



FORO
DOCENTE
DEL AREA
MECANICA
DE LAS
INGENIERIAS

FoDAMI



II CAIM 2010
Segundo Congreso Argentino
de Ingeniería Mecánica
San Juan - Noviembre 2010

LÍMITES DOBLES: UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA CON SOPORTE INFORMÁTICO

Samira Abdel Masih

Facultad de Ingeniería.

Universidad Nacional de Lomas de Zamora.

Camino de Cintura km 2. Llavallol. Buenos Aires. Argentina.

Tel: 4941-2975 - E-mail: abdel.masih@hotmail.com

RESUMEN

En numerosas situaciones prácticas se requiere calcular límites de funciones. Los profesores de cálculo, al enseñar este concepto, deben enfrentarse a una de las pruebas más rigurosas de su capacidad docente. La experiencia muestra que es difícil lograr una primera comprensión de la definición y más aún, puede demandar mucho tiempo hasta que el alumno tenga un manejo fluido de la noción matemática de límite.

Si frente a este obstáculo se le suma el hecho de que para el estudio de funciones de dos variables se precisa un mayor esfuerzo de abstracción e intuición debido a que se trabaja en el espacio tridimensional, entonces la enseñanza de límites dobles puede complicarse bastante.

Sin embargo, un software computacional potente como el Mathematica constituye un recurso fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de este tema.

En el presente trabajo se proponen métodos sistematizados para ser implementados con el software Mathematica y que permitirán demostrar de una manera sencilla si un límite doble existe o no, en caso de haber indeterminación. Además, su poderosa herramienta gráfica permitirá al alumno analizar la existencia del límite de una función de dos variables observando el aspecto de su gráfica en las cercanías del punto en cuestión.

El método desarrollado se viene experimentando en la asignatura de Análisis Matemático II con resultados altamente satisfactorios.

Palabras Claves: Funciones – Multivariables - Límites – Dobles – Mathematica.

1. INTRODUCCIÓN

La definición clásica del límite de una función de dos variables (también llamado límite doble), puede encontrarse en cualquier texto de matemática (Véase [1- 7]) y es la siguiente:

Sea f una función de dos variables definida al menos en el interior de un círculo con centro en $(a; b)$, excepto posiblemente en $(a; b)$. Entonces

$$\lim_{(x;y) \rightarrow (a;b)} f(x,y) = L$$

Si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \text{ entonces}$$

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Obviamente, para alguien que recibe esta información por primera vez, este concepto no es fácil de asimilar. Intuitivamente significa que la altura de la gráfica de f se acerca a L cuando $(x; y)$ se aproxima a (a, b) , sin importar lo que ocurre en el punto $(a; b)$.

Como se puede comprobar, esta definición es similar a la de funciones de una variable, aunque existe una diferencia importante. Para determinar si una función de una variable tiene límite, sólo se necesita verificar que se aproxime al límite por dos direcciones: por la derecha o por la izquierda. Sin embargo, la situación para funciones de dos variables es más complicada, porque en el plano existen una infinidad de direcciones o trayectorias a lo largo de las cuales $(x; y)$ puede acercarse al punto $(a; b)$. Resultaría entonces imposible analizar el comportamiento de una función para cada una de estas curvas o direcciones (Véase Figura 1).

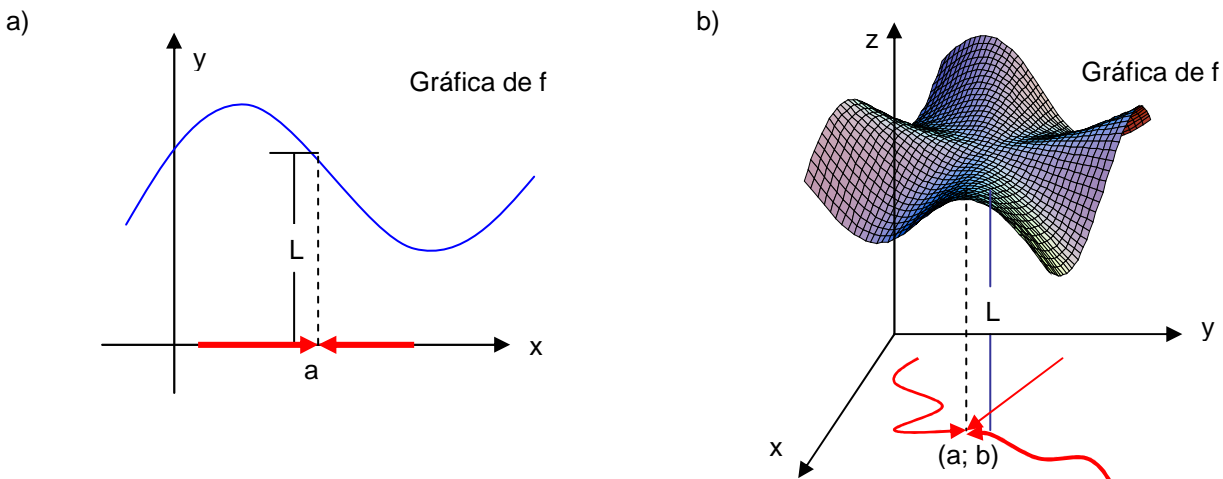


Figura 1: Posibles caminos o direcciones a través de los cuales se puede acercarse a un punto:

a) Para una función de una variable. b) Para una función de dos variables

Si bien los límites dobles tienen las mismas propiedades respecto a la suma, resta, producto y cociente que los límites de funciones de una variable, la Regla de L'Hospital no es aplicable en caso de haber indeterminaciones. Por otro lado, para demostrar analíticamente la existencia o no de un límite a partir de la definición, se requiere bastante adiestramiento en el manejo de técnicas de acotación.

En el presente trabajo se exponen algunos resultados teóricos para ser implementados con el software Mathematica, los cuales permitirán demostrar de una manera sencilla si un límite doble existe o no, en caso de haber indeterminación.

2. USO DE GRÁFICAS PARA ANALIZAR LA EXISTENCIA DE UN LÍMITE DOBLE

El aspecto de la gráfica de una función en un entorno de $(a; b)$ permitirá entrever si el límite existe o no en dicho punto. Por ejemplo, si en las cercanías del punto $(a; b)$ la gráfica presenta picos abruptos o está rota, como sucede en la Figura 2) a), se intuye que el límite doble no existe. En caso contrario éste sí existe, como se ilustra en la Figura 2 b).

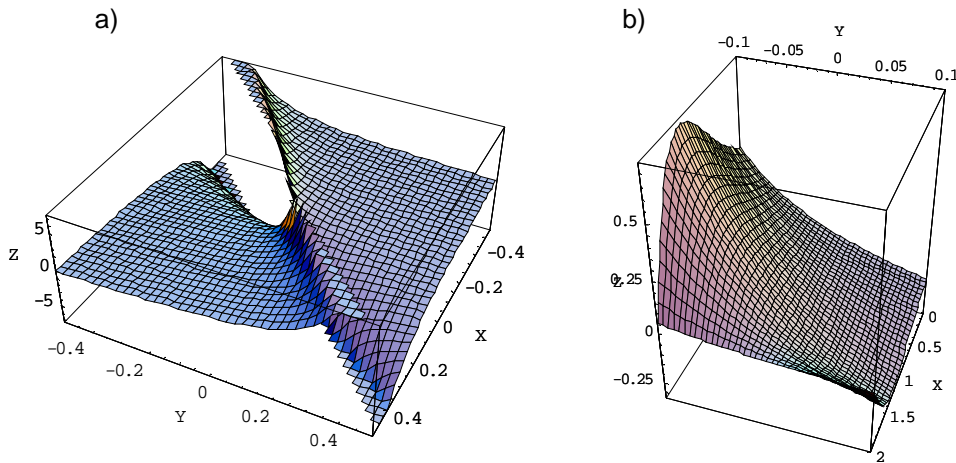


Figura 2: Gráficas de funciones de dos variables. a) Si $(a; b) = (1; 0)$. b) Si $(a; b) = (0; 0)$.

De este modo, la visualización de la gráfica de una función de dos variables constituirá una herramienta útil para iniciar el análisis analítico de la existencia de un límite doble, como se verá en los ejemplos expuestos en este trabajo.

3. ALGUNOS RESULTADOS QUE PERMITEN DEMOSTRAR LA EXISTENCIA DE UN LÍMITE DOBLE

En caso de haber indeterminación y ésta no puede salvarse algebraicamente, los siguientes teoremas proporcionan una alternativa para hallar un límite doble.

3.1. Teorema

Si $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ y se verifica que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1$, $\lim_{y \rightarrow b} h(y) = L_2$ entonces

$$\lim_{(x; y) \rightarrow (a; b)} f(x, y) = L_1 \cdot L_2$$

Demostración:

De la propiedad del límite de un producto de funciones resulta

$$\lim_{(x; y) \rightarrow (a; b)} f(x, y) = \lim_{(x; y) \rightarrow (a; b)} g(x) h(y) = \lim_{(x; y) \rightarrow (a; b)} g(x) \cdot \lim_{(x; y) \rightarrow (a; b)} h(y) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \lim_{y \rightarrow b} h(y) = L_1 \cdot L_2 \quad \blacksquare$$

En algunas ocasiones el uso de coordenadas polares permite obviar las tediosas acotaciones que se precisan para demostrar la existencia de un límite a partir de su definición. El siguiente teorema es útil para estos casos.

3.2. Teorema

Sea $f: D \subseteq \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ definida en un entorno reducido de $(a; b)$ y $L \in \mathfrak{R}$. Sea $r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi]$. Si

$$f(a + r \cos(\theta), b + r \sin(\theta)) - L = \sum_{i=1}^n h_i(\theta) g_i(r)$$

donde

a) $h_i: [0, 2\pi] \rightarrow \mathfrak{R}$ es continua o acotada en $[0, 2\pi] \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$

b) $g_i: [0, +\infty] \rightarrow \mathfrak{R}$ verifica que $\lim_{r \rightarrow 0} g_i(r) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$

Entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (a;b)} f(x, y) = L$

Demostración:

Si h_i es continua resulta $|h_i|$ continua en $[0, 2\pi]$. En consecuencia, por el Teorema de Bolzano, $\exists M_i > 0 / |h_i(\theta)| \leq M_i \quad \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$. Si h_i es acotada, este último resultado es obvio. Por otro lado,

como $\lim_{r \rightarrow 0} g_i(r) = 0$ se tiene que, dado $\varepsilon > 0 \exists \delta_i > 0 / r < \delta_i \Rightarrow |g_i(r)| < \frac{\varepsilon}{nM_i}$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Tomemos

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$. Luego, si $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ entonces $x = a + r \cos(\theta)$, $y = b + r \sin(\theta)$

para algún $0 < r < \delta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Por lo tanto,

$$|f(x, y) - L| = |f(a + r \cos(\theta), b + r \sin(\theta)) - L| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^n h_i(\theta) g_i(r) \right| \leq \sum_{i=1}^n |h_i(\theta) g_i(r)| = \sum_{i=1}^n |h_i(\theta)| |g_i(r)| \leq \sum_{i=1}^n M_i \frac{\varepsilon}{nM_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{n} = n \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

Luego, $\lim_{(x,y) \rightarrow (a;b)} f(x, y) = L$ ■

Los Teoremas 3.1 y 3.2 dan origen a los métodos que llamaremos “De Separación de Variables” y “De Coordenadas Polares” respectivamente.

4. ALGUNOS RESULTADOS QUE PERMITEN DEMOSTRAR LA INEXISTENCIA DE UN LÍMITE DOBLE

Se sabe que, si dos caminos que conducen al punto (a, b) producen dos valores límites diferentes para f , entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (a;b)} f(x, y)$ no existe (véase [1- 7]). Basados en este resultado, los siguientes teoremas

brindarán métodos para probar que un límite doble no existe.

4.1. Teorema

Sea $f: D \subseteq \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ definida en un entorno reducido de $(a; b)$ y considérese los límites iterados

$$L_{12} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right], \quad L_{21} = \lim_{y \rightarrow b} \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right]$$

Si L_{12} y L_{21} existen y son distintos entonces no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (a;b)} f(x, y)$

Demostración:

Véase [1- 5]. ■

Las trayectorias utilizadas para el cálculo de los límites iterados se muestran en la siguiente figura.

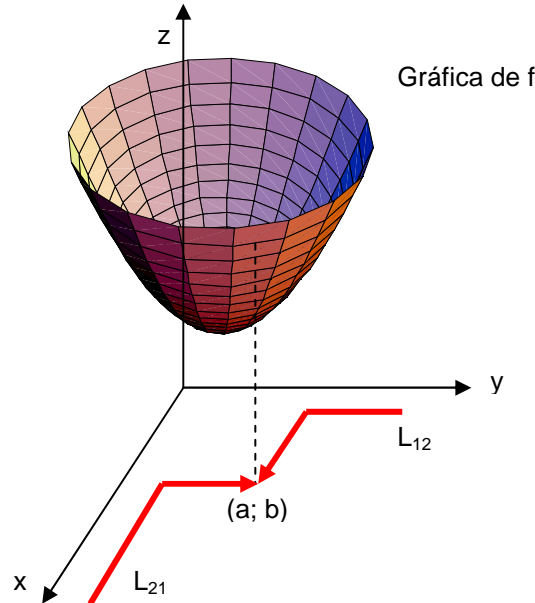


Figura 3: Representación gráfica de los caminos utilizados para el cálculo de los límites iterados L_{12} y L_{21} . Las trayectorias empleadas para aproximarse a $(a; b)$ son trozos de rectas paralelas a los ejes coordenados.

4.2. Teorema

Sea $f: D \subseteq \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ definida en un entorno reducido de $(a; b)$ y considérese el límite radial

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x, b + m(x - a))$$

que consiste en acercarse al punto $(a; b)$ mediante rectas de pendiente "m" que pasan por $(a; b)$.

Si "m" figura en el valor de este límite entonces no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (a;b)} f(x,y)$.

Demostración:

Véase [1- 7]. ■

4.3. Teorema

Sea $f: D \subseteq \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ definida en un entorno reducido de $(a; b)$ y considérese el límite por curvas

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x, b + m(x - a)^n)$$

que consiste en acercarse al punto $(a; b)$ mediante curvas de ecuación $y = b + m(x - a)^n$, donde "n" es un número racional. Si "m" figura en el valor de este límite entonces no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (a;b)} f(x,y)$.

Demostración:

Véase [1- 7]. ■

4.3.1 Observación

En el cálculo del límite por curvas, el valor de "n" se determinará según como sea la expresión de f, como se verá en la sección 6. Por otro lado, el límite $\lim_{y \rightarrow b} f(a + m(y - b)^n, y)$ es otra variante del límite por curvas.

En este caso, se utilizan curvas de ecuación $x = a + m(y - b)^n$ para acercarse al punto $(a; b)$.

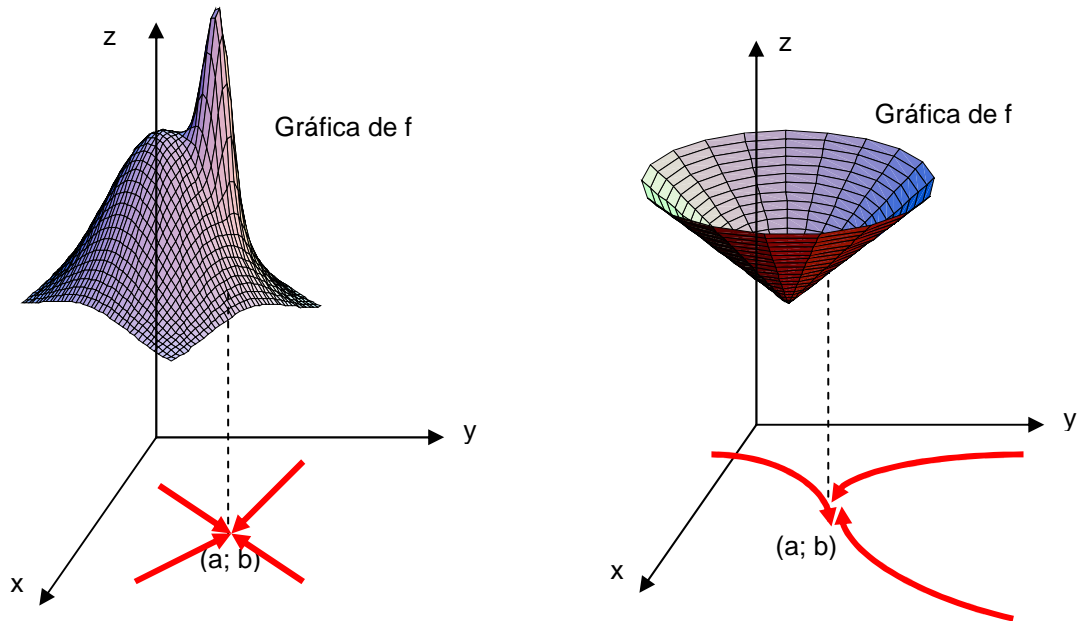


Figura 4: Izquierda: Caminos utilizados para el cálculo de los límites radiales. Como puede observarse, las trayectorias empleadas para aproximarse a $(a; b)$ son rectas de diversas pendientes.
Derecha: Caminos utilizados para el cálculo de un límite por curvas. En este caso, las trayectorias utilizadas para aproximarse a $(a; b)$ son parábolas (es decir, $n = 2$).

El uso de coordenadas polares también permitirá demostrar que un límite doble no existe, como se muestra en el siguiente teorema.

4.4. Teorema

Sea $f: D \subseteq \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ definida en un entorno reducido de $(a; b)$, $r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi]$. Si

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(a + r \cos(\theta), b + r \sin(\theta)) = g(\theta)$$

donde $g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathfrak{R}$ es tal que $g \neq \text{constante}$, entonces no existe $\lim_{(x;y) \rightarrow (a;b)} f(x,y)$.

Demostración:

Supongamos por el absurdo que existe $\lim_{(x;y) \rightarrow (a;b)} f(x,y) = L$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_1 > 0 /$

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta_1 \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon / 2. \text{ Por otro lado, como } \lim_{r \rightarrow 0} f(a + r \cos(\theta), b + r \sin(\theta)) = g(\theta),$$

Se tiene que, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_2 > 0 / 0 < r < \delta_2 \Rightarrow |f(a + r \cos(\theta), b + r \sin(\theta)) - g(\theta)| < \varepsilon / 2$.

Sea $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ y tomemos $(x; y)$ tal que $x = a + r_1 \cos(\theta)$, $y = b + r_1 \sin(\theta)$ con $r_1 < \delta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Luego,

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon / 2 \tag{1}$$

$$|f(x,y) - g(\theta)| = |f(a + r_1 \cos(\theta), b + r_1 \sin(\theta)) - g(\theta)| < \varepsilon / 2 \tag{2}$$

De las expresiones (1) y (2) resulta

$$|g(\theta) - L| = |g(\theta) - f(x,y) + f(x,y) - L| \leq |g(\theta) - f(x,y)| + |f(x,y) - L| < \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 = \varepsilon$$

En consecuencia, $|g(\theta) - L| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$. Por lo tanto, $g(\theta) = L$, lo cual contradice la hipótesis pues $g \neq \text{constante}$. ■

Los Teoremas 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4 dan origen a los métodos que llamaremos “Método de Límites Iterados”, “Método Radial”, Método por Curvas” y “Método de Coordenadas Polares” respectivamente.

En base a estos teoremas y utilizando el software Mathematica como herramienta gráfica y de cálculo, se indicarán a continuación los pasos a realizar para analizar la existencia de un límite doble.

5. PASOS A REALIZAR PARA ANALIZAR LA EXISTENCIA DE UN LÍMITE DOBLE

Dada $f: D \subseteq \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ definida en un entorno reducido de $(a; b)$, para analizar la existencia del límite de f en $(a; b)$ en caso de haber indeterminación, se procede así:

Primer Paso: Se grafica f en un entorno de $(a; b)$.

Segundo Paso: Se observa el comportamiento de la gráfica en las cercanías de $(a; b)$. Si ésta presenta picos abruptos o está rota, se procede a demostrar que el límite doble no existe aplicando alguno de los métodos que se desprenden de los Teoremas 4.1- 4.4. En caso contrario se procede a probar que el límite existe, utilizando uno de los métodos derivados del Teorema 3.1 o 3.2.

En la siguiente sección se muestran ejemplos que servirán como metodología para el cálculo de límites dobles.

6. EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

6.1. Ejemplo

Dada $f(x, y) = \frac{4x^5 + 2y^4 + \cos(xy) - 1}{3x^5 + 2y^2x + y}$. Analizar si existe $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} f(x,y)$.

Resolución:

Primer Paso: Graficaremos f en un entorno de $(0; 0)$. Para ello escribimos el comando (Véase [8])

Plot3D [$\frac{4x^5 + 2y^4 + \cos(xy) - 1}{3x^5 + 2y^2x + y}$, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]

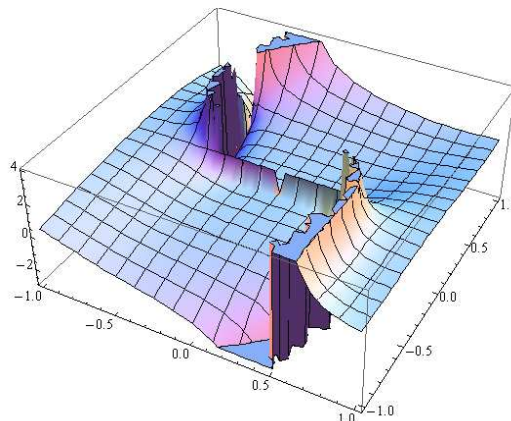


Figura 5: Gráfica de f en la región $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Segundo Paso: Observamos que la gráfica de la función presenta picos abruptos en las cercanías de $(0; 0)$. Procederemos entonces a demostrar que el límite no existe, aplicando alguno de los métodos citados en los Teoremas 4.1 -4.4. Calcularemos entonces los límites iterados (Teorema 4.1), ejecutando los comandos:

$$f[x_-, y_-] = \frac{4x^5 + 2y^4 + \cos(xy) - 1}{3x^5 + 2y^2 x + y}$$

$$\text{Limit}[\text{Limit}[f[x, y], y \rightarrow 0], x \rightarrow 0]$$

$$\text{Limit}[\text{Limit}[f[x, y], x \rightarrow 0], y \rightarrow 0]$$

Se obtienen los siguientes resultados: $L_{12} = 4/3$, $L_{21} = 0$. Como $L_{12} \neq L_{21}$ concluimos que no existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} f(x,y).$$

6.2. Ejemplo

Hallar, si existe,
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1;0)} \frac{\cos((x-1)^2 + y^2 + \frac{\pi}{2})(x-1)y + y^4}{(x-1)^2 + y^2}$$

Resolución

Primer Paso: Graficaremos la función en un entorno de $(1; 0)$. Ejecutamos entonces el comando

$$\text{Plot3D} \left[\frac{\cos((x-1)^2 + y^2 + \frac{\pi}{2})(x-1)y + y^4}{(x-1)^2 + y^2}, \{x, -1, 1.5\}, \{y, -0.5, 0.5\} \right]$$

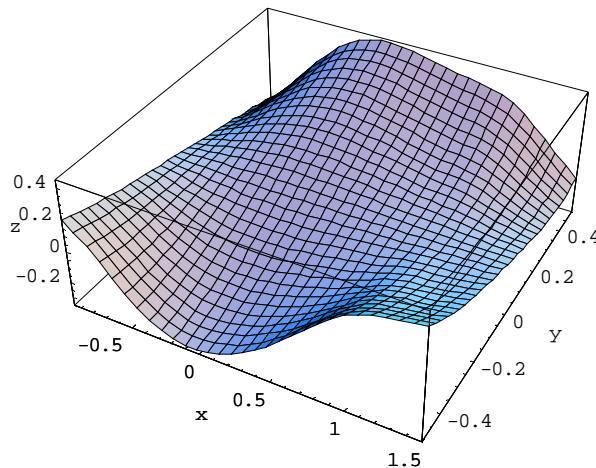


Figura 6: Gráfica de la función en la región $[-1, 1.5] \times [-0.5, 0.5]$.

Segundo Paso: Observamos que la gráfica no presenta picos abruptos en las cercanías de $(1; 0)$. Probaremos entonces que el límite existe, utilizando uno de los métodos derivados del Teorema 3.1 o 3.2. La gráfica nos sugiere, además, que el límite es $L = 0$ pues la altura de la gráfica se aproxima a ese valor cuando $(x; y)$ se acerca a $(1; 0)$. Como la función no puede expresarse como producto de dos funciones: una en la variable “x” y otra en la variable “y” (Teorema 3.1), intentaremos aplicar el Método de Coordenadas Polares (Teorema 3.2), ejecutando los comandos:

Clear [f]

$$x_0 = 1; \quad y_0 = 0; \quad L = 0;$$

$$f[x_-, y_-] = \frac{\cos((x-1)^2 + y^2 + \frac{\pi}{2})(x-1)y + y^4}{(x-1)^2 + y^2};$$

FullSimplify [f [$x_0 + r \text{Cos}[\theta]$, $y_0 + r \text{Sin}[\theta]$] - L]

El resultado obtenido es

$$-\sin[\theta] \cos[\theta] \sin[r^2] + \sin^4[\theta] r^2$$

Esto significa que

$$f(x_0 + r \cos(\theta), y_0 + r \sin(\theta)) - L = -\sin(\theta) \cos(\theta) \sin(r^2) + \sin^4(\theta) r^2 = h_1(\theta) g_1(r) + h_2(\theta) g_2(r)$$

donde

$$h_1(\theta) = -\sin(\theta) \cos(\theta); g_1(r) = \sin(r^2); h_2(\theta) = \sin^4(\theta); g_2(r) = r^2.$$

Estas funciones verifican las hipótesis del teorema 3.2 y, por lo tanto, $\lim_{(x;y) \rightarrow (1;0)} f(x,y) = L = 0$.

6.3. Ejemplo

Si $f(x, y) = \frac{4(x-1)^2(y-2)^8}{((x-1)^3 + (y-2)^6)^2}$, ¿existe $\lim_{(x;y) \rightarrow (1;2)} f(x,y)$?

Resolución:

Primer Paso: Al graficar f en un entorno del punto $(1; 2)$ resulta

Plot3D $\left[\frac{4(x-1)^2(y-2)^8}{((x-1)^3 + (y-2)^6)^2}, \{x, -0.5, 1.5\}, \{y, 1.5, 2.5\} \right]$

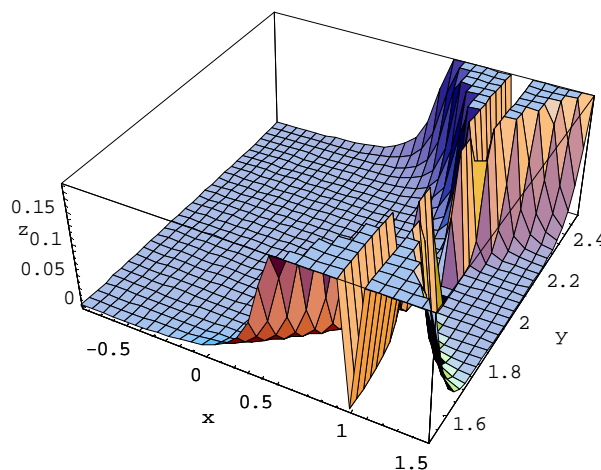


Figura 7: Gráfica de la función en la región $[-0.5, 1.5] \times [1.5, 2.5]$.

Segundo Paso: La gráfica presenta picos abruptos en las cercanías del $(1; 2)$. Procederemos entonces a demostrar que el límite no existe, aplicando alguno de los métodos citados en los Teoremas 4.1-4.4. Comenzaremos calculando los límites iterados (Teorema 4.1), escribiendo los comandos:

Clear [f]

$$f[x_, y_] = \frac{4(x-1)^2(y-2)^8}{((x-1)^3 + (y-2)^6)^2};$$

Limit [Limit [f [x, y], y \rightarrow 2], x \rightarrow 1]

Limit [Limit [f [x, y], x \rightarrow 1], y \rightarrow 2]

Mathematica arroja los siguientes resultados: $L_{12} = 0$, $L_{21} = 0$. Como $L_{12} = L_{21}$, este método nada asegura acerca de la existencia o no del límite doble. Intentaremos aplicar el Método Radial (Teorema 4.2). Para ello escribimos los comandos

$$x_0 = 1; \quad y_0 = 2;$$

$$\text{Limit} [f [x , y_0 + m (x - x_0) , x \rightarrow x_0]$$

Este límite da nuevamente cero, con lo cual nada podemos afirmar, con este método, acerca de la existencia del límite (pues la variable “m” no figura en el valor del límite radial). Probaremos entonces con el Método por Curvas. Primeramente hallaremos la expresión general de $f (x , y_0 + m (x - x_0)^n)$, a fin de averiguar qué valor de “n” conviene tomar. Ejecutamos entonces el comando:

$$f [x , y_0 + m (x - x_0)^n]$$

Se obtiene la expresión

$$\frac{4 m^8 (x - 1)^{8n+2}}{\left((x - 1)^3 + m^6 (x - 1)^{6n} \right)^2}$$

Ahora bien, escogeremos “n” de manera tal que $(x - 1)$ quede elevado al mismo exponente, en todos los términos donde éste figura. De este modo, resulta $3 = 6n$. En consecuencia, $n = 1 / 2$. Calculamos a continuación el límite por curvas con dicho valor de “n”:

$$n = 1 / 2;$$

$$\text{Limit} [f [x , y_0 + m (x - x_0)^{1/2} , x \rightarrow x_0]$$

El resultado obtenido es

$$\frac{4 m^8}{\left(1 + m^6 \right)^2}$$

Luego, como “m” figura en el valor de este límite, concluimos que no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (1;2)} f(x,y)$.

6.4. Ejemplo

Analizar la existencia del $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{\text{sen}(x^2 - 1) \ln(y^2 - 8)}{(x^2 - 1) (y^2 - 9)}$

Resolución:

Primer Paso: Graficamos f en las cercanías del punto (1 ;3):

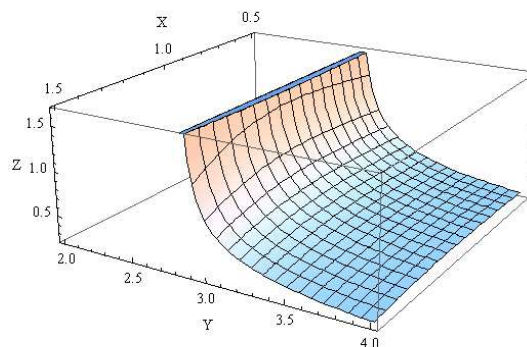


Figura 8: Gráfica de la función en la región [0.5, 1.5] x [2, 4].

Segundo Paso: Observamos que la gráfica no presenta picos abruptos en las cercanías del (1; 3). Probaremos entonces que el límite existe, utilizando el Método de Separación de Variables (Teorema 3.1)

pues la función puede expresarse como producto de dos funciones: una en la variable “x” y otra en la

variable “y”. Es decir, $f(x, y) = g(x) h(y)$ donde $g(x) = \frac{\text{sen}(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)}$, $h(y) = \frac{\ln(y^2 - 8)}{(y^2 - 9)}$.

Escribimos entonces los comandos:

$$g[x_] = \frac{\text{Sin}[x^2 - 1]}{(x^2 - 1)} ; h[y_] = \frac{\text{Log}[y^2 - 8]}{(y^2 - 9)} ; x_0 = 1; y_0 = 3 ;$$

Limit [g [x] , x → x₀] Limit [h [y] , y → y₀]

Luego de ejecutarlos, el resultado obtenido es 1, con lo cual $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{\text{sen}(x^2 - 1) \ln(y^2 - 8)}{(x^2 - 1)(y^2 - 9)} = 1$.

7. CONCLUSIONES

El uso de un software en la enseñanza de la Matemática brinda una valiosa ayuda en el planteo y resolución de un problema matemático. El Mathematica, por la potencia y simplicidad de su manejo constituye, tanto para el docente como para el estudiante, una poderosa herramienta gráfica y de cálculo que producirá un marcado interés en el estudio y comprensión de los temas.

8. REFERENCIAS

- [1] G.Thomas, *Calculus and Analytic Geometry*, Addison Wesley, Massachusetts, 1998.
- [2] E. Swokowsky, *Cálculo con Geometría Analítica*, Iberoamérica, México, 1988.
- [3] L.Leithold, *El Cálculo*, Oxford University Press, México, 1998.
- [4] J.Mardsen y A.Tromba, *Cálculo Vectorial*, Addison Wesley, Wilmington, 2005.
- [5] James Stewart, *Cálculo*, Thomson Learning, México, 2005.
- [6] Frank Ayres y Elliot Mendelson, *Cálculo Diferencial e Integral*, McGraw-Hill, México, 1994.
- [7] Ron Larson, Robert Hostetler y Bruce Edwards, *Cálculo II de varias variables*, McGraw-Hill, México, 2008.
- [8] Samira Abdel Masih, *Análisis Matemático II aplicado a Mathematica*, U.N.L.Z, Buenos Aires, 1998.