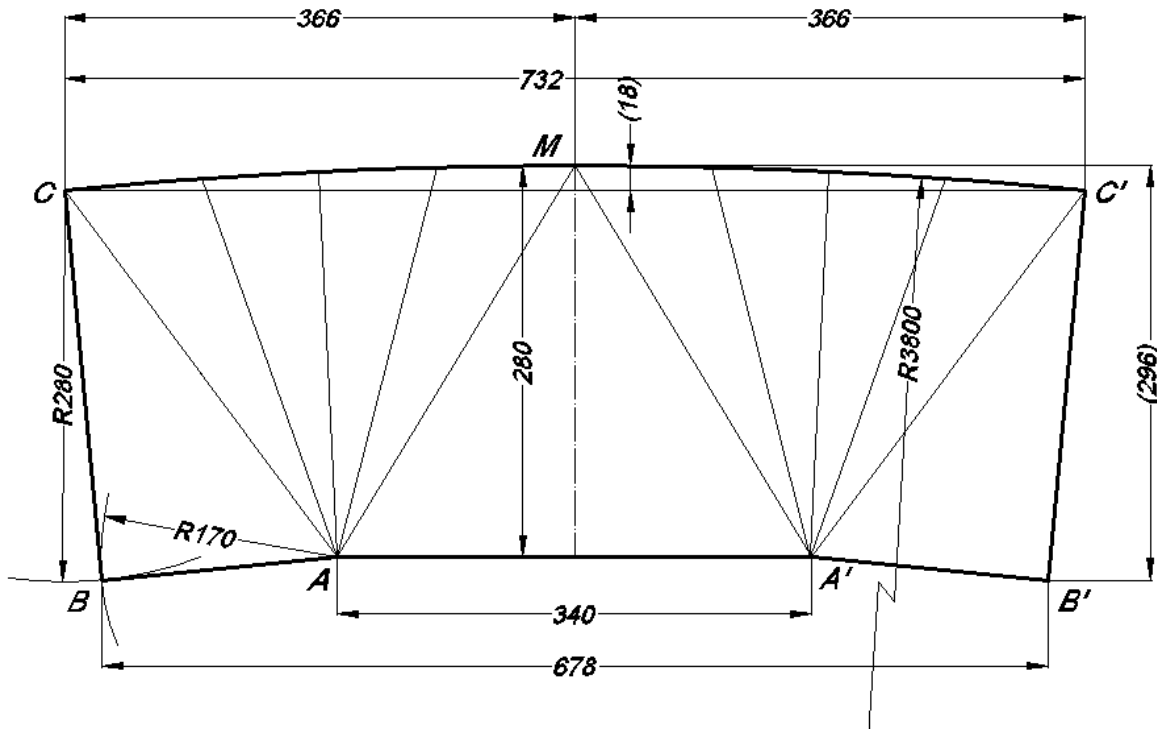


Figura (8).

#### Guía de trazado

1. Trazar el segmento horizontal  $A A'$  con el valor  $a = 340$ .
2. Desde el punto medio del segmento  $A A'$  trazar una perpendicular, sobre la misma a partir del centro del segmento  $A A'$  y con la medida  $h_1 = 280$ , determinar el punto  $M$ .
3. Trazar un arco con centro sobre la perpendicular, antes trazada, que pasa por  $M$  y Radio  $R = 3800$ . Trace 2 paralelas a la vertical de simetría que pasa por el punto  $M$  a una distancia: igual a la mitad del segmento  $CC'$  ( $732/2 = 366$ ). Donde se corta el arco  $R = 3800$  con las paralelas, estarán ubicados los puntos  $C$  y  $C'$
4. Trace un arco con radio  $h_1 = 280$  y centro en  $C$  y córtelo a ese arco con otro de radio  $a/2 = 170$  con centro en el punto  $A$ . Allí obtendrá el Punto  $B$ . Proceda en forma similar desde  $C'$  y  $A'$  para obtener el punto  $B'$  y así se cierra el contorno.
5. Trace las rectas  $AC$ ,  $AM$ ;  $A'M$  y  $A'C'$  y 6 o mas rayos intermedios con centro en  $A$  y  $A'$  que corten al trazo circular  $CC'$ . Sobre cada uno de ellos se marca la chapa para su curvado, reglado y así se podrá obtener los segmentos de cono que dan lugar a la base circular de la pieza

6. Los triángulos  $AMA'$ ,  $ABC$  y  $A'B'C'$  son superficies planas que darán lugar a la superficie cuadrada de la pieza.

Los valores: (678), (296), (18) son valores de comprobación.

**6. APENDICE: DETERMINACIÓN DE LA FORMULA DE CÁLCULO DEL RADIO, EN PRIMERA APROXIMACIÓN.**

Si la forma del medio desarrollo de chapa es la mostrada en la figura 5, sobre dicha figura se pueden establecer las siguientes relaciones trigonométricas:

$$C1C' = 4x\alpha(\text{radianes})xR; \quad (\text{ecuación a.1}); \quad \frac{a}{2} = (R + h_1)x \operatorname{tg} \alpha \quad (\text{ecuación a.2})$$

Por otra parte sabemos que el desarrollo del arco  $C1C'$  debe ser igual al medio perímetro del extremo redondo de la transición, de diámetro  $D$ .

$$C1C' = \frac{\pi x D}{2} \quad (\text{ecuación a.3})$$

Combinando las ecuaciones (a.1) y (a.3), nos queda:

$$\frac{\pi x D}{2} = 4x\alpha(\text{radianes})xR \quad (\text{ecuación a.4})$$

Las ecuaciones (a.2) y (a.4), conforman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:  $R$  y  $\alpha$  (radianes), pero en una ecuación el ángulo está como ángulo en radianes y en la otra está como tangente del ángulo. Se puede hacer una simplificación para el cálculo, en primera aproximación, del radio del arco  $C1C'$  si se considera que para pequeños ángulos, el valor de la tangente tiene muy poca diferencia con el valor del ángulo en radianes, como se observa en la tabla adjunta, con tres valores de ángulo.

**Tabla 3.**

$\alpha$ (°)	$\operatorname{tg} \alpha$	$\alpha$ (radianes)	$\operatorname{tg} \alpha - \alpha$ (radianes)
2	0,034920769	0,034906585	$1,41844518 \times 10^{-5}$
10	0,17632698	0,174532925	$1,79405509 \times 10^{-3}$
15	0,26794449192	0,261799387	$6,148804632 \times 10^{-3}$

Conforme a ello, consideraremos la tangente y el ángulo en radianes, como iguales y con ello nos queda el sistema de ecuaciones siguiente a resolver:

$$\frac{\pi x D}{2} = 4x\alpha(\text{radianes})xR \quad (\text{ecuación a.4}); \quad \frac{a}{2} = (R + h_1) x \alpha(\text{radianes}) \quad (\text{ecuación a.5})$$

Despejando  $\alpha$  (radianes) de (a.5) y reemplazando dicho valor en (a.4) nos queda:

$$\frac{\pi x D}{2} = 4 x \frac{a}{2x(R + h_1)} x R; \quad \text{Operando obtenemos: } \pi x D x R + \pi x D x h_1 = 4 x a x R;$$

$$4 x a x R - \pi x D x R = \pi x D x h_1; \quad \text{Sacando factor común: } R (4a - \pi.D) = \pi x D x h_1;$$

Finalmente despejando  $R$ , resulta:

$$R = \frac{h_1}{\left(\frac{4a}{\pi.D} - 1\right)}; \quad \text{ecuación (1.1)}$$

- Esta expresión nos permite calcular el Radio del sector curvo  $C1C'$ , fig. 5, siempre que el denominador sea un número positivo. Para que ello sea posible debe ser:  
 $4.a > \pi . D$ . En este caso, la figura 5 supuesta, es la correcta.
- Si el denominador de la ecuación es cero, significa que el radio es infinito y la figura del medio desarrollo de chapa será la mostrada en la figura 2.c.
- Si el denominador de la ecuación (1.1) resulta negativo entonces será  $4.a < \pi . D$ , esto quiere decir que la forma de la figura no es la supuesta, en este caso la figura del desarrollo será la mostrada en la figura 7 y la expresión para calcular el radio será:

$$R = \frac{h_1}{\left(1 - \frac{4 \times a}{\pi \times D}\right)}; \text{(ecuación 2.1)}$$

**Nota:** De la misma manera que se ha demostrado que la ecuación (1.1), es válida para los desarrollos de la forma de la figura 5, se puede fácilmente demostrar que la ecuación (2.1) es válida para los desarrollos de la forma de la figura 7. Partiendo de la base que en ella se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$a = 2 . (R - h_1) . \text{tg } \alpha \text{ (ecuación 2.2) ; arco } CMC' = 4 . \alpha \text{ (rad) } . R \text{ (ecuación 2.3)}$$

Esta demostración no se realiza en este documento por razones de espacio.

#### DISCUSIÓN:

El método propuesto, como puede observarse en los ejemplos de aplicación, es de fácil empleo y nos conduce a resultados muy precisos.

Con él, se puede determinar por cálculo los valores del trazado de la parte curva (Radio y arco), en lugar de obtener estos valores como consecuencia del posicionamiento de puntos por intersección de arcos y ubicación de los mismos en forma consecutiva, por métodos de dibujo. [1, 2]

**Por lo antes analizado consideramos, que es de gran conveniencia el empleo del método expuesto.**

#### CONCLUSIONES:

El método de calculo propuesto permite obtener muy sencillamente un valor aproximado del radio y el ángulo del arco subtendido y luego mediante aproximaciones numéricas ajustar el valor de los mismos hasta tener una mínima diferencia con los valores teóricos. Con ello, es posible determinar rápida y analíticamente la forma y las medidas del desarrollo de chapa de una pieza de transición de forma, concéntrica de redonda a cuadrada.

#### Referencias:

- [1] French Thomas E. y otros; Engineering Drawing and Graphic Technology; Thirteen Edition; Mc Graw Hill. NY. ISBN 0-07-022161-8.
- [2] Olave Villanueva, Antonio. Trazado practico de desarrollos en Calderería. Ediciones CEAC S. A; Barcelona. España.