



II CAIM 2010
Segundo Congreso Argentino
de Ingeniería Mecánica
San Juan - Noviembre 2010

USO DEL MATHEMATICA EN EL ESTUDIO DE SERIES DE FOURIER Y FUNCIONES PERIÓDICAS

Samira Abdel Masih¹, Marcelo Monferrato²

¹ *Facultad de Tecnología informática – Universidad Abierta Interamericana.
Av. San Juan 951. Buenos Aires. Argentina
e-mail: abdel.masih@hotmail.com*

² *Centro Politécnico del Cono Sur
Río de la Plata s/n. Colonia del Sacramento. Uruguay
e-mail: mmonferrato@yahoo.com.ar*

RESUMEN

A comienzos del año 1700 y con el fin de resolver ecuaciones diferenciales, los matemáticos y físicos buscaban representar una función $f: D \subset \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ mediante una suma infinita de funciones elementales. Uno de los primeros intentos consistió en expresar dicha función como una suma infinita de polinomios, hecho que dio lugar al concepto de “serie de potencias”, es decir, una representación de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Donde x_0 = centro de la serie y a_n = constantes, para $n = 0, 1, 2, \dots$

Sin embargo, una amplia gama de funciones quedaban excluidas de esta representación, pues era necesario que al menos fueran infinitamente derivables en un intervalo que contenga al centro de la serie.

Con el fin de abarcar la mayor cantidad de funciones posibles, se trató de definir una nueva suma infinita de funciones elementales. En 1753 Daniel Bernoulli propuso expresar una función periódica como suma infinita de “senos” y “cosenos” de la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n w t) + b_n \sen(n w t)) \quad [1]$$

Aunque en 1807 Jean Fourier aplicó esta idea en el estudio de la conducción del calor, tanto él como Bernoulli no lograron probar matemáticamente esta afirmación.

Finalmente, en 1829, Johann Dirichlet probó rigurosamente que la serie [1], conocida actualmente como “serie de Fourier” converge, bajo ciertas hipótesis, a la función f .

En la actualidad, las series de Fourier son utilizadas para representar una amplia gama de funciones, sean o no periódicas. Se han convertido, además, en un paradigma en el estudio de numerosas ecuaciones diferenciales.

El presente trabajo muestra algunos resultados matemáticos para ser implementados con el software Mathematica, los cuales permitirán graficar funciones periódicas, sumas parciales de una serie de Fourier y calcular de una manera sencilla los coeficientes de Fourier de una gran variedad de funciones.

Esta propuesta de enseñanza se viene experimentando en la asignatura de Análisis Matemático III con resultados altamente satisfactorios.

Palabras Claves: Series – Fourier – Funciones – Periódicas – Mathematica.

1. INTRODUCCIÓN

Si observamos a nuestro alrededor, podemos comprobar que existen numerosos fenómenos que se repiten periódicamente. Por ejemplo, los latidos del corazón, las oscilaciones de un péndulo, los movimientos de rotación y traslación de la Tierra, la corriente eléctrica alterna, el movimiento de un cuerpo suspendido de un resorte o las vibraciones producidas al tocar las cuerdas de una guitarra.

A fin de analizar y predecir su comportamiento, estos fenómenos pueden modelarse matemáticamente mediante las llamadas "funciones periódicas", cuya definición es la siguiente (véase [4- 6]):

Una función $f: D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, con $D =$ dominio de f , es periódica si existe un número real positivo p tal que $f(x + p) = f(x) \quad \forall x, (x + p) \in D$. En este caso, el número p recibe el nombre de período.

Se puede visualizar rápidamente si una función tiene período p , ya que su gráfica se repite en cada intervalo de longitud p .

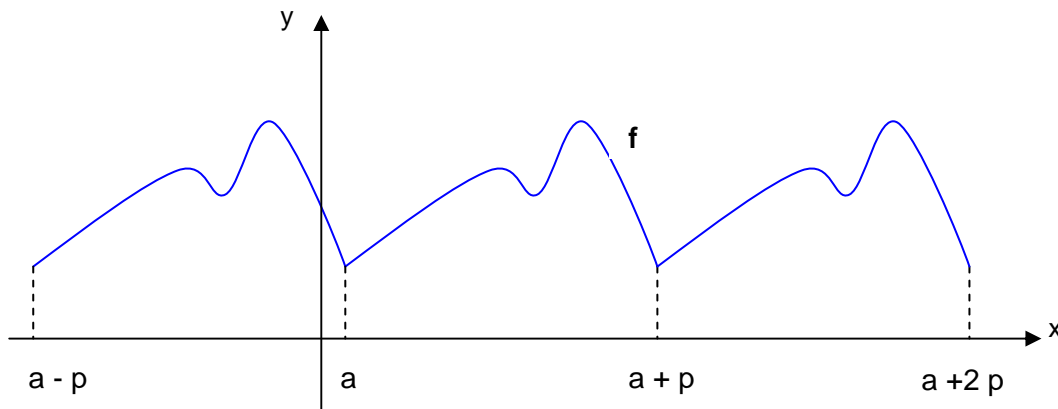


Figura 1: Gráfica de una función periódica.

El número p no es el único período, ya que también lo son los números $2p$, $3p$ y demás. Por esta razón, para evitar ambigüedades, se introduce el concepto de período fundamental.

El período fundamental de una función periódica f , también llamado el período de f , es el mínimo número real positivo P que verifica que $f(x + P) = f(x)$.

2. ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES PERIÓDICAS

Las proposiciones que se enuncian a continuación se refieren a ciertas propiedades de las funciones periódicas y sus correspondientes períodos. Además, permitirán graficarlas mediante un software computacional. Previamente se especificará la siguiente definición:

Si x es un número real "el entero de x ", simbolizado por $[x]$, es el número entero que se obtiene de truncar la parte decimal del número x .

Por ejemplo, $[2.6] = 2$; $[-7.8] = -7$.

2.1. Proposición

Si $f: D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ es periódica de período P , entonces $f(x + k P) = f(x) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Demostración:

Si $k = 0$, no hay nada que probar.

Si $k \in \mathbb{N}$, probemos por inducción sobre k que $f(x + k P) = f(x) \quad \forall x \in D$

Si $k = 1$, $f(x + 1 P) = f(x + P) = f(x)$ pues f tiene período P .

Supongamos que vale para k , es decir, $f(x + k P) = f(x) \quad \forall x \in D$ (hipótesis inductiva).

Probemos ahora que vale para $(k+1)$, es decir, que $f(x + (k+1) P) = f(x)$. Teniendo en cuenta que f tiene período P y aplicando la hipótesis inductiva, resulta:

$$f(x + (k+1) P) = f(x + k P + P) = f(x + k P) = f(x).$$

Si $k \in \mathbb{Z}_{<0}$, llamamos $k = -m$, con $m \in \mathbb{N}$. De manera análoga al caso anterior, se demuestra por inducción sobre m que $f(x - m P) = f(x) \quad \forall x \in D$. ■

La siguiente Proposición afirma que cualquier período de una función periódica es un múltiplo de su período fundamental.

2.2. Proposición

Si $f: D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ es periódica de período fundamental P , y a es un número real no nulo tal que $f(x + a) = f(x)$ entonces $a = k P$, para algún $k \in \mathbb{Z}$

Demostración:

Supongamos que $a \neq k P \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, $a - k P \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. En particular, tomemos $k = \left[\frac{a}{P} \right]$.

Si $a > 0$, consideremos el número $a - \left[\frac{a}{P} \right] P$. Dicho número verifica que $0 < a - \left[\frac{a}{P} \right] P < P$.

Como $f\left(\left(x - \left[\frac{a}{P} \right] P\right) + a\right) = f\left(x - \left[\frac{a}{P} \right] P\right)$, de la Proposición 2.1 resulta:

$$f\left(x + a - \left[\frac{a}{P} \right] P\right) = f\left(x - \left[\frac{a}{P} \right] P + a\right) = f\left(x - \left[\frac{a}{P} \right] P\right) = f(x). \text{ Por lo tanto, } a - \left[\frac{a}{P} \right] P \text{ es un período de } f \text{ menor que}$$

el período fundamental P , lo cual es un absurdo.

Si $a < 0$, consideremos el número $\left[\frac{a}{P} \right] P - a$. Entonces dicho número verifica que $0 < \left[\frac{a}{P} \right] P - a < P$. Como $f((x - a) + a) = f(x - a)$, de la Proposición 2.1 se tiene:

$$f\left(x + \left[\frac{a}{P} \right] P - a\right) = f\left(x - a + \left[\frac{a}{P} \right] P\right) = f(x - a) = f((x - a) + a) = f(x).$$

Por lo tanto, $\left[\frac{a}{P} \right] P - a$ es un período de f menor que el período fundamental P , lo cual es también un absurdo. ■

Cabe preguntarnos si la suma de dos funciones periódicas es una función periódica. La respuesta está dada en la siguiente Proposición:

2.3. Proposición

Sean $f_1, f_2: D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ funciones periódicas de períodos P_1 y P_2 respectivamente. Entonces:

$$f_1 + f_2 \text{ es periódica} \Leftrightarrow \frac{P_1}{P_2} \in \mathbf{Q}$$

Demostración:

\Rightarrow) Sea P el período de $f_1 + f_2$. Por lo tanto, se verifica que

$$f_1(x + P) + f_2(x + P) = f_1(x) + f_2(x) \text{ o equivalentemente,}$$

$$f_1(x + P) - f_1(x) = f_2(x) - f_2(x + P). \text{ Consideremos la función } g(x) = f_1(x + P) - f_1(x).$$

Entonces, por ser f_1 y f_2 periódicas de período P_1 y P_2 respectivamente, resulta

$$g(x + P_1) = f_1(x + P_1 + P) - f_1(x + P_1) = f_1(x + P) - f_1(x) = g(x)$$

$$g(x + P_2) = f_1(x + P_2 + P) - f_1(x + P_2) = f_2(x + P_2) - f_2(x + P_2 + P) = f_2(x) - f_2(x + P) = f_1(x + P) - f_1(x) = g(x).$$

Luego,

$$\begin{cases} g(x + P_1) = g(x) \\ g(x + P_2) = g(x) \end{cases} \quad (1)$$

En consecuencia, g es periódica. Llamemos T a su período fundamental. Por (1) y la Proposición 2.1, se tiene que

$$\begin{cases} P_1 = k_1 T \\ P_2 = k_2 T \end{cases}$$

Para algún $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$. Por lo tanto, $\frac{P_1}{P_2} = \frac{k_1 T}{k_2 T} = \frac{k_1}{k_2} \in \mathbf{Z}$.

\Leftarrow) Como $\frac{P_1}{P_2} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{k_1}{k_2}$ con $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$. Por lo tanto, $P_1 k_2 = P_2 k_1$. Por la Proposición 2.1 y al ser $f_1,$

f_2 periódicas, resulta $f_1(x + P_1 k_2) + f_2(x + P_1 k_2) = f_1(x + P_1 k_2) + f_2(x + P_2 k_1) = f_1(x) + f_2(x)$.

Luego, $f_1 + f_2$ es periódica, de período $P_1 k_2$. ■

Graficar una función periódica utilizando un software no es tan simple como parece. En primer lugar, para definirla, basta hacerlo en un intervalo de longitud igual al período. Esto es así ya que si $f: D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ es periódica de período P entonces $f(x) = f(x + kP) \forall k \in \mathbf{Z}$. Luego, si se indica cuál es la expresión de f en un intervalo I de longitud P y si $x \notin I$, para hallar $f(x)$ bastará calcular la imagen de $(x + kP)$, para algún $k \in \mathbf{Z}$ tal que $(x + kP) \in I$. Pero ¿cómo se especifica en un software cuál es el valor de k para el cual $(x + kP) \in I$? Las proposiciones que se enuncian a continuación darán la respuesta.

2.4. Proposición

Sea $I = [a, b]$ un intervalo de longitud 1.

1) Si $a > 0$ entonces $[b] \in I$.

2) Si $b < 0$ entonces $[a] \in I$.

Demostración:

1) Si $a > 0$ entonces $b > 0$. Obviamente $[b] \leq b$. Supongamos por el absurdo que $[b] \notin I$. Luego, $[b] < a$. En consecuencia, $(b - [b]) > b - a = 1$, lo cual es una contradicción pues $(b - [b]) \leq 1$.

2) Si $b < 0$ entonces $a < 0$. Por otro lado, $[a] \geq a$. Supongamos que $[a] \notin I$. En este caso, $[a] > b$. Por lo tanto, $[a] - a > b - a = 1$, lo cual es también un absurdo pues $([a] - a) \leq 1$. ■

2.5. Proposición

Sea $I = [a, b]$ un intervalo de longitud $P = b - a$ y $k: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ la función definida por:

$$k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq x \leq b \\ \left[\frac{a-x}{P} \right] & \text{si } x > b \\ \left[\frac{b-x}{P} \right] & \text{si } x < a \end{cases}$$

Entonces $(x + k(x)P) \in I \quad \forall x \in \mathfrak{R}$.

Demostración:

Si $x \in I$ entonces $k(x) = 0$ y obviamente $(x + k(x)P) \in I$

Si $x > b$ entonces $x > a$ y en consecuencia $\frac{b-x}{P} < 0$ y $\frac{a-x}{P} < 0$. Como el intervalo $\left[\frac{a-x}{P}; \frac{b-x}{P} \right]$ tiene

longitud 1, de la Proposición 2.4 resulta $\frac{a-x}{P} \leq \left[\frac{a-x}{P} \right] \leq \frac{b-x}{P}$. Es decir, $\frac{a-x}{P} \leq k(x) \leq \frac{b-x}{P}$ de donde

$a \leq x + k(x)P \leq b$.

Si $x < a$ entonces $x < b$ y por lo tanto $\frac{b-x}{P} > 0$ y $\frac{a-x}{P} > 0$. Nuevamente, de la Proposición 2.4 resulta

$\frac{a-x}{P} \leq \left[\frac{b-x}{P} \right] \leq \frac{b-x}{P}$. Es decir, $\frac{a-x}{P} \leq k(x) \leq \frac{b-x}{P}$ y por lo tanto $a \leq x + k(x)P \leq b$. ■

2.6. Observación

La proposición anterior sugiere que, para graficar una función periódica f utilizando un determinado software, primeramente se indica cuál es la expresión de f en un intervalo de longitud P y luego se grafica la función $f(x + k(x)P)$ en el intervalo que se desea. Los siguientes ejemplos ilustran este resultado utilizando el software Mathematica.

2.7. Ejemplo

Dada la función periódica $f(x) = \begin{cases} 0 & 1 \leq x < 2 \\ (x-4)^2 & 2 \leq x < 5 \end{cases}$, $f(x+4) = f(x)$

Graficar f en el intervalo $[-4, 9]$

Resolución

En este caso, el período de la función es $P = 4$ y el intervalo de longitud P donde se define la expresión de la función es $I = [1; 5)$. Se ejecutan entonces los siguientes comandos del Mathematica (véase [7]):

$a = 1;$

$b = 5;$

$P = 4;$

$f[x_] = \text{Which}[1 \leq x < 2, 0, 2 \leq x < 5, (x-4)^2];$

$k[x_] = \text{Which}[x > b, \text{IntegerPart}\left[\frac{a-x}{P}\right], x < a, \text{IntegerPart}\left[\frac{b-x}{P}\right], \text{True}, 0];$

$\text{Plot}[f[x - P k[x]], \{x, -4, 9\}]$

Al ejecutarlos, se obtiene la siguiente gráfica:

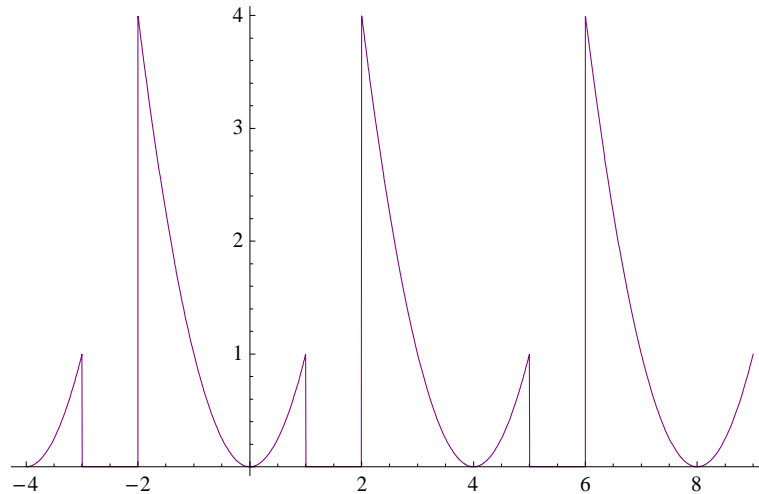


Figura 2: Gráfica de la función f en el intervalo $[-4; 9]$.

2.8. Ejemplo

Un marcapasos consiste en un interruptor, una batería de voltaje constante F , un capacitor con capacitancia constante C y el corazón como resistor, con resistencia constante R , como se ilustra en la siguiente figura:

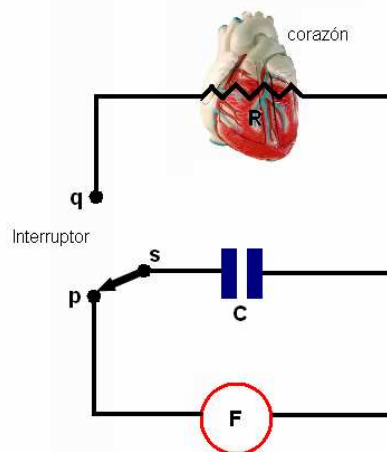


Figura 3: Modelo de un marcapasos.

Cuando el interruptor S está en p , se carga el capacitor; cuando está en q , se descarga el capacitor, enviando un estímulo eléctrico al corazón.

a) Si $E(t)$ representa el voltaje en el corazón, demuestre que durante el tiempo en que el corazón está siendo estimulado, $E(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$E'(t) = -\frac{1}{RC}E(t)$$

b) Suponga que en el intervalo de tiempo de duración t_1 , con $0 \leq t < t_1$, el interruptor S está en la posición p y que el capacitor se está cargando. Cuando el interruptor se mueve a la posición q en el tiempo t_1 , el capacitor se descarga y envía un impulso al corazón en el intervalo de tiempo de duración t_2 , con $t_1 \leq t < t_1 + t_2$. Así, en el intervalo inicial de carga y descarga $0 \leq t < t_1 + t_2$, el voltaje al corazón se modela en realidad mediante la ecuación diferencial definida por:

$$E'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ -\frac{1}{RC}E(t) & \text{si } t_1 \leq t < t_1 + t_2 \end{cases}$$

Al mover **S** entre **p** y **q**, la carga y descarga en los intervalos de tiempo de duraciones t_1 y t_2 se repite de forma indefinida. Es decir, que la función $E(t)$ es periódica, de período $P = t_1 + t_2$.

Suponga que $t_1 = 4$ seg. , $t_2 = 2$ seg. , $F = 12$ Volts, $R = 1$ Ohm, $C = 1$ Faraday, que $E(0) = 0$ y $E(4) = 12$.

Hallar la función $E(t)$ y graficarla en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 18$.

Resolución

a) Por la Ley de Ohm se sabe que

$$E(t) = R i(t) \quad (2)$$

Donde $i(t)$ es la intensidad de corriente que circula por el circuito en el instante t .

Al derivar miembro a miembro (2) se tiene

$$E'(t) = R i'(t) \quad (3)$$

Por otro lado, si aplicamos la Segunda Ley de Kirchoff, la Ley de Ohm y la Ley de Coulomb al siguiente circuito se obtiene:

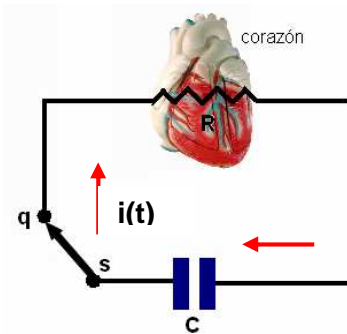


Figura 4: Estado del circuito en el tiempo en que el corazón está siendo estimulado.

$$-\frac{Q(t)}{C} - R i(t) = 0 \quad (4)$$

Donde $Q(t)$ es la cantidad de carga eléctrica acumulada por el capacitor en el instante t .

Teniendo en cuenta que $Q'(t) = i(t)$, al derivar miembro a miembro (4) resulta

$$-\frac{i(t)}{C} - R i'(t) = 0 \quad (5)$$

Despejando $i(t)$ e $i'(t)$ de las ecuaciones (2) y (3) y reemplazándolas en la ecuación (5) se obtiene

$$E'(t) = -\frac{1}{RC} E(t)$$

b) $E(t)$ es una función periódica, de período $P = 6$ seg. Para hallarla, basta resolver la ecuación diferencial en un intervalo de longitud igual al período. De este modo, resolveremos la ecuación diferencial

$$E'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ -E(t) & \text{si } 4 \leq t < 6 \end{cases}$$

Con condiciones iniciales $E(0) = 0$, $E(4) = 12$.

Ejecutamos entonces los siguientes comandos para resolver las ecuaciones diferenciales

$$E'(t) = 0 \quad \text{para } 0 \leq t < 4 \quad \text{con condición inicial: } E(0) = 0$$

$$E'(t) = -E(t) \quad \text{para } 4 \leq t < 6 \quad \text{con condición inicial: } E(4) = 12$$

`DSolve [{ E'[t] == 0, E[0] == 0 }, E[t], t]`

`DSolve [{ E'[t] == -E[t], E[4] == 12 }, E[t], t]`

Luego de ejecutar estos comandos se obtiene la siguiente solución

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ 12 e^{4-t} & \text{si } 4 \leq t < 6 \end{cases}$$

Para graficarla en el intervalo [0 ; 18] escribimos los comandos:

a = 0;

b = 6;

P = 6;

E [t_] = Which [0 ≤ t < 4 , 0 , 4 ≤ t < 6 , 12 e^{4-t}] ;

k[t_] = Which [t > b , IntegerPart [$\frac{a-t}{P}$] , t < a , IntegerPart [$\frac{b-t}{P}$] , True , 0] ;

Plot [E[t - P k[t]] , { t , 0 , 18 }]

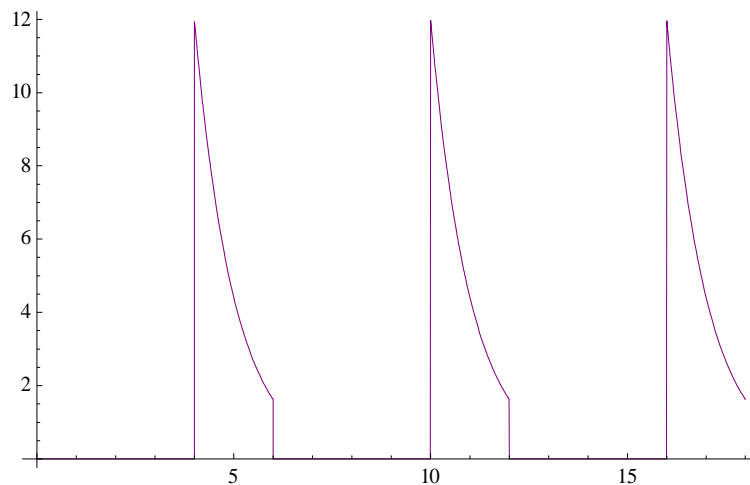


Figura 5: Gráfica de la función E(t), que representa el voltaje del corazón al recibir del marcapasos un estímulo eléctrico.

3. CÁLCULO DE SERIES DE FOURIER MEDIANTE EL MATHEMATICA

Las series de Fourier son utilizadas para representar una amplia gama de funciones, sean o no periódicas. Se han convertido, además, en un paradigma en el estudio y resolución de numerosas ecuaciones diferenciales. Su cálculo a mano es sumamente tedioso. Sin embargo, un potente software como el Mathematica facilitará esta tarea. En esta sección se expondrá la manera de calcular los coeficientes y las sumas parciales de una serie de Fourier. Además, se verá cómo representarlas gráficamente a fin de visualizar su convergencia. Previamente se recordará la siguiente definición (véase [1- 3]):

Sea $f: D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ una función integrable Riemann en el intervalo [a, b]. Se llama **serie de Fourier** de f en [a, b] a la serie trigonométrica

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right) \right)$$

donde los coeficientes

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right) dx \quad \text{y} \quad b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right) dx$$

se denominan coeficientes de Fourier de f.

El siguiente Teorema, demostrado por Johann Dirichlet pero que se lo conoce como Teorema de Fourier, afirma en qué casos la Serie de Fourier converge puntualmente.

Sea $f: D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ es una función derivable por tramos en $[a, b]$ y periódica, de período $P = b - a$.
Si $x \in \mathfrak{R}$ entonces

$$S_f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Donde $f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ y $f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

En particular, si f es continua en x entonces $S_f(x) = f(x)$

3.1. Uso de funciones salto unidad para expresar una función definida por tramos

En numerosas ocasiones se precisa calcular la serie de Fourier de una función definida por tramos. En este caso, Mathematica calcula de una manera sencilla los coeficientes de Fourier de dicha función si se la expresa en términos de funciones salto unidad:

Si a es un número real la función u_a , llamada "salto unidad en a ", se la define por

$$u_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > a \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$

Esta función ya viene incorporada en Mathematica y se escribe `UnitStep [x - a]`

3.2. Ejemplo

Expresar en términos de funciones salto unidad la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 3 \\ \text{sen}(x) & \text{si } 3 < x < 4 \\ (4x + 1) & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Resolución

$$f(x) = x^2 (1 - u_3(x)) + \text{sen}(x) (u_3(x) - u_4(x)) + (4x + 1) u_4(x).$$

En el siguiente ejemplo veremos cómo calcular con Mathematica las sumas parciales de una serie de Fourier definida por tramos.

3.3. Ejemplo

$$\text{Dada la función periódica } f(x) = \begin{cases} 2x & 1 < x < 2 \\ (x-4)^2 & 2 < x < 5 \end{cases}, \quad f(x+4) = f(x)$$

- Graficar f en el intervalo $[-3, 9]$
- Hallar los coeficientes de la Serie de Fourier asociada a f .
- Representar gráficamente la tercera y vigésima suma parcial de la Serie de Fourier.

Resolución

- En este caso, la función tiene período $P = 6$, $a = 1$ y $b = 5$. Escribimos los siguientes comandos:

P = 4;

a = 1;

b = 5;

f [x_] = 2 x (UnitStep [x - 1] - UnitStep [x - 2]) + (x - 4)² (UnitStep [x - 2] - UnitStep [x - 5]);

k[x_] = Which [x > b, IntegerPart [$\frac{a-x}{P}$], x < a , IntegerPart [$\frac{b-x}{P}$], True , 0] ;

Plot [f [x - P k [x]] , { x , - 3 , 9 }]

Al ejecutarlos, se obtiene la siguiente gráfica:

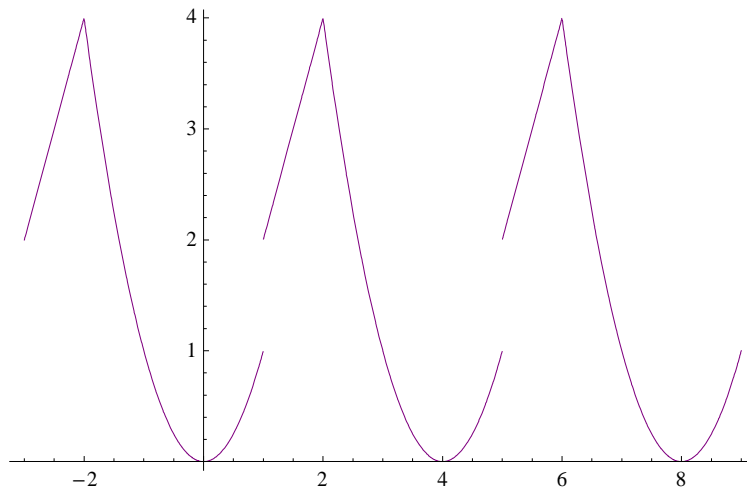


Figura 6 : Gráfica de f en el intervalo [-3 , 9].

b) La serie de Fourier asociada a f es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) \right]$$

Donde

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) dx$$

Para calcular los coeficientes de Fourier, se ejecutan los comandos:

$$A [n_] = \frac{2}{b-a} \left(\int_a^b f [x] \cos \left[\frac{2n\pi x}{b-a} \right] dx \right) ;$$

$$B [n_] = \frac{2}{b-a} \left(\int_a^b f [x] \sin \left[\frac{2n\pi x}{b-a} \right] dx \right) ;$$

$$A [0] = \frac{2}{b-a} \left(\int_a^b f [x] dx \right) ;$$

c) Definimos las funciones g y h considerando, respectivamente, la tercera y vigésima suma parcial de la Serie de Fourier. Luego se escriben los comandos para graficar ambas funciones:

$$g [x_] = \frac{A[0]}{2} + \sum_{n=1}^3 A [n] \cos \left[\frac{2n\pi x}{b-a} \right] + B [n] \sin \left[\frac{2n\pi x}{b-a} \right] ;$$

$$h[x] = \frac{A[0]}{2} + \sum_{n=1}^{20} A[n] \cos\left[\frac{2n\pi x}{b-a}\right] + B[n] \sin\left[\frac{2n\pi x}{b-a}\right];$$

Plot [{ g[x], h[x] } , { x , - 3 , 9 }]

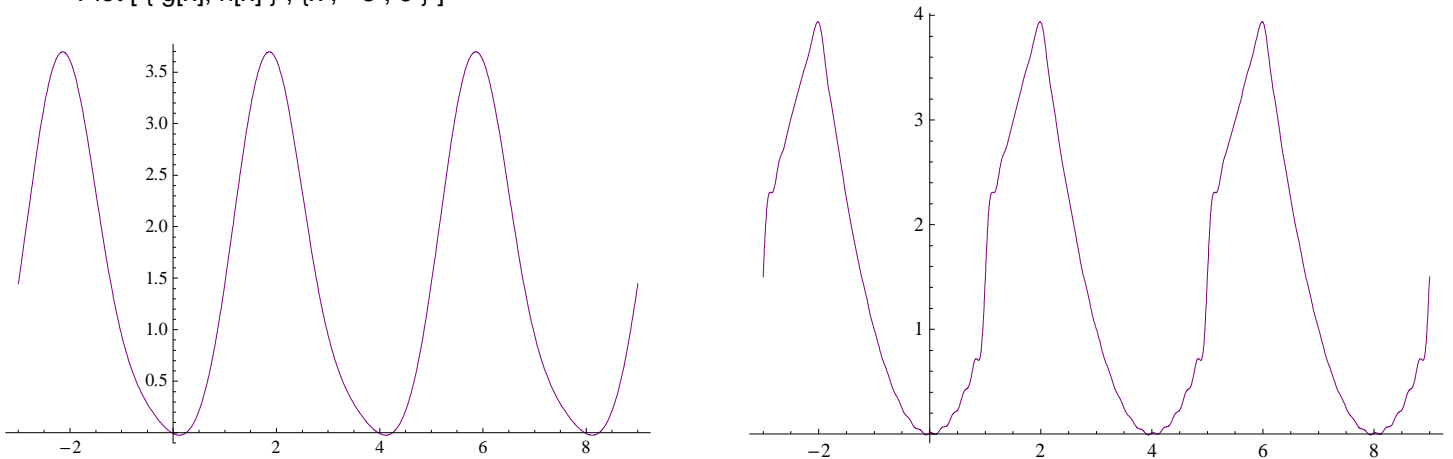


Figura 7: Izquierda: gráfica de g. Derecha: gráfica de h.

En la figura anterior se observa que, a medida que se agregan más términos a la suma parcial de la serie, su gráfica se parece cada vez más a la gráfica de f. Este resultado corrobora la convergencia de la serie de Fourier a la función f.

4. CONCLUSIONES

El uso de un software en la enseñanza de la Matemática brinda una valiosa ayuda en el planteo y resolución de un problema matemático. El Mathematica, por la potencia y simplicidad de su manejo constituye, tanto para el docente como para el estudiante, una poderosa herramienta gráfica y de cálculo que producirá un marcado interés en el estudio y comprensión de los temas.

5. REFERENCIAS

- [1] Peter V. O'Neil; "Matemáticas avanzadas para ingeniería". Thomson. 2006.
- [2] Dennis G. Zill & Michael R. Cullen; "Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera". Thomson Learning. 2002.
- [3] Samira Abdel Masih; "Aplicaciones del Mathematica a ecuaciones diferenciales, series y transformadas de Laplace". U.N.L.Z.. 2007.
- [4] E. Swokowsky, *Cálculo con Geometría Analítica*, Iberoamérica, México, 1988.
- [5] L. Leithold, *El Cálculo*, Oxford University Press, México, 1998.
- [6] James Stewart, *Cálculo*, Thomson Learning, México, 2005.
- [7] Samira Abdel Masih, *Análisis Matemático II aplicado a Mathematica*, U.N.L.Z, Buenos Aires, 1998.