



II CAIM 2010  
Segundo Congreso Argentino  
de Ingeniería Mecánica  
San Juan - Noviembre 2010

## Cuestionamiento al Modelo de Reynolds en Cojinetes de Deslizamiento Hidrodinámicamente Lubricados

Omar Emilio Mayer

*Departamento de Ingeniería Mecánica - Facultad de Ingeniería  
Universidad de Buenos Aires  
Av. Paseo Colón 850 - C1063ACV – Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Argentina  
Tel: (54 11) 4343 0891 / 2775 - E-mails: [omayer@fi.uba.ar](mailto:omayer@fi.uba.ar) , [oemayer@gmail.com](mailto:oemayer@gmail.com)*

### RESUMEN

Los Cojinetes de Deslizamiento Hidrodinámicamente Lubricados suelen ser tratados conforme lo que se conoce como el Modelo de Reynolds, esto es, suponiendo el equilibrio de un cubo diferencial de lubricante sometido a esfuerzos de presión en sus caras normales al movimiento circular del fluido y a esfuerzos de viscosidad conforme lo que se conoce como Ley de Newton en sus caras normales a las anteriores (caras paralelas a las superficies del muñón y del cojinete); bajo flujo unidireccional, esto es, únicamente flujo en la dirección circunferencial de las superficies muñón – cojinete; sin variación alguna de la presión en la dirección longitudinal del árbol – cojinete y supuesto espesor de película constante en la misma dirección. Bajo las mismas hipótesis (Ley de Newton y Modelo de Reynolds válidos, flujo unidireccional y espesor de película constante en la dirección longitudinal del árbol), el artículo y de modo analítico, demuestra: a) la misma posición angular para las presiones extremas respecto a la dirección espesores extremos de película (dirección centros secciones transversales muñón – cojinete), una a cada lado de esta dirección; b) la perpendicularidad entre las direcciones que definen los espesores extremos de película y la carga actuante, c) la ubicación de estos espesores respecto a los sentidos de la carga actuante y de rotación del muñón respecto al cojinete y d) lo insuficiente que resulta el Modelo de Reynolds, utilizando lo que se conoce como el Número de Sommerfeld, como para determinar la totalidad de los parámetros geométricos de funcionamiento en el caso de cojinetes hidrodinámicamente lubricados cuando les son aplicados el Modelo de Reynolds con flujo unidireccional, lo que hace suponer en consecuencia inválidos los diagramas conocidos como de Raymondi – Boyd para cojinetes de longitud infinita o con derivada de la presión respecto a la longitud del cojinete nula.

**Palabras Claves:** Cojinete, Reynolds, Hidrodinámica, Lubricación, Sommerfeld.

## 1. INTRODUCCIÓN

Trata este trabajo el análisis de lo que conoce como Modelo de Reynolds en la solución del problema de la rotación relativa de gorriones y/o muñones, por ejemplo, de árboles transmisores de potencia mecánica, dentro de cojinetes hidrodinámicamente lubricados, deslizándose circunferencialmente uno respecto al otro y con la interposición total entre ambos de una película de líquido lubricante llenando este, en forma completa, el huelgo entre gorrón y cojinete; demostrando: a) la igualdad de ángulos de las direcciones, una a cada lado, donde se verifican las presiones máxima y mínima de lubricante respecto a la dirección donde se verifican los espesores mínimo y máximo de película del mismo (dirección centros muñón – cojinete); b) la perpendicularidad entre la dirección que definen los espesores mínimo y máximo de película y la dirección de la carga actuante, c) la ubicación de estos espesores respecto a los sentidos de la carga actuante y de rotación del muñón respecto al cojinete y d) lo insuficiente que resulta el Modelo referido, al menos en el supuesto el lubricante sin gradiente de presión en la dirección longitudinal del par muñón – cojinete y de espesor constante a lo largo de la misma dirección, esto es, ejes longitudinales de cojinete y muñón paralelos, como para que y de manera determinante, resolver la totalidad de los parámetros geométricos que resultan en juego.

Bajo el supuesto de que el sistema resulta sin gradiente de presión de lubricante en la dirección del eje longitudinal del par muñón – cojinete y estos paralelos entre si, todos los factores y/o variables resultantes en este trabajo se los trata referidos a la unidad de longitud del par muñón – cojinete, esto es, se los trata sin tener en cuenta la longitud de dicho par por ante el supuesto establecido ser indistinto y por simplificación de terminología y expresiones matemáticas.

## 2. ALGUNOS SÍMBOLOS

$\alpha_{mx,mn}$  = Ángulo que referencia la dirección, una a cada lado, donde se produce la presión hidrodinámica máxima  $p_{mx}$ , mínima  $p_{mn}$ , respecto a la dirección  $h_{mx} - h_{mn}$  (dirección  $O_m - O_c$ ). En el trabajo se demuestra  $\alpha_{mx} = \alpha_{mn}$ , luego  $\alpha_{mx,mn} = \alpha_{mx} = \alpha_{mn}$

$C_c$  = Superficie cojinete

$C_m$  = Superficie muñón

$C_r$  = Huelgo radial entre cojinete y muñón, ambos centrados entre si ( $C_r = R - r$ )

Nota: Con  $C_r$  pequeño,  $R \cong r$ . Menor  $C_r \Rightarrow$  Mayor efectividad cuña lubricante.

$dP$  = Fuerza diferencial de presión

$dPF$  = Componente de  $dP$  en la dirección de  $\underline{F}$

$dPnF$  = Componente de  $dP$  en la dirección normal a  $\underline{F}$

$dt$  = Elemento diferencial de ángulo  $t$

$\epsilon_p$  = Ángulo entre la dirección de la carga  $\underline{F}$  y la dirección  $h_{mx} - h_{mn}$  (dirección  $O_m - O_c$ )

$f$  = Coeficiente de fricción con el cual el lubricante actúa

$F$  = Carga actuante desde el muñón sobre el lubricante – cojinete.

$F_t$  = Fuerza tangencial a aplicar en la superficie del muñón para vencer la fricción con la cual el lubricante actúa.

- $h$  = Espesor de película lubricante, función del ángulo  $\underline{t}$  o bien de la ordenada  $\underline{x}$   
 $h_{mx,mn}$  = Espesor máximo, mínimo, de película lubricante  
 $h_{pmx,pmn}$  = Espesor de película donde la presión en el lubricante es máxima ( $\underline{p} = \underline{p_{mx}}$ ), mínima ( $\underline{p} = \underline{p_{mn}}$ ). En el trabajo se demuestra  $\underline{h_{pmx}} = \underline{h_{pmn}}$ , luego  $\underline{h_{pmx,mn}} = \underline{h_{pmx}} = \underline{h_{pmn}}$   
 $O_c$  = Centro geométrico cojinete  
 $O_m$  = Centro geométrico muñón  
 $O_{xy}$  = Origen par coordenado ejes referenciales  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$   
 $p$  = Presión hidrodinámica del lubricante, función la misma únicamente del ángulo  $\underline{t}$  o bien de la ordenada  $\underline{x}$   
 $p_{mx,mn}$  = Presión hidrodinámica máxima, mínima, lubricante  
 $Q$  = Caudal circunferencial de lubricante.  
 $r$  = Radio contorno muñón. Nota: A los efectos la cuña de lubricante resulte efectiva,  $\underline{R}$  y  $\underline{r}$  deben resultar minimamente diferenciables, de donde  $\underline{r} \cong \underline{R}$   
 $R$  = Radio contorno cojinete  
 $S$  = Número de Sommerfeld, Número Característico del Cojinete, Índice del Cojinete  
 $t$  = Coordenada angular  
 $t_{pmx,pmn}$  = Ángulo que referencia la dirección donde se produce la presión hidrodinámica máxima  $\underline{p_{mx}}$ , mínima  $\underline{p_{mn}}$ , respecto al eje coordenado  $\underline{y}$   
 $x, y$  = Par de ejes coordenados referenciales  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$  ( $\underline{x}$ : Circunferencial;  $\underline{y}$ : Radial)  
 (Eje  $\underline{y}$ : Contiene los centros  $\underline{O_m}$  del muñón y  $\underline{O_c}$  del cojinete).  
 $U$  = Velocidad lineal (tangencial) contorno muñón respecto al cojinete.  
 $v$  = Velocidad lineal (genérica) de distintas capas del lubricante respecto al cojinete.  
 $w$  = Velocidad angular con que el muñón rota respecto al cojinete.  
 $\mu$  = Viscosidad dinámica del lubricante.

### 3. POSICIÓN PAR MUÑÓN – COJINETE Y ECUACIONES SUPUESTAS VÁLIDAS

Ecuación Diferencial de Reynolds (flujo unidireccional, flujo únicamente circunferencial, no flujo en la dirección del eje longitudinal del muñón) [1 a 4, 7]:

$$\frac{\partial(h^3 * (\frac{\partial p}{\partial x}))}{\partial x} - 6 * \mu * U * (\frac{\partial h}{\partial x}) = 0 \quad (01)$$

Resultando únicamente circulación circunferencial de lubricante, constante la misma, y siendo  $\underline{dx} = \underline{R} * \underline{dt}$ , de la Ecuación (01) y por [2 a 4], resulta:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6 * \mu}{h^3} * (U * h - 2 * Q) \quad (02)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{6 * \mu * R}{h^3} * (U * h - 2 * Q) \quad (03)$$

Número  $S$  de Sommerfeld [1 a 4, 6, 7]:

$$S = \frac{\mu * R^3 * w}{\pi * F * Cr^2} \quad (04)$$

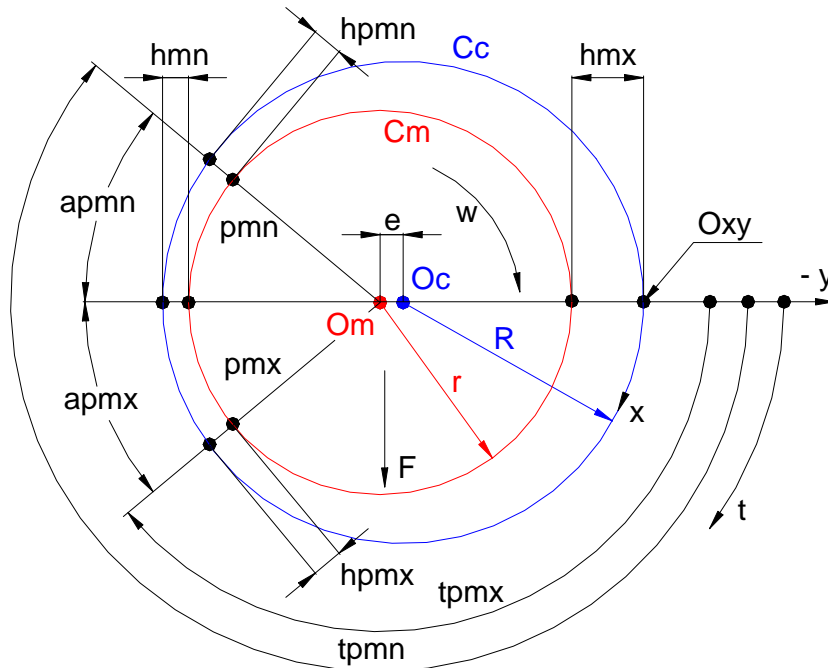


Figura 1 Posición par Muñón - Cojinete

### 3.1. Espesor $h$ de película

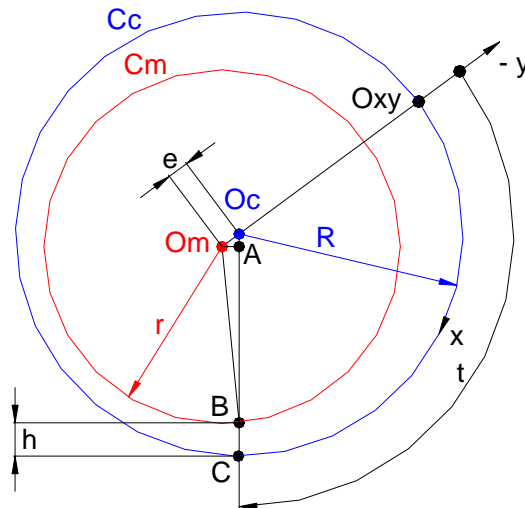


Figura 2 Espesor de Película  $h$

La Figura 2 [1] referencia geoméricamente una determinación del valor del espesor de película  $h$ , el mismo a la coordenada angular  $t$ .

Supuesto: a)  $h = C.Oc - A.B - A.Oc$  [1] y b)  $A.B = r$  [1] ( $Cr$  pequeño,  $e$  mas pequeño), siendo que en  $t = 0, \pi$  la siguiente expresión para  $h$  resulta "totalmente" válida y siendo  $C.Oc = R$  y  $A.Oc = -e * \cos(t)$ , también por [7],  $h$  resulta en:

$$h = Cr + e \cdot \cos(t) \quad (05)$$

#### 4. IGUALDAD ENTRE $a_{pmx}$ Y $a_{pmn}$ (Figura 1)

Verificándose que donde  $p = p_{mx}$  y donde  $p = p_{mn}$  la derivada de la presión respecto a  $x$  y/o a  $t$  resulta nula, conforme las Ecuaciones (02) y (03) resulta:

$$U \cdot h_{pmx} = U \cdot h_{pmn} = 2 \cdot Q \quad (06)$$

Con la Ecuación (05) en esta última, operando y con la misma Ecuación (05) resulta:

$$\cos(t_{pmx}) = \cos(t_{pmn}) = \frac{2 \cdot Q - U \cdot Cr}{U \cdot e} = \frac{h_{pmx} - Cr}{e} = \frac{h_{pmn} - Cr}{e} \quad (07)$$

$$\cos(t_{pmx}) = \cos(t_{pmn}) \Rightarrow t_{pmx} = t_{pmn} \text{ o } t_{pmx} = 2 \cdot \pi - t_{pmn}$$

Siendo  $p_{mx} \neq p_{mn}$  ( $F \neq 0$ ), corresponde contemplar únicamente  $t_{pmx} = 2 \cdot \pi - t_{pmn}$  y siendo  $a_{pmx} = \pi - t_{pmx}$  y  $a_{pmn} = t_{pmn} - \pi$ , operando se obtiene:

$$a_{pmx} = a_{pmn} = a_{pmx,pmn} \quad (08)$$

Con  $a_{pmx} = a_{pmn}$  y por simetría (Figura 1), también por Ecuación (07), resulta:

$$h_{pmx} = h_{pmn} = h_{pmx,mn} \quad (09)$$

#### 5. INSUFICIENCIA DEL MODELO DE REYNOLDS

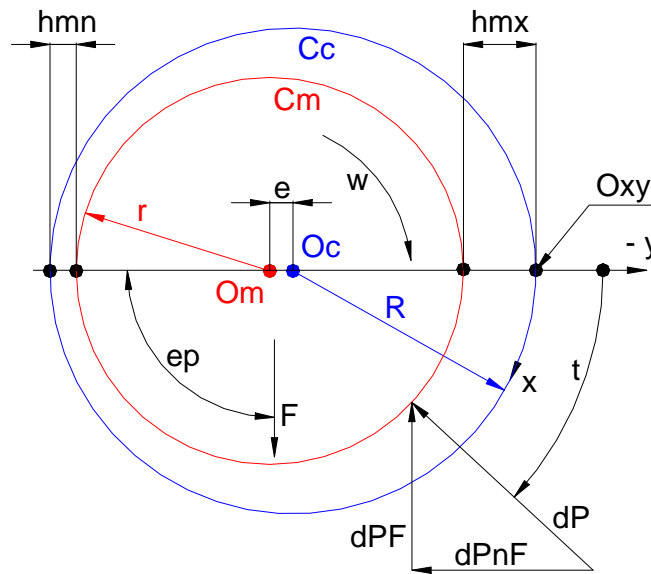


Figura 3 Equilibramiento de la Carga F

La Figura 3 muestra un diferencial de fuerza de presión  $dP$  actuando sobre la superficie del muñón y sus componentes  $dPF$  y  $dPnF$ . Resultando,  $dP = p \cdot R \cdot dt$  y:

$$\int_0^{2\pi} dPF = -F$$

$$\int_0^{2\pi} dPnF = 0$$

puesta la Ecuación (01) en estas dos últimas integrales y resolviendo las mismas, se obtiene:

$$F = \frac{\pi * \mu * R^2 * U * (Cr - e)^{0,5} * (2 * (Cr^2 - e^2) + h_{pmx, pmn} * (e - 2 * Cr)) * \text{sen}(ep)}{((Cr^2 - e^2)^2 * (Cr + e)^{0,5}) / 6} \quad (10)$$

$$0 = \frac{\pi * \mu * R^2 * U * (Cr - e)^{0,5} * (2 * (Cr^2 - e^2) + h_{pmx, pmn} * (e - 2 * Cr)) * \text{cos}(ep)}{((Cr^2 - e^2)^2 * (Cr + e)^{0,5}) / 6} \quad (11)$$

No siendo nulas  $F$ ;  $\mu$ ;  $R$ ;  $U$ ;  $e$  y siendo  $Cr \neq e$ , estas dos últimas Ecuaciones (10) y (11) se satisfacen simultáneamente si  $\text{cos}(ep) = 0 \Rightarrow ep = (\pi / 2); (3 * \pi / 2)$ .

Conforme el sentido de rotación y el sentido de la carga  $F$  dibujados en las Figuras 1 y 3, corresponde una cuña de lubricante convergente en la zona inferior y una divergente en la zona superior, con lo que la única solución posible resulta con  $ep = \pi / 2$  a como las Figuras 1 y 3 muestran.

Si  $ep = 3 * \pi / 2$  resultan cuñas convergente en la zona superior y divergente en la zona inferior.

Ante el caso entonces  $ep = \pi / 2$ , corresponde  $\text{sen}(ep) = 1$  y la Ecuación (10) en:

$$F = \frac{6 * \pi * \mu * R^2 * U * (Cr - e)^{0,5} * (2 * (Cr^2 - e^2) + h_{pmx, pmn} * (e - 2 * Cr))}{(Cr^2 - e^2)^2 * (Cr + e)^{0,5}} \quad (12)$$

Siendo  $F \geq 0$ , la Ecuación (12) cumplirá tal condición si

$$h_{pmx, pmn} \leq \frac{2 * (Cr^2 - e^2)}{2 * Cr - e} \quad (13)$$

Si  $h_{pmx, mn} = A * Cr$  y  $e = B * Cr$  ( $A$  y  $B$  dimensionales), la Ecuación (13) se puede escribir:

$$2 * B^2 - A * B + 2 * (A - 1) = 0 \quad (14)$$

Resultando 2 (dos) soluciones para la Ecuación (14) a llamar a las mismas  $B_1$  y  $B_2$ , estas resultan en:

$$B_1 \leq \frac{A + (A^2 - 16 * (A - 1))^{0,5}}{4} \quad (15)$$

$$B_2 \leq \frac{A - (A^2 - 16 * (A - 1))^{0,5}}{4} \quad (16)$$

Siendo que las Ecuaciones (15) y (16) resultan con solución real si el valor de  $A$  verifica  $0 \leq A \leq 1$  y siendo  $h_{pmx, pmn} = A * Cr$  por definición, para  $h_{pmx, pmn}$  resulta:

$$0 \leq h_{pmx, pmn} \leq Cr \quad (17)$$

verificándose así la situación representada en las Figuras 1 y 3.

**Nota:** Sobre una dirección normal al eje  $y$ , continente la misma del centro  $O_c$  (también del centro  $O_m$ ,  $e$  pequeño), el espesor  $h$  de película resulta igual al huelgo radial  $Cr$ , incluso por aplicación de la Ecuación (05).

### 5.1. Función tensión cortante $T$ en el lubricante y tensiones cortantes $T_0$ y $T_h$ en las superficies del cojinete y del muñón respectivamente

Siendo, por lo que se conoce como Ley de Newton, [1 a 5, 7]:

$$T = \mu * \frac{\partial v}{\partial y} \quad (18),$$

siendo por [2 a 4] y por deducción para la Ecuación Diferencial de Reynolds (Ecuación (01)):

$$v = \frac{1}{2 * \mu} * \frac{\partial p}{\partial x} * (y^2 - h * y) + \frac{U * y}{h} \quad (19),$$

operando con estas dos últimas Ecuaciones (18) y (19) y con las Ecuaciones (02) y (06), se obtiene:

$$T = \frac{\mu * U}{h} * \left(1 + \frac{3 * (2 * y - h) * (h - h_{pmx}, p_{mn})}{h^2}\right) \quad (20)$$

Atendiendo a esta última Ecuación (20) y a que  $y$  es nula en la superficie del cojinete y a que vale  $h$  en la superficie del muñón, las tensiones cortantes  $T_0$  en la superficie del cojinete y  $T_h$  en la superficie del muñón resultan con:

$$T_0 = \frac{\mu * U}{h^2} * (3 * h_{pmx}, p_{mn} - 2 * h) \quad (21)$$

$$T_h = \frac{\mu * U}{h^2} * (4 * h - 3 * h_{pmx}, p_{mn}) \quad (22)$$

## 5.2. Carga $F$

Siendo  $e_p = \pi / 2$ ;  $e = B * Cr$  y  $h_{pmx}, p_{mn} = A * Cr$  por definición,  $U = w * R$  ( $Cr$  pequeño,  $R \cong r$ ), con las mismas en la Ecuación (04) y con esta en la Ecuación (11) se obtiene:

$$S = \frac{(1+B)^{0,5} * (1-B^2)^2}{6 * \pi^2 * (1-B)^{0,5} * (2 * (1-B)^2 + A * (B-2))} \quad (23)$$

$$F = \frac{\mu * R^3 * w}{\pi * S * Cr^2} \quad (24)$$

## 5.3. Fuerza tangencial $F_t$ a aplicar en la superficie del muñón para vencer la fricción entre capas lubricantes.

Siendo:

$$F_t = R * \int_0^{2 * \pi} T_h * dt \quad (25)$$

con  $h_{pmx}, p_{mn} = A * Cr$  y  $e = B * Cr$  por definición y con Ecuaciones (05) y (22) en esta última Ecuación (25), operando resulta:

$$F_t = \frac{2 * \pi * \mu * U * R}{Cr} * \frac{4 * (1-B^2) + 3 * A}{(1-B^2)^{1,5}} \quad (26)$$

Siendo que del cociente entre  $F_t$  y  $F$  resulta el coeficiente de fricción  $f$ , operando correspondientemente con las Ecuaciones (23), (24) y (26) se obtiene:

$$f = \frac{R}{3 * Cr} * \frac{(4 * (1-B^2) + 3 * A) * (1+B)^{0,5} * (1-B^2)^{0,5}}{(1-B)^{0,5} * (2 * (1-B^2) + A * (B-2))} \quad (27)$$

## 6. CONCLUSIONES

- Siendo que con la Ecuación (04), la carga  $E$ , la viscosidad  $\mu$  del lubricante, el radio  $R$  del cojinete, el juego radial  $Cr$  y la velocidad angular  $\omega$  del muñón como datos de un problema en particular, es posible determinar el Número de Sommerfeld  $S$  con que el sistema funcionaría, no resulta posible establecer de manera determinante ningún parámetro geométrico del sistema, al menos el mismo bajo alguna carga, como ser la excentricidad  $e$  y los valores de los espesores de película  $h_{pmx,pmn}$  donde las presiones en el lubricante resultan extremas, como así también la posición angular  $\alpha_{pmx,pmn}$  de dichos espesores, atendiendo a que hay infinitos pares de valores  $A - B$  ( $h_{pmx,mn} / Cr - e / Cr$ ) que satisfacen  $S$  (Ecuación (23)), la misma función exclusivamente de  $A$  y de  $B$  (de  $h_{pmx,pm} / Cr$  y de  $e / Cr$ ), de donde entonces la Ecuación Diferencial de Reynolds (Ecuación (01)), al menos para flujos unidireccionales y por si misma, resulta insuficiente como para resolver de manera determinante la totalidad de los parámetros geométricos que resultan en juego.
- las posiciones de los espesores de película donde se manifiestan las presiones extremas resultan simétricas respecto a la dirección que definen los espesores extremos de película (dirección centros muñón – cojinete),
- con gradiente de presión nulo en la dirección longitudinal del sistema, la dirección que definen los espesores extremos de película resulta a  $90^\circ$  de la dirección en la cual actúa la carga,
- la presión máxima resulta entre la dirección de la carga y la dirección que fijan los espesores extremos de película desde la dirección de la carga en el sentido de rotación del muñón respecto al cojinete
- la presión mínima resulta entre la dirección que fijan los espesores extremos de película y la dirección de la carga desde el espesor mínimo de película en el sentido de rotación del muñón respecto al cojinete,
- resulta una expresión (Ecuación (20)) que relaciona la tensión cortante  $T$  en el lubricante, la viscosidad del lubricante, la velocidad tangencial periférica del muñón respecto al cojinete, los espesores de película donde se verifican las presiones extremas y el espesor de película y la ordenada  $y$  ( $0 \leq y \leq h$ ) donde se quiere el valor de  $T$ ,
- resultan dos expresiones (Ecuaciones (21) y (22)) que relacionan las tensiones cortantes  $T_0$  y  $T_h$  extremas en el lubricante (en borde de cojinete y en borde de muñón respectivamente), la viscosidad del lubricante, la velocidad tangencial periférica del muñón respecto al cojinete, los espesores de película donde se verifican las presiones extremas y el espesor de película donde se quieren los valores de  $T_0$  y de  $T_h$ ;
- resulta una expresión (Ecuación (23)) que relaciona el Número de Sommerfeld con el juego radial, con los espesores de película donde se verifican las presiones extremas y con la excentricidad,
- resulta una expresión (Ecuación (26)) que relaciona la fuerza tangencial  $F_t$  en la periferia del muñón como para vencer la fricción que se produce en la masa de lubricante, la viscosidad del lubricante, la velocidad tangencial periférica del muñón respecto al cojinete, el radio del cojinete, el juego radial, los espesores de película donde se verifican las presiones extremas y la excentricidad,
- resulta una expresión (Ecuación (27)) que relaciona el coeficiente de fricción  $f$  con el radio del cojinete, el juego radial, los espesores de película donde se verifican las presiones extremas y la excentricidad,

## 8. REFERENCIAS

- [1] Ings. O. A. Falco y E. H. Lauría, *Mecanismos*, Centro Estudiantes de Ingeniería La Línea Recta, 1994,
- [2] J. E. Shigley, *Diseño en Ingeniería Mecánica*, 2da. Edición, Libros McGraw-Hill de México, S.A. de C.V., 1979, Capítulo 10, Páginas 404 a 436, ISBN 968-6046-09-7
- [3] J. E. Shigley, *Diseño en Ingeniería Mecánica*, 4ta. Edición en español, McGraw-Hill Interamericana de México, S.A. de C.V., 1990, Capítulo 12, Páginas 542 a 570, ISBN 968-422-778-7
- [4] J. E. Shigley y C. R. Mischke, *Diseño en Ingeniería Mecánica*, 6ta. Edición, McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V., 2002, Capítulo 12, Páginas 748 a 777, ISBN 968-422-778-7
- [5] R. Calero Pérez y J. A. Carta González, *Fundamentos de Mecanismos y Máquinas para Ingenieros*, McGraw-Hill/Interamericana de España, 1999, Capítulo 17, Páginas 584 a 585 y 596 a 598, ISBN 84-481-2099-X
- [6] R. L. Mott, *Diseño de Elementos de Máquinas*, Pearson Educación de México, S.A. de C.V., 2006, Capítulo 16, Páginas 674 a 682, ISBN 970-26-0812-0
- [7] Robert. L. Norton, *Diseño de Máquinas*, Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1999, Capítulo 10, Páginas 641 a 657, ISBN 970-17-0257-3