FORO DOCENTE DEL AREA MECANICA DE LAS INGENIERIAS
FoDAMI

II CAIM 2010
Segundo Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica
San Juan - Noviembre 2010

EL USO DE VENTANAS PERSONALIZADAS EN EL ESTUDIO DE LAS DEFORMACIONES DE COLUMNAS Y VIGAS

Marta G. Caligaris, Georgina B. Rodriguez y Lorena F. Laugero

Grupo Ingeniería & Educación
Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional San Nicolás
Colón 332, (2900) San Nicolás, Argentina
Tel: 3461- 420830 / 425266 - E-mail: gie@frsn.utn.edu.ar

RESUMEN

La necesidad de resolver las ecuaciones diferenciales no lineales que gobiernan las deformaciones en columnas y vigas se presenta con frecuencia al resolver problemas de estabilidad. Aunque en algunos casos es posible encontrar la solución exacta de este tipo de ecuaciones, la mayoría de ellas no pueden ser resueltas aplicando un procedimiento analítico.

Una solución aproximada puede obtenerse aproximando la ecuación diferencial no lineal por medio de una ecuación diferencial lineal cuya solución exacta puede ser determinada rápidamente [1]. Otra opción, consiste en resolver numéricamente la ecuación no lineal planteada utilizando un método adecuado [2].

Si bien la aplicación del primer procedimiento ha dado muy buenos resultados y aún lo sigue haciendo, es importante notar que se trata de una metodología que presenta fuertes limitaciones en cuanto a las posibilidades de análisis.

Por esta razón, es que la solución numérica de este tipo de problemas se irá convirtiendo en la norma, en lugar de la excepción, ya que una solución “aproximada” de un modelo real de un problema mecánico suele ser más precisa que la solución “exacta” de un modelo matemático simplificado.

En el presente trabajo se mostrará una ventana personalizada, generada en MAPLE 11, donde el alumno por medio de su manipulación podrá comparar las soluciones obtenidas al aplicar los dos procedimientos de aproximación mencionados, así como también, analizar las ventajas y desventajas de la aplicación de tales procedimientos [3].

Por otra parte, la incorporación de este tipo de herramientas en el aprendizaje de los alumnos permitirá que los mismos experimenten y puedan comprender la influencia de algunas variables sobre la solución y así dar respuesta a algunas preguntas como “¿qué sucede si ...?”.

Es decir, los alumnos podrán adquirir una percepción del fenómeno físico en estudio sin necesidad de realizar cálculos tediosos y sin que les demande demasiado tiempo.

Palabras Claves: Columnas, vigas, diferencias finitas, Maple, ventanas personalizadas.

1. INTRODUCCIÓN

Una de las herramientas fundamentales del ingeniero consiste en el "cálculo", esto es, la predicción cuantitativa del comportamiento de un sistema. Para ello, debe hacer uso de conceptos físicos y matemáticos, además de cuestiones relacionadas con el estado del arte del problema en estudio, para formular un modelo matemático adecuado. Dicho modelo no es más que un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas representan magnitudes de interés que permiten describir el comportamiento del objeto bajo análisis.

Para llevar a cabo la predicción en sí misma, el ingeniero debe resolver las mencionadas ecuaciones para dedicarse, a continuación, a la interpretación técnica y al análisis de los resultados.

En muchas situaciones, los modelos pertinentes involucran problemas gobernados por ecuaciones diferenciales no lineales.

Debido a la gran dificultad para obtener soluciones analíticas de las ecuaciones aludidas, la ingeniería ha recurrido a soluciones aproximadas utilizando dos procedimientos distintos: aproximando la ecuación diferencial no lineal por medio de una ecuación diferencial lineal cuya solución exacta puede ser determinada rápidamente o resolviendo la ecuación no lineal planteada utilizando un método numérico adecuado [1-2].

Si bien la aplicación del primer procedimiento ha dado muy buenos resultados y aún lo sigue haciendo, y es lo que constituye la denominada "ingeniería práctica", es importante notar que se trata de una metodología que presenta algunas limitaciones en cuanto a las posibilidades de análisis, hecho que se hace más evidente si se consideran las posibilidades que presenta la tecnología moderna.

En el presente trabajo, se mostrará una ventana personalizada donde los alumnos en el bloque de Análisis Numérico de la cátedra Cálculo Avanzado, por medio de su manipulación y visualización, podrán comparar las soluciones obtenidas al aplicar los dos procedimientos mencionados a las ecuaciones diferenciales que gobiernan las deformaciones en columnas y vigas, analizar las ventajas y desventajas de la aplicación de tales procedimientos y, fundamentalmente, darse cuenta de la importancia y aplicabilidad de los métodos numéricos estudiados en problemas propios de la especialidad.

2. EMPLEO DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERNCIALES

Existen diversas razones por las cuales cada vez es más necesario acudir a un método de aproximación numérica para resolver problemas modelizados por ecuaciones diferenciales cuya solución analítica no es obtenida fácilmente. A continuación, se detallan las más importantes.

2.1. Una mejor elaboración de modelos

Se debe establecer una distinción entre un problema del mundo real y el modelo matemático, que es una representación idealizada del mismo.

Las soluciones que se obtienen son las soluciones de los modelos matemáticos, y el grado de aplicabilidad de estas soluciones a los problemas físicos reales depende de la precisión del modelo. Una solución "aproximada" de un modelo real de un problema de ingeniería suele ser más precisa que la solución "exacta" de un modelo matemático muy simplificado.

2.2. Flexibilidad

Los problemas de ingeniería a menudo requieren estudios paramétricos extensos con el fin de entender la influencia de algunas variables sobre la solución y así elegir el conjunto correcto de variables y dar respuesta a algunas preguntas de "¿qué sucede si ...?". Se trata de un proceso iterativo que es tedioso en extremo y requiere de mucho tiempo si se realiza a mano. Las computadoras y los métodos numéricos resultan adecuados para esos cálculos y con ellos se puede resolver una amplia gama de problemas relacionados mediante pequeñas modificaciones en el código o las variables de entrada. En la actualidad es casi inconcebible realizar cualquier estudio significativo de optimización en ingeniería sin el poder y la flexibilidad de las computadoras y los métodos numéricos [4].

3. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA CURVA ELÁSTICA

Por la acción de cargas transversales una viga se flexiona, deformándose así su eje longitudinal según una línea curva. En la práctica de ingeniería suele ser necesario determinar las desviaciones respecto de la posición original, es decir, las flechas, en diversos puntos a lo largo del eje de la viga [1].
Para deducir la ecuación diferencial que gobierna esta deformación, denominada ecuación diferencial de la curva elástica, se utiliza la relación entre la curvatura κ y el momento flexionante M. Se puede demostrar que la curvatura de la viga está dada por:

$$\kappa = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M}{E \cdot I} \tag{1}$$

donde y es la flecha o desviación de un punto del eje de la viga respecto a su posición inicial y el producto $E \cdot I$ es la rigidez flexional de la viga. Derivando la expresión (1) con respecto a x y teniendo en cuenta que,

$$V = \frac{dM}{dx} \tag{2}$$

$$P = -\frac{dV}{dx} \tag{3}$$

donde V es la fuerza cortante y P la carga, se obtiene:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{P}{E \cdot I} \tag{4}$$

La ecuación diferencial no lineal de segundo orden (4) sujeta a determinadas condiciones en los extremos constituye lo que matemáticamente se denomina problema de frontera. Aunque es posible encontrar la solución exacta de una ecuación diferencial no lineal sujeta de determinadas condiciones, la mayoría de ellas no pueden ser resueltas aplicando un procedimiento analítico. Por esta razón, una solución aproximada puede ser obtenida aplicando uno de los dos procedimientos que se detallaron en la introducción.

3.1. Aproximación de la ecuación diferencial no lineal por medio de una ecuación diferencial lineal

Una alternativa para poder resolver el problema de frontera planteado, consiste en sustituir la ecuación diferencial no lineal por una ecuación diferencial lineal cuya solución exacta puede ser determinada sin inconvenientes.

En la mayor parte de los casos de diseño práctico, sólo se producen flechas muy pequeñas en las vigas [1]. Por lo tanto, la curva elástica será muy aplanada. En consecuencia, puede suponerse que:

$$\kappa = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{E \cdot I} \tag{5}$$

De esta manera, la ecuación diferencial de la curva elástica queda simplificada de la siguiente forma:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{P}{E \cdot I} \tag{6}$$

3.2. Resolución numérica de la ecuación diferencial no lineal

Uno de los métodos numéricos más aplicados para resolver ecuaciones diferenciales sujetas a condiciones de frontera es el método de diferencias finitas.

El método de diferencias finitas consiste en discretizar la ecuación diferencial. En primer lugar, se divide el dominio de análisis en una red de puntos. Luego, se reemplazan las derivadas en la ecuación diferencial por aproximaciones de cocientes de diferencias adecuadas. Así, por ejemplo, la aproximación en diferencias finitas de la derivada de segundo orden está dada por:

$$y''(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - 2 \cdot y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} \tag{7}$$

donde x_i es uno de los puntos de la red y h es la distancia entre dos de ellos.

De esta manera, al sustituir cada derivada por su correspondiente aproximación se obtiene una expresión general que permitirá escribir cada una de las ecuaciones algebraicas que constituyen el sistema de ecuaciones de diferencias finitas. Por medio de la solución de dicho sistema, se determina el valor de la función incógnita en los puntos seleccionados.

4. GENERACIÓN DE VENTANAS PERSONALIZADAS

La ventana personalizada que se presenta en este trabajo es un MAPLET, es decir, una interfaz gráfica a medida del usuario realizada en MAPLE, que accede a su motor de cálculo. Aunque para generar MAPLETS se usa el entorno Java, no hace falta saber programar en este lenguaje para diseñarlos y hacerlos funcionar, aunque sí es necesario tener una noción de programación en MAPLE [3].

La idea de este desarrollo propio es mostrar a los alumnos la importancia de la aplicación de los métodos numéricos en problemas propios de la especialidad, como lo es la deformación de vigas o columnas.

De esta manera, los alumnos podrán visualizar rápidamente y en una interfaz amigable, los distintos resultados que se obtienen cuando se aplican los dos procedimientos de aproximación o cuando se modifican, por ejemplo, las condiciones de frontera o se cambia la carga a la cual está sometida la viga.

Así, el alumno podrá focalizar su atención en el problema que se está analizando, sin preocuparse por los comandos necesarios para obtener tales soluciones.

4.1. Ventana personalizada de flexión de vigas con carga uniforme

La necesidad de resolver las ecuaciones diferenciales no lineales que gobiernan las deformaciones en vigas se presenta con frecuencia al resolver problemas de estabilidad. Aunque en algunos casos es posible encontrar la solución exacta de este tipo de ecuaciones, la mayoría de ellas no pueden ser resueltas aplicando un procedimiento analítico. Es por ello que se eligió este tipo de problema para que los alumnos puedan ver la aplicabilidad de uno de los métodos numéricos estudiados en el bloque de Análisis Numérico para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

En la ventana principal del MAPLET, que se muestra en la Figura 1, se presentan cuatro vigas cargadas uniformemente, con diferentes tipos de apoyo.

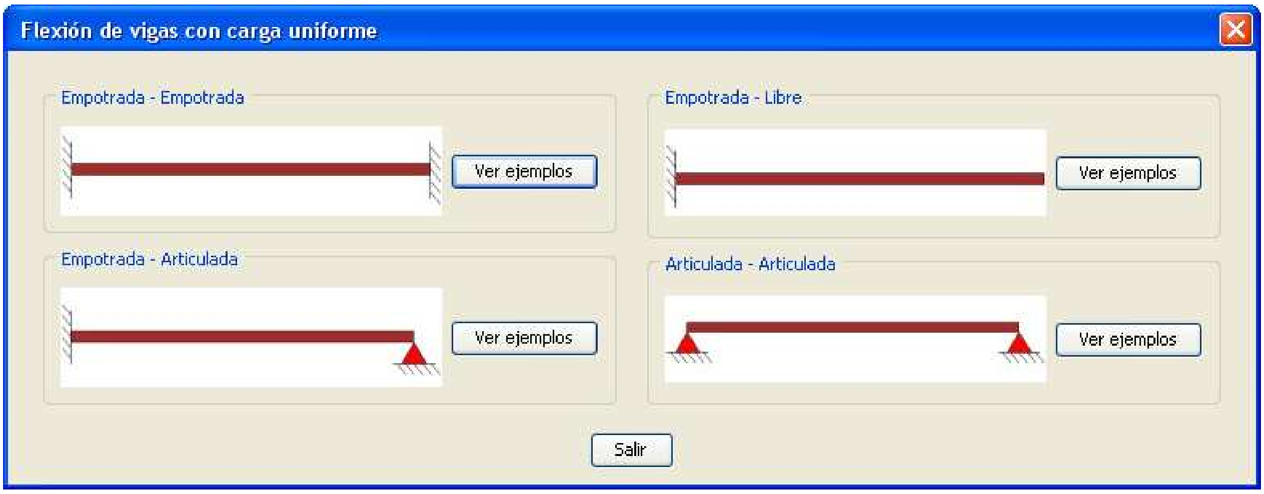


Figura 1. Ventana personalizada de flexión de vigas con carga uniforme

Para la utilización del MAPLET, se debe presionar sobre el botón **Ver ejemplos** correspondiente a cada uno de los tipos de apoyo a los que puede estar sujeta la viga. Al presionar cada uno de estos botones, se abre una nueva ventana, como la que se observa en la Figura 2.

En cada una de estas ventanas, se proponen cinco problemas donde el alumno no sólo podrá hacer comparaciones y analizar las ventajas y desventajas de las soluciones obtenidas al emplear el método de diferencias finitas (solución discreta) o al resolver la ecuación diferencial lineal simplificada (solución continua), sino que también podrán extraer distintas conclusiones al ver cómo cambia la solución obtenida al modificar los distintos parámetros que influyen en la misma, como por ejemplo, la carga a la que está sometida, la sección transversal o el material con el que está construida la viga.

En todos los problemas se utiliza el sistema internacional para las unidades.

Si se quieren observar las aproximaciones obtenidas y calcular la diferencia que hay entre ellas en cada punto basta con pulsar el botón **Ver tabla de valores** que se encuentra en la parte inferior de la ventana.

En esta nueva ventana se podrán ver, en forma de tabla, la deflexión en cada uno de los puntos seleccionados utilizando los dos procedimientos y su diferencia, en valor absoluto. De esta manera, como se puede observar en la Figura 3, los alumnos podrán establecer comparaciones entre los distintos procedimientos sin necesidad de efectuar tediosos cálculos.

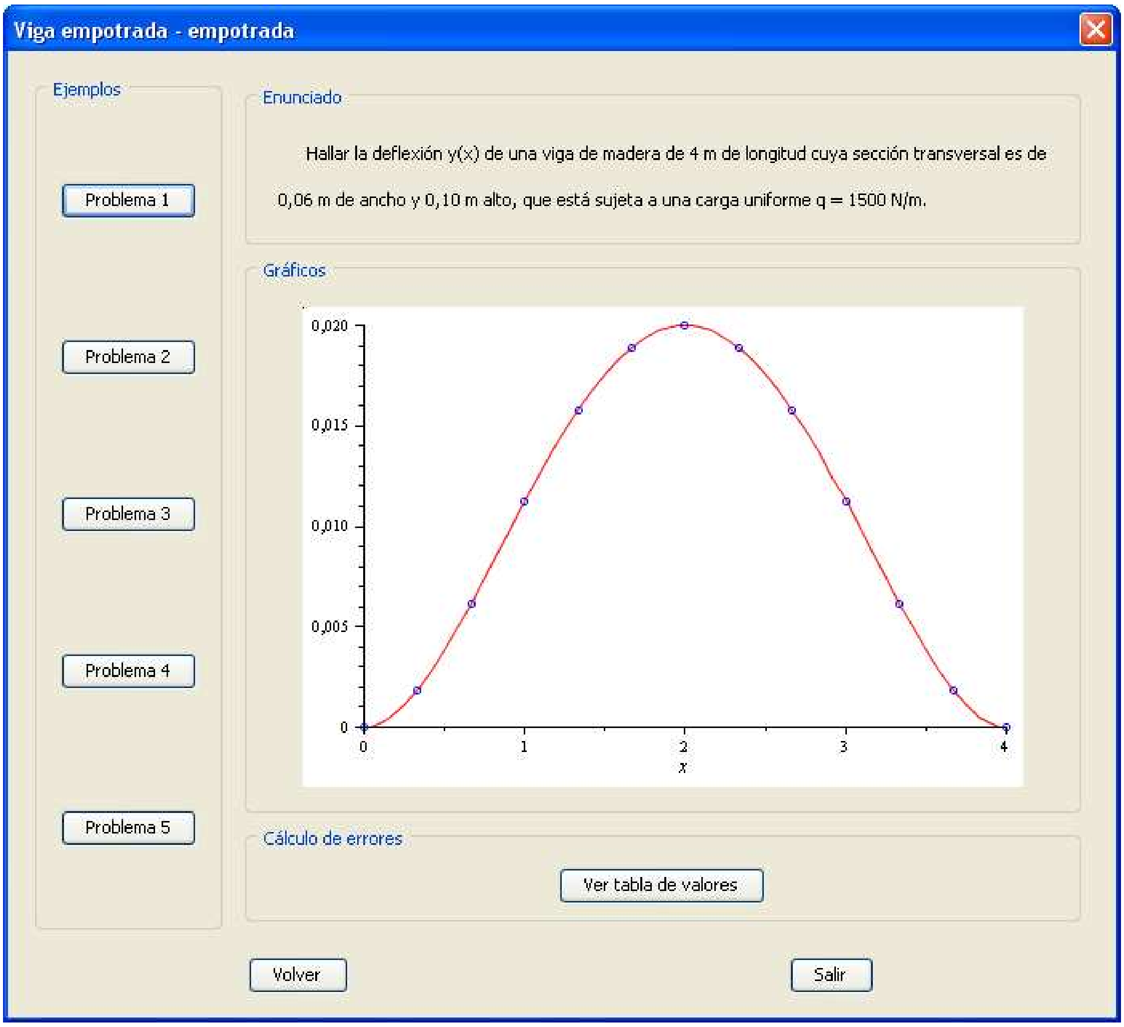


Figura 2. Ventana personalizada de flexión de vigas con carga uniforme

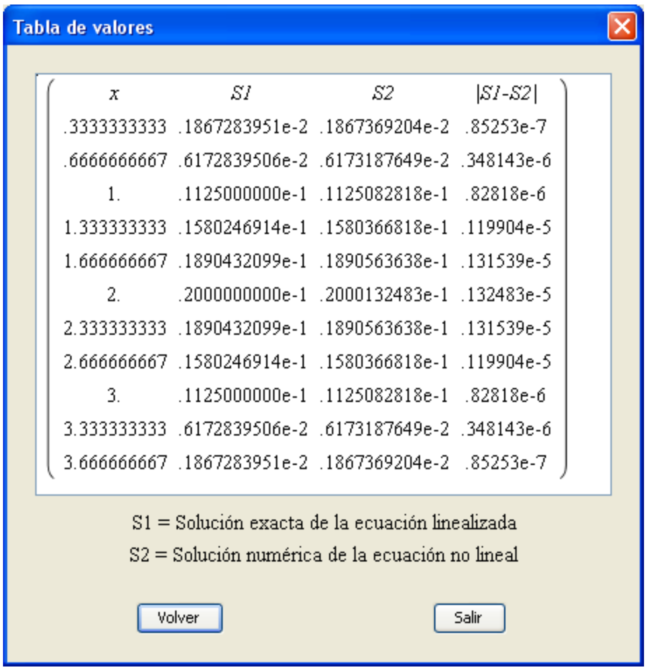


Tabla de valores

x	$S1$	$S2$	$\lvert S1-S2 \rvert$
.3333333333	.1867283951e-2	.1867369204e-2	.85253e-7
.6666666667	.6172839506e-2	.6173187649e-2	.348143e-6
1.	.1125000000e-1	.1125082818e-1	.82818e-6
1.333333333	.1580246914e-1	.1580366818e-1	.119904e-5
1.666666667	.1890432099e-1	.1890563638e-1	.131539e-5
2.	.2000000000e-1	.2000132483e-1	.132483e-5
2.333333333	.1890432099e-1	.1890563638e-1	.131539e-5
2.666666667	.1580246914e-1	.1580366818e-1	.119904e-5
3.	.1125000000e-1	.1125082818e-1	.82818e-6
3.333333333	.6172839506e-2	.6173187649e-2	.348143e-6
3.666666667	.1867283951e-2	.1867369204e-2	.85253e-7

S1 = Solución exacta de la ecuación linealizada
S2 = Solución numérica de la ecuación no lineal

Volver Salir

Figura 3. Tabla de los valores obtenidos

4.2. Algunos ejemplos de uso

El uso de este MAPLET por parte del alumno no sólo permite que éste se dé cuenta de la aplicabilidad de los métodos numéricos estudiados en problemas propios de la especialidad sino que hace posible que se modifique la forma de enseñar, permitiendo incorporar la "visualización" y la "exploración" en las actividades de los estudiantes [5].

Debe notarse, que la capacitación que se requiere para utilizar este tipo de herramienta es mínima debido a que las ventanas presentan una interfaz muy sencilla de interpretar y manipular, lo que posibilita una mayor concentración en los conceptos que se quieren destacar o profundizar.

En un primer ejemplo, los alumnos podrán determinar con facilidad la influencia de la carga a la que está sujeta una viga de hierro fundido de 3 m de longitud, empotrada – articulada, y cuya sección transversal es de 0,05 m de ancho y 0,05 m de alto.

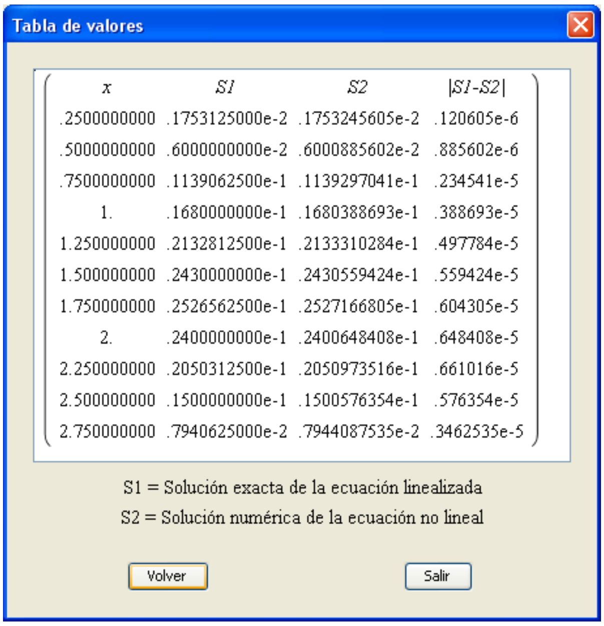


Tabla de valores

x	S1	S2	|S1-S2|
.2500000000	.1753125000e-2	.1753245605e-2	.120605e-6
.5000000000	.6000000000e-2	.6000885602e-2	.885602e-6
.7500000000	.1139062500e-1	.1139297041e-1	.234541e-5
1.	.1680000000e-1	.1680388693e-1	.388693e-5
1.250000000	.2132812500e-1	.2133310284e-1	.497784e-5
1.500000000	.2430000000e-1	.2430559424e-1	.559424e-5
1.750000000	.2526562500e-1	.2527166805e-1	.604305e-5
2.	.2400000000e-1	.2400648408e-1	.648408e-5
2.250000000	.2050312500e-1	.2050973516e-1	.661016e-5
2.500000000	.1500000000e-1	.1500576354e-1	.576354e-5
2.750000000	.7940625000e-2	.7944087535e-2	.3462535e-5

S1 = Solución exacta de la ecuación linealizada
S2 = Solución numérica de la ecuación no lineal

Volver Salir

Figura 4. Solución obtenida cuando $q = 3000 N/m$

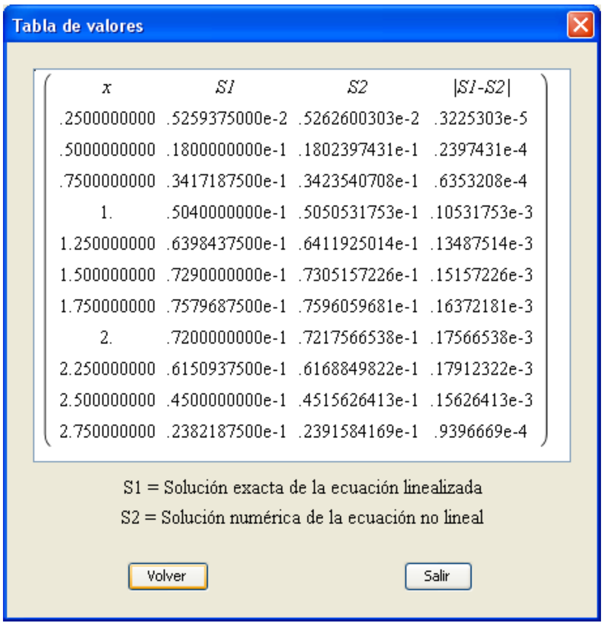


Tabla de valores

x	S1	S2	|S1-S2|
.2500000000	.5259375000e-2	.5262600303e-2	.3225303e-5
.5000000000	.1800000000e-1	.1802397431e-1	.2397431e-4
.7500000000	.3417187500e-1	.3423540708e-1	.6353208e-4
1.	.5040000000e-1	.5050531753e-1	.10531753e-3
1.250000000	.6398437500e-1	.6411925014e-1	.13487514e-3
1.500000000	.7290000000e-1	.7305157226e-1	.15157226e-3
1.750000000	.7579687500e-1	.7596059681e-1	.16372181e-3
2.	.7200000000e-1	.7217566538e-1	.17566538e-3
2.250000000	.6150937500e-1	.6168849822e-1	.17912322e-3
2.500000000	.4500000000e-1	.4515626413e-1	.15626413e-3
2.750000000	.2382187500e-1	.2391584169e-1	.9396669e-4

S1 = Solución exacta de la ecuación linealizada
S2 = Solución numérica de la ecuación no lineal

Volver Salir

Figura 5. Solución obtenida cuando $q = 9000 N/m$

Tabla de valores

x	$S1$	$S2$	$\|S1-S2\|$
.2500000000	.1051875000e-1	.1054555630e-1	.2680630e-4
.5000000000	.3600000000e-1	.3619454295e-1	.19454295e-3
.7500000000	.6834375000e-1	.6885884541e-1	.51509541e-3
1.	.1008000000	.1016536836	.8536836e-3
1.250000000	.1279687500	.1290615450	.10927950e-2
1.500000000	.1458000000	.1470276360	.12276360e-2
1.750000000	.1515937500	.1529192803	.13255303e-2
2.	.1440000000	.1454219642	.14219642e-2
2.250000000	.1230187500	.1244696952	.14509452e-2
2.500000000	.9000000000e-1	.9126817459e-1	.126817459e-2
2.750000000	.4764375000e-1	.4840815432e-1	.76440432e-3

S1 = Solución exacta de la ecuación linealizada
S2 = Solución numérica de la ecuación no lineal

Volver Salir

Figura 6. Solución obtenida cuando $q = 18000\,N/m$

Del análisis de las tablas obtenidas, los alumnos podrán concluir que la flexión de una viga es directamente proporcional a la carga que soporta.

Otro ejemplo, lo constituye la resolución del problema que se muestra en la Figura 7, donde la viga se halla articulada en ambos extremos.

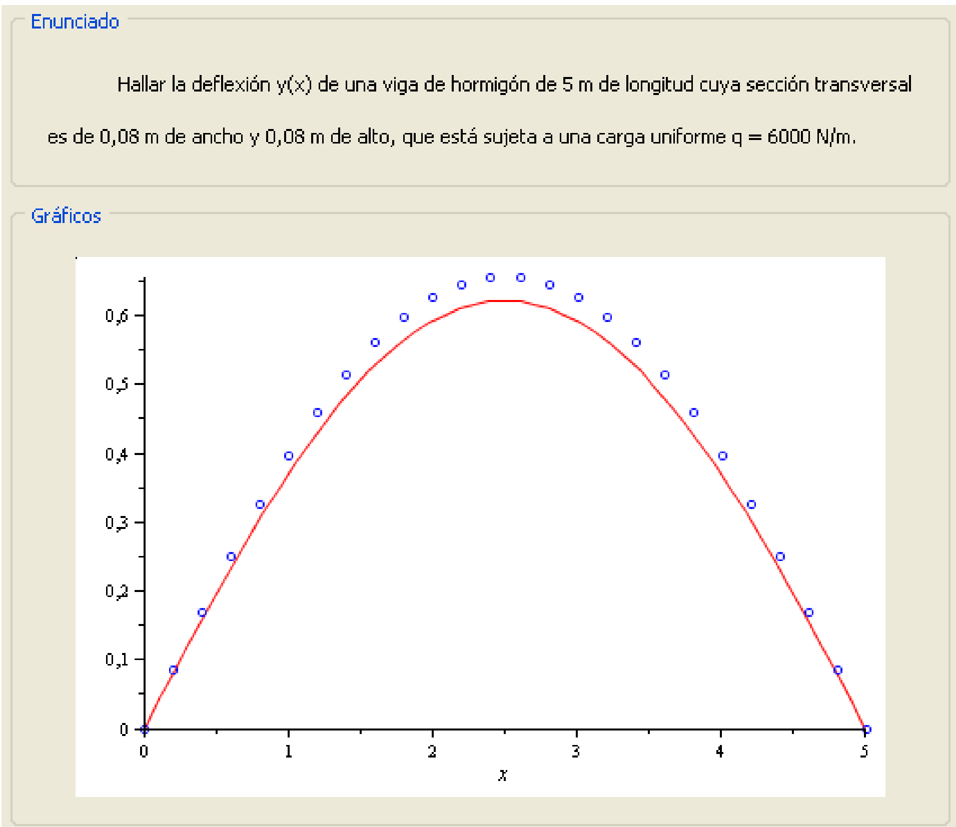
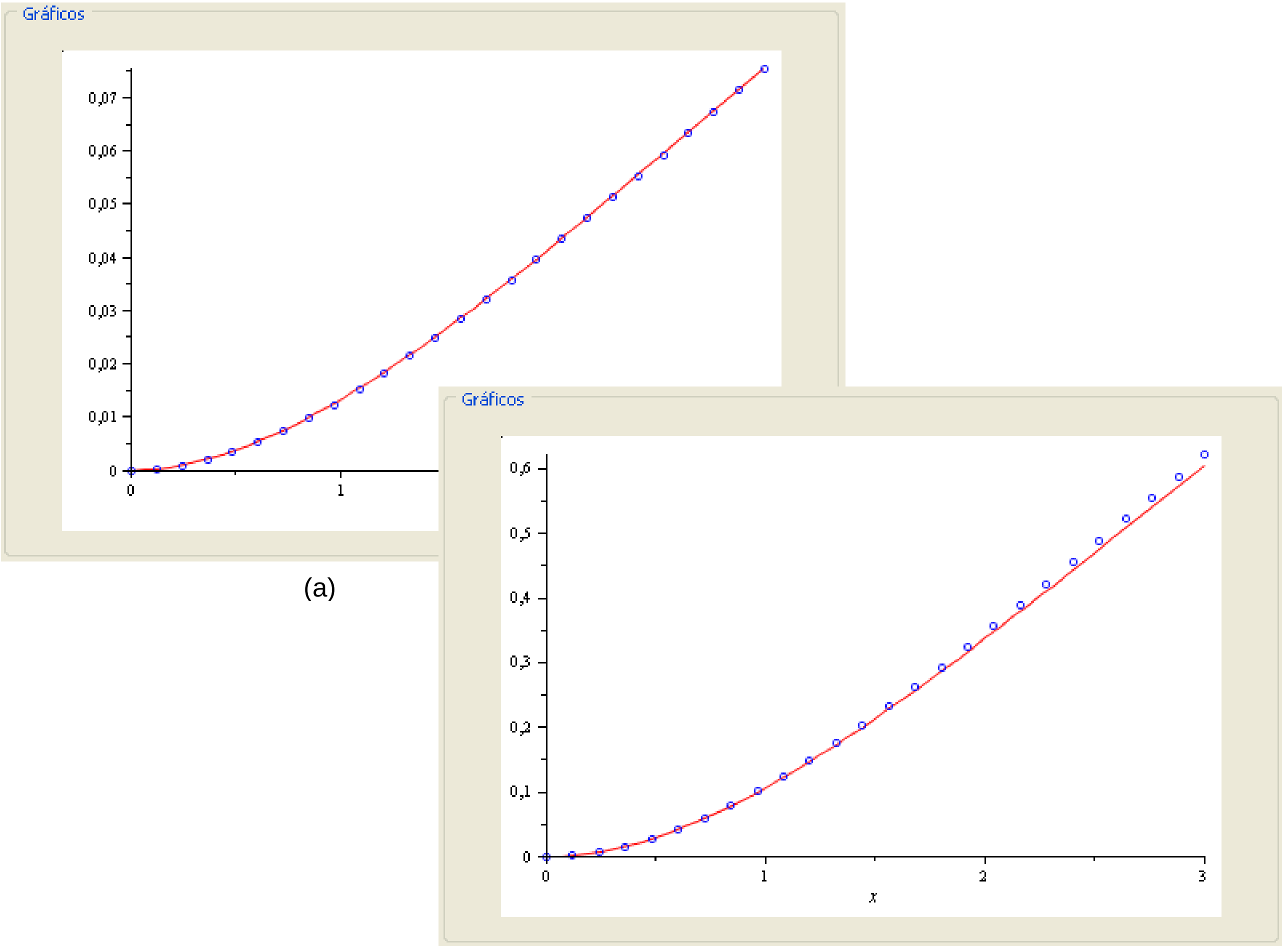


Figura 7. Deflexión de una viga articulada – articulada cuando $q = 6000\,N/m$

A partir de la simple visualización del gráfico, los alumnos podrán comprobar experimentalmente que la aproximación de la ecuación diferencial de la curva elástica por medio de una ecuación diferencial lineal sólo es válida cuando se producen flechas muy pequeñas en la viga.

Analizando otros problemas, los alumnos podrán determinar que la flexión de una viga es mayor cuando el módulo de elasticidad del material con el que está hecha la viga es menor. A modo de ejemplo, se muestran las gráficas correspondientes a una viga de 3 m de longitud, empotrada en un extremo y libre en el otro, cuya sección transversal es de 0,04 m de radio, que está sujeta a una carga uniforme de q = 3000 N/m y confeccionada con distintos materiales.



(a)

(b)

Figura 8. Comparación de la deflexión de una viga de acero al carbono (a) y de hormigón (b)

Del mismo modo, a partir de otros ejemplos, los alumnos podrán observar qué es lo que sucede cuando se cambia la sección transversal de la viga o cuando se toma una mayor cantidad de puntos interiores para obtener la solución numérica.

4.3. Ventana personalizada de flexión de columnas con cargas axiales excéntricas

La Figura 9 muestra el MAPLET correspondiente a la flexión de columnas con cargas axiales excéntricas. Esta ventana personalizada presenta una interfaz muy similar a la de flexión de columnas con carga uniforme. Por esta razón, no se la analizará en detalle ya que con la misma los alumnos podrán analizar y observar cuestiones parecidas a las planteadas en los ejemplos de la sección 4.2.

Figura 9. Ventana personalizada de flexión de columnas con cargas axiales excéntricas

5. CONCLUSIONES

La tecnología se convierte en un agente de cambio para los procesos de enseñanza y aprendizaje debido a la posibilidad de manejar en forma dinámica el objeto en estudio en sus distintos sistemas de representación. Además, abre espacios para que los estudiantes puedan vivir experiencias difíciles de producir con medios tradicionales como el lápiz y el papel [6].

Por otra parte, el uso de recursos tecnológicos promueve la creación de ambientes que hacen posible que los alumnos conjeturen, analicen, argumenten, comprueben experimentalmente determinados conceptos teóricos.

En particular, la herramienta que se muestra en el presente trabajo permite a los alumnos analizar la diferencia entre la solución aproximada de un modelo preciso y la solución exacta de un modelo simplificado, así como también determinar, teniendo en cuenta las condiciones del problema planteado, cuándo es conveniente usar cada una de las aproximaciones para obtener una solución.

5. REFERENCIAS

[1] Timoshenko, S.P. & Gere, J. M. *Mecánica de materiales* (Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana). México. 1979.

[2] Burden, R.L. & Faires, J.D. *Análisis numérico*. Séptima edición (International Thompson Editores). México. 2003.

[3] Monagan, M.B., Geddes, K.O., Heal, K.M., Labahn, G., Vorkoetter, S.M., McCarron, J. & DeMarco, P. *Maple Introductory Programming Guide.* Maplesoft (Waterloo Maple Inc.). Canadá. 2007.

[4] Çengel; Yunus. *Transferencia de Calor*. Segunda edición (Mc Graw – Hill). México. 2004.

[5] De Guzmán, M. *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático. Elementos básicos del análisis* (Pirámide). España. 1996.

[6] Gómez, P. *Tecnología y educación matemática*. Revista de Informática Educativa. Vol 10, Nº 1, 93 – 111. Colombia. 1997.