

ESFUERZOS VARIABLES COMPUESTOS (NORMALES MAS TANGENCIALES) 'SIMPLES'

La FIGURA 10 siguiente muestra un cubo elemental sometido a un estado plano de tensiones con una tensión tangencial dada τ constante (la misma cumpliendo el teorema de Cauchy) y con una tensión normal alternativa dada σ_a . Excluyendo las tensiones tangenciales de cizallamiento, la figura referenciada muestra el estado de tensiones al que se encuentran sometidos los cubos constituyentes de un árbol transmisor de potencia mecánica, no estando sometido el mismo a 'centrifugado' alguno como así tampoco a carga axial constante alguna.

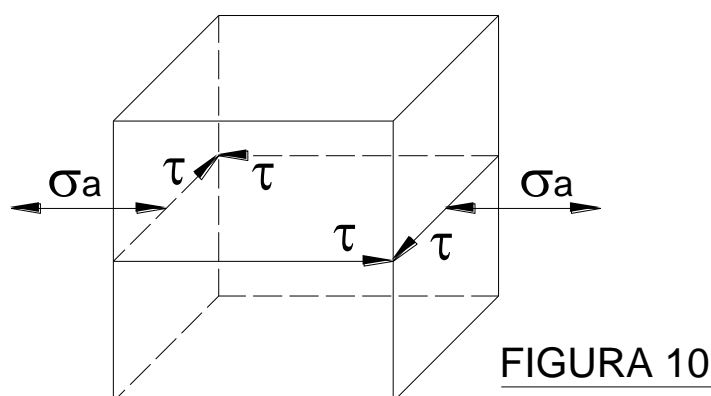


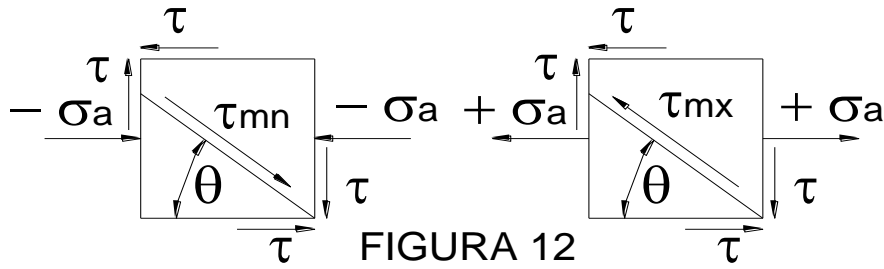
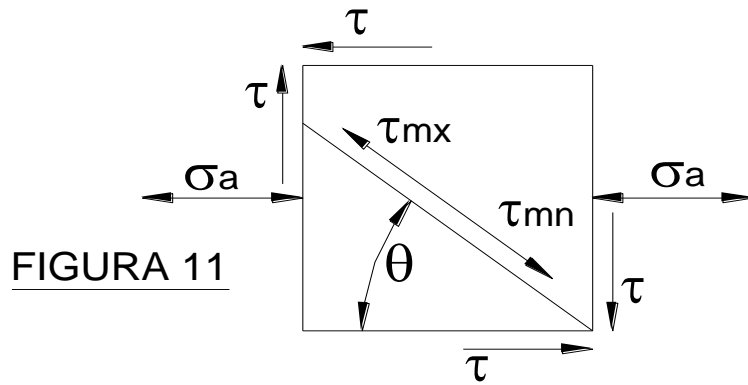
FIGURA 10

Resultando τ_a (tensión tangencial alternativa) = 0 en la dirección de τ y σ_m (tensión normal media) = 0 en la dirección de σ_a , la dirección orientada al ángulo θ (ver FIGURA 11 siguiente) verifica, atendiendo a la variación de la tensión normal σ entre $+\sigma_a$ y $-\sigma_a$, una tensión tangencial 'máxima' τ_{mx} y una tensión tangencial 'mínima' τ_{mn} (FIGURAS 11 y 12 siguientes), ambas del mismo sentido o no (no 'interesa' el sentido y/o el valor absoluto relativo), dadas por:

$$\tau_{mx} = + \frac{\sigma_a}{2} * \text{sen}(2\theta) + \tau * \text{cos}(2\theta)$$

$$\tau_{mn} = - \frac{\sigma_a}{2} * \text{sen}(2\theta) + \tau * \text{cos}(2\theta)$$

NOTA 06: Recordando el teorema de Cauchy, la dirección perpendicular a la en análisis verifica la misma situación, con la única diferencia del cambio del signo del momento que provocan las tensiones tangenciales dispuestas a 90° entre sí, razón que da por válido que dichas direcciones resultan cubiertas por el análisis en gestión. Esta cuestión DEBE SER COMPRENDIDA, el análisis de las direcciones perpendiculares entre si puede resultar 'confuso y/o complejo', en cuanto resulta de aplicar mayor cantidad de subíndices y de escritura, complicando la situación sin beneficio alguno.



De la variación de τ en una dirección dada, la misma entre τ_{mx} y τ_{mn} , surge una tensión tangencial media τ_m y una alternativa τ_a , dadas por:

$$\tau_m = \frac{\tau_{mx} + \tau_{mn}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{\sigma_a}{2} * \text{sen}(2\theta) + \tau * \text{cos}(2\theta) \\ - \frac{\sigma_a}{2} * \text{sen}(2\theta) + \tau * \text{cos}(2\theta) \end{array} \right.$$

$$\tau_m = \tau * \text{cos}(2\theta) \quad \boxed{\tau_m = \tau * \text{cos}(2\theta)}$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{mx} - \tau_{mn}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{\sigma_a}{2} * \text{sen}(2\theta) + \tau * \text{cos}(2\theta) \\ + \frac{\sigma_a}{2} * \text{sen}(2\theta) - \tau * \text{cos}(2\theta) \end{array} \right.$$

$$\tau_a = \frac{\sigma_a}{2} * \sin(2\theta)$$

$$\tau_a = \frac{\sigma_a}{2} * \sin(2\theta)$$

Conforme resultaron las expresiones para τ_m y para τ_a , resulta que:

- A) Para direcciones orientadas a $\theta = 0^\circ$ (dirección dato), $\tau_m = \tau$ y $\tau_a = 0$
 B) Para direcciones orientadas a $\theta = 45^\circ$, $\tau_m = 0$ y $\tau_a = \sigma_a / 2$

Dado que las direcciones orientadas a $\theta \geq 45^\circ$ resultan perpendiculares a las analizadas, a las mismas les resulta de aplicación el teorema de Cauchy (Nota 06 inmediatamente anterior) de donde resultan cubiertas por el análisis realizado y por el intervalo $0 \leq \theta \leq 45^\circ$ contemplado.

Siendo $\tau_m = \tau * \cos(2\theta)$ $\tau_a = \frac{\sigma_a}{2} * \sin(2\theta)$

$$(\sin(2\theta))^2 + (\cos(2\theta))^2 = 1$$

Resulta $(\cos(2\theta))^2 = \frac{\tau_m^2}{\tau^2}$ $(\sin(2\theta))^2 = \frac{\tau_a^2}{(\sigma_a^2) / 4}$

$$\frac{\tau_a^2}{(\sigma_a / 2)^2} + \frac{\tau_m^2}{\tau^2} = 1$$

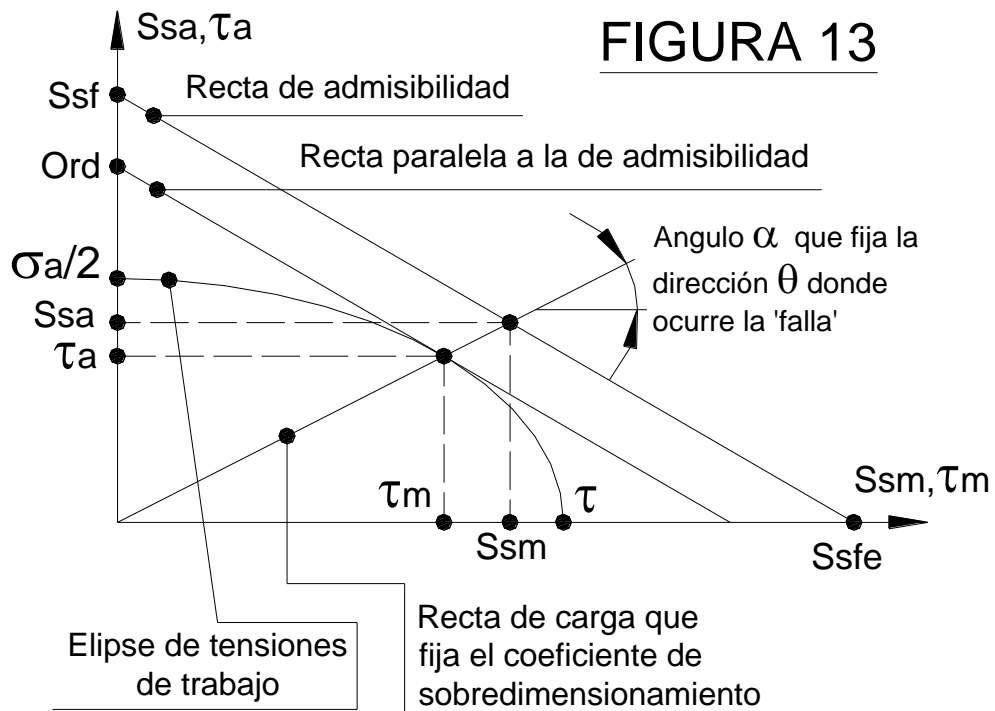
$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{\tau * \tau_a}{(\sigma_a / 2) * \tau_m}$$

La ecuación inmediatamente anterior izquierda resulta la ecuación de una elipse (elipse de tensiones media y alternativa de trabajo) que puesta en un diagrama de Goodman (FIGURA 13 siguiente), posee por coordenadas al origen los valores de τ en el eje de las tensiones medias (abscisas) y de $\sigma_a / 2$ en el eje de las tensiones alternativas (ordenadas).

Siendo la pendiente de la recta de carga de una dirección θ cualquiera, el cociente entre las tensiones tangenciales alternativa y media, la ecuación inmediatamente anterior derecha relaciona la dirección θ con la pendiente de la recta de carga correspondiente con:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{\tau}{\sigma_a / 2} * \operatorname{tg}(\alpha)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\tau_a}{\tau_m}$$



COEFICIENTE DE SOBREDIMENSIONAMIENTO

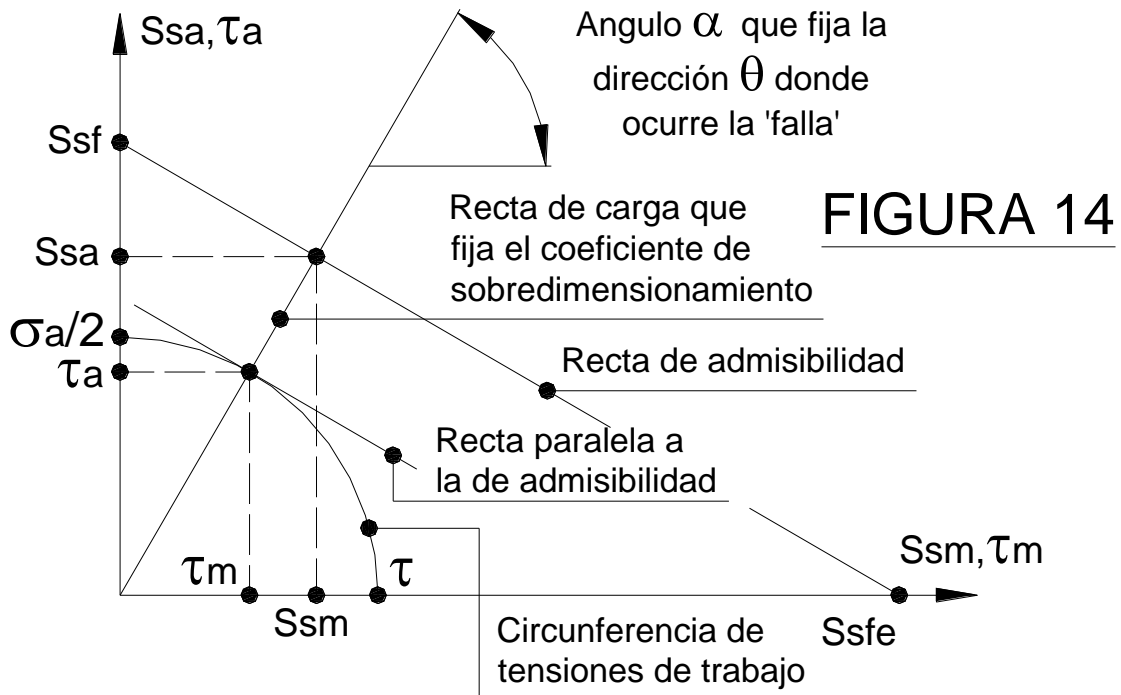
Puesto el caso de que la elipse fuese una circunferencia (caso particular extremo de la elipse) la dirección θ que fija el coeficiente de sobredimensionamiento del 'cubo' queda dada por la recta de carga (FIGURA 14 siguiente) normal a la recta tangente a la circunferencia y paralela a la de admisibilidad 'simplificada' $S_{sf} - S_{sfe}$, por menor distancia entre la circunferencia y la recta de admisibilidad, esto es, por la recta de carga determinada por el punto de tangencia entre la circunferencia y la recta tangente a ella y paralela a la recta de admisibilidad.

'Extrapolando' la situación a una elipse (FIGURA 13), la recta de carga que fija el coeficiente de sobredimensionamiento del 'cubo' y consecuentemente la dirección θ correspondiente, queda determinada por el punto de tangencia entre la elipse y la recta paralela a la de admisibilidad y tangente a la elipse.

Siendo las variables τ_a y τ_m las ordenadas genéricas de la elipse y los valores datos $\sigma_a/2$ y τ las ordenadas al origen, la ecuación de la elipse resulta en:

$$\frac{\tau_a^2}{(\sigma_a/2)^2} + \frac{\tau_m^2}{\tau^2} = 1 \Rightarrow \frac{4 * \tau_a^2}{\sigma_a^2} + \frac{\tau_m^2}{\tau^2} = 1$$

$$4 * \tau^2 * \tau_a^2 + \sigma_a^2 * \tau_m^2 = \sigma_a^2 * \tau^2$$



Derivando:
$$8 * \tau^2 * \tau_a * \frac{\delta \tau_a}{\delta \tau_m} + 2 * \sigma_a^2 * \tau_m = 0$$

$\frac{\delta \tau_a}{\delta \tau_m} = \frac{-\sigma_a^2 * \tau_m}{4 * \tau^2 * \tau_a}$
--

Siendo la ecuación de la recta tangente a la elipse y paralela a la recta de admisión:

$$\tau_a = \text{Ord} - \frac{S_{sf}}{S_{sfe}} * \tau_m$$

donde Ord = ordenada al origen y $-\frac{S_{sf}}{S_{sfe}}$ = pendiente (pendiente de la recta de admisión) y siendo que la derivada de la elipse posee la pendiente de la recta tangente a ella, resulta:

$$\frac{\delta \tau_a}{\delta \tau_m} = \frac{-\sigma_a^2 * \tau_m}{4 * \tau^2 * \tau_a} = - \frac{S_{sf}}{S_{sfe}}$$

Luego las ordenadas del punto de intersección (punto de tangencia) entre los elementos del análisis cumplen:

$$\tau_m = \frac{4 * \tau^2 * Ssf}{\sigma a^2 * Ssfe} * \tau_a$$

Puesta esta última en la ecuación de la elipse, resulta la ordenada τ_a del punto de tangencia entre la elipse y su recta tangente paralela a la de admisibilidad:

$$4 * \tau^2 * \tau_a^2 + \sigma a^2 * \frac{16 * \tau^4 * Ssf^2}{\sigma a^4 * Ssfe^2} * \tau_a^2 = \sigma a^2 * \tau^2$$

$$4 * \tau^2 * \tau_a^2 + \frac{16 * \tau^4 * Ssf^2}{\sigma a^2 * Ssfe^2} * \tau_a^2 = \sigma a^2 * \tau^2$$

$$4 * \tau^2 * \tau_a^2 * \left[1 + \frac{4 * \tau^2 * Ssf^2}{\sigma a^2 * Ssfe^2} \right] = \sigma a^2 * \tau^2$$

$$4 * \tau^2 * \tau_a^2 * \left[\frac{\sigma a^2 * Ssfe^2 + 4 * \tau^2 * Ssf^2}{\sigma a^2 * Ssfe^2} \right] = \sigma a^2 * \tau^2$$

$$\tau_a^2 * \left(\sigma a^2 * Ssfe^2 + 4 * \tau^2 * Ssf^2 \right) = \frac{\sigma a^4 * Ssfe^2}{4}$$

$$\tau_a = \frac{\sigma a^2 * Ssfe}{2 * (\sigma a^2 * Ssfe^2 + 4 * \tau^2 * Ssf^2)^{(1/2)}}$$

Puesta esta en: $\tau_m = \frac{4 * \tau^2 * Ssf}{\sigma a^2 * Ssfe} * \tau_a$

Resulta: $\tau_m = \frac{2 * \tau^2 * Ssf}{(\sigma a^2 * Ssfe^2 + 4 * \tau^2 * Ssf^2)^{(1/2)}}$

Siendo el cociente entre los valores de τ_a y τ_m , la pendiente de la recta de carga resultante, la ecuación de esta recta resulta en:

$$\tau_a = \tau_m * \frac{\sigma_a^2 * S_{sfe}}{4 * \tau^2 * S_{sf}}$$

Siendo la ecuación de la recta de admisibilidad:

$$S_{sa} = S_{sf} - \frac{S_{sf}}{S_{sfe}} * S_{sm}$$

los valores del par de tensiones admisibles Sa – Sm resulta de la intersección de la recta de carga y la de admisibilidad, consecuentemente:

$$S_{sa} = S_{sm} * \frac{\sigma_a^2 * S_{sfe}}{4 * \tau^2 * S_{sf}} = S_{sf} - \frac{S_{sf}}{S_{sfe}} * S_{sm}$$

$$S_{sm} * \frac{\sigma_a^2 * S_{sfe}}{4 * \tau^2 * S_{sf}} + \frac{S_{sf}}{S_{sfe}} * S_{sm} = S_{sf}$$

$$S_{sm} * \left[\begin{array}{cc} \frac{\sigma_a^2 * S_{sfe}}{4 * \tau^2 * S_{sf}} & \frac{S_{sf}}{S_{sfe}} \\ \frac{\sigma_a^2 * S_{sfe}}{4 * \tau^2 * S_{sf}} & \frac{S_{sf}}{S_{sfe}} \end{array} \right] = S_{sf}$$

$$S_{sm} * \left[\begin{array}{c} \frac{\sigma_a^2 * S_{sfe}^2 + 4 * \tau^2 * S_{sf}^2}{4 * \tau^2 * S_{sf} * S_{sfe}} \end{array} \right] = S_{sf}$$

$$S_{sm} = \frac{4 * \tau^2 * S_{sf}^2 * S_{sfe}}{\sigma_a^2 * S_{sfe}^2 + 4 * \tau^2 * S_{sf}^2}$$

Puesta esta última en la ecuación de la recta de carga:

$$S_{sa} = S_{sm} * \frac{\sigma_a^2 * S_{sfe}}{4 * \tau^2 * S_{sf}}$$

Resulta el Ssa correspondiente:

$$Ssa = \frac{\sigma_a^2 * Ssfe^2 * Ssf}{\sigma_a^2 * Ssfe^2 + 4 * \tau^2 * Ssf^2}$$

La obtención del coeficiente de sobredimensionamiento para el 'cubo' en análisis, resulta de:

$$Cs = \frac{Ssa}{\tau_a} = \frac{Ssm}{\tau_m}$$

$$Cs = \frac{Ssa}{\tau_a} = \frac{\frac{\sigma_a^2 * Ssfe^2 * Ssf}{\sigma_a^2 * Ssfe^2 + 4 * \tau^2 * Ssf^2}}{\frac{\sigma_a^2 * Ssfe}{2 * (\sigma_a^2 * Ssfe^2 + 4 * \tau^2 * Ssf^2)^{1/2}}}$$

$$Cs = \frac{2 * Ssf * Ssfe}{(\sigma_a^2 * Ssfe^2 + 4 * \tau^2 * Ssf^2)^{1/2}}$$

El lector puede llegar al mismo resultado con el siguiente cociente:

$$Cs = \frac{Ssm}{\tau_m}$$